

Sur la théorie des quanta

H. Poincaré

▶ **To cite this version:**

H. Poincaré. Sur la théorie des quanta. J. Phys. Theor. Appl., 1912, 2 (1), pp.5-34. 10.1051/jphystap:0191200200500 . jpa-00241783

HAL Id: jpa-00241783
https://hal.science/jpa-00241783

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

JOURNAL
DE PHYSIQUE
THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

SUR LA THÉORIE DES QUANTA;

Par M. H. POINCARÉ.

§ 1. — Introduction.

On sait à quelle hypothèse M. Planck a été conduit par ses recherches sur les lois du rayonnement. D'après lui, l'énergie des radiateurs lumineux varierait d'une manière discontinue, et c'est ce qu'on appelle la théorie des Quanta. Il est à peine nécessaire de faire remarquer combien cette conception s'écarte de tout ce qu'on avait imaginé jusqu'ici ; les phénomènes physiques cesseraient d'obéir à des lois exprimables par des équations différentielles, et ce serait là, sans aucun doute, la plus grande révolution et la plus profonde que la philosophie naturelle ait subie depuis Newton. Je ne parlerai pas des difficultés de détail, elles sautent à tous les yeux et M. Planck est le premier à s'en préoccuper.

Peut-on néanmoins échapper à cette conséquence ? Bien des personnes l'ont pensé ; lors du récent Congrès de Bruxelles, M. Nernst m'avait communiqué certaines suggestions ; il pensait qu'on pourrait rendre compte des faits, en supposant que les masses, au lieu d'être constantes comme dans la mécanique classique, au lieu de dépendre seulement de la vitesse, comme dans la mécanique nouvelle fondée sur le principe de relativité, soient dépendantes à la fois des composantes de la vitesse et de celles de l'accélération. Ce sont ces suggestions de M. Nernst qui m'ont déterminé à entreprendre ce travail, et je dois dire tout de suite que j'ai été conduit à répondre négativement à la question posée par l'éminent physicien.

M. Planck se représente le rayonnement des solides comme dû à un très grand nombre de résonnateurs hertziens. Chacun de ces réson-

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphystap:0191200200500

nateurs a une période propre unique et émet une lumière rigoureusement monochromatique. Par suite des échanges d'énergie entre ces résonnateurs, il s'établit entre eux un partage de l'énergie suivant une certaine loi, et il en résulte une certaine distribution de l'énergie rayonnée dans le spectre. Ceci suppose que ces échanges d'énergie sont possibles, bien que chaque résonnateur ne puisse ni absorber, ni émettre que de la lumière d'une couleur donnée; car, si l'échange ne pouvait avoir lieu, on ne tendrait pas vers une distribution finale et la distribution initiale persisterait indéfiniment. Mais ces échanges peuvent se faire par deux mécanismes entièrement différents :

1° Par le jeu du principe de Döppler-Fizeau ; soit que les résonnateurs soient supposés en mouvement, soit que la lumière rayonnée puisse être réfléchie, réfractée, diffractée ou diffusée par des corps en mouvement. Dans ce cas, les résonnateurs de longueurs d'ondes différentes pourraient échanger leurs énergies par l'intermédiaire de l'éther ;

2° Par des phénomènes mécaniques et en particulier par des chocs. On ne peut supposer qu'il y ait une influence *directe* d'un résonnateur sur l'autre. La théorie des quanta ne s'y prêterait pas, puisque l'un des résonnateurs ne pourrait gagner d'énergie que par multiples d'un certain quantum, tandis que l'autre ne pourrait en perdre que par multiples d'un autre quantum, incommensurable avec le premier. D'ailleurs, abstraction faite de la théorie des quanta, il ne manquerait pas de bonnes raisons pour lesquelles un échange immédiat serait invraisemblable et ne pourrait en tout cas qu'être exceptionnel. Mais il doit circuler entre les résonnateurs des atomes matériels qui, en choquant les résonnateurs, peuvent leur communiquer ou leur emprunter de l'énergie ; les échanges se feraient alors par l'intermédiaire de la matière.

Bien que cette conception des résonnateurs de M. Planck soit assez particulière et n'ait d'autre but que de fixer les idées, nous n'avons aucune raison de ne pas l'adopter, puisqu'elle semble ne devoir en aucun cas modifier les résultats essentiels. D'un autre côté, nous admettrons la possibilité des deux modes d'échange, mais nous étudierons plus particulièrement dans cet article le second mode, c'est-à-dire l'échange mécanique par l'intermédiaire de la matière.

Imaginons d'abord un système dont l'état est défini à chaque instant par n paramètres

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Supposons que les lois qui nous font connaître les variations de ces paramètres s'expriment par les équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \tag{1}$$

où les X sont des fonctions des x. Nous pouvons représenter l'état du système par le point de l'espace à n dimensions dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La probabilité pour que ce point soit intérieur à un élément de volume $d\tau$ de cet espace à n dimensions sera $W d\tau$, W étant une certaine fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La probabilité pour que ce point soit intérieur à un volume de l'espace à n dimensions sera $\int W d\tau$, l'intégration étant étendue à ce volume.

Par une pareille probabilité, j'entends le rapport $\frac{t}{T}$, T désignant une très longue durée s'étendant depuis l'époque θ jusqu'à l'époque $\theta + T$, et t le temps pendant lequel, entre ces deux mêmes époques, le point représentatif s'est trouvé à l'intérieur du volume considéré. Cette probabilité n'aura donc aucun sens, si ce rapport $\frac{t}{T}$ ne peut pas être considéré comme indépendant de θ et de T, pourvu que t soit très grand. Si cette condition est remplie et si la fonction W peut être définie, elle devra satisfaire à l'équation aux dérivées partielles :

$$\sum \frac{\partial (W X_i)}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

c'est-à-dire que W doit être un « dernier multiplicateur » des équations (1). Si donc ces équations n'admettent pas de dernier multiplicateur uniforme, la fonction W n'existera pas, on ne pourra parler de l'*état moyen du système pendant un intervalle très long ;* et même si on considère un ensemble formé d'un très grand nombre de pareils systèmes, cet ensemble de systèmes ne tendra pas vers un état final ; cela est contraire au second principe de la thermodynamique qui exige que le monde tende vers un état final d'où il ne peut plus sortir une fois qu'il l'a atteint. *Les équations qui représentent les phénomènes naturels doivent donc posséder au moins un dernier multiplicateur uniforme.*

Dans le cas de la mécanique classique, les équations différen-

tielles sont celles de Hamilton :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = Y_i = -\frac{dF}{dx_i}.$$

et l'on a :

$$\sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} = 0,$$

c'est-à-dire que le dernier multiplicateur W est égal à 1. On sait que cette hypothèse conduit au théorème de l'équipartition de l'énergie.

§ 2. — Cas de deux résonnateurs.

Envisageons un système formé de deux résonnateurs, l'un à longue, l'autre à courte période. Chacun de ces résonnateurs pourra être considéré comme une masse mobile oscillant autour de sa position d'équilibre d'après la loi pendulaire. Pour le premier, celui dont la période est longue, nous désignerons par m_1 sa masse, par $2\pi\sqrt{\frac{h_1}{m_1}}$ sa période, par x_1 son élongation, par y_1 sa quantité de mouvement, par ξ son énergie, et par φ la phase de son mouvement ; de telle façon que l'on ait :

$$\frac{1}{\sqrt{m_1}} y_1 = \sqrt{2\xi}\cos\varphi, \qquad \sqrt{h_1}x_1 = \sqrt{2\xi}\sin\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{h_1}{m_1}}$$

et que les équations du mouvement, quand ce mouvement n'est pas troublé par des chocs, s'écrivent :

$$y_1 = m_1\frac{dx_1}{dt}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -h_1x_1.$$

Nous désignerons pour le second résonnateur par m_2, h_2, x_2, y_2, η, ψ, les quantités correspondantes à m_1, h_1, x_1, y_1, ξ, φ, de sorte qu'on aura :

$$\frac{1}{\sqrt{m_2}} y_2 = \sqrt{2\eta}\cos\psi, \qquad \sqrt{h_2}x_2 = \sqrt{2\eta}\sin\psi, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{h_2}{m_2}};$$

$$y_2 = m_2\frac{dx_2}{dt}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -h_2x_2.$$

Nous supposerons que les deux résonnateurs oscillent sur la même

droite (mais autour de positions d'équilibre différentes), de façon à pouvoir se choquer. Les équations du mouvement troublé par les chocs s'écriront :

$$(3) \qquad y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -h_i x_i + Z_i \qquad (i = 1,2').$$

Les fonctions Z sont négligeables, sauf au moment des chocs ; ce sont donc des fonctions des x et des y qui seront sensiblement nulles quand la différence $x_1 - x_2$ n'aura pas une valeur voisine de celle qui correspond au choc, et extrêmement grandes dans le cas contraire.

Je ne cherche pas une expression plus précise des fonctions Z en m'appuyant sur les lois connues du choc. Nous sommes obligés, en effet, de supposer, et c'est précisément là l'objet de ce travail, que les lois du choc sont modifiées d'une façon qui déroute toutes les prévisions. En revanche, nous ne toucherons pas aux termes de nos équations, autres que les termes Z ; ces termes expriment seulement, en effet, que le mouvement de chaque résonnateur reste sinusoïdal en l'absence de toute perturbation, et c'est là une hypothèse qui s'impose, si nous voulons que chaque résonnateur donne une radiation monochromatique.

En ce qui concerne le résonnateur à longue période, nous pouvons supposer à la fois que h_1 est très petit et que l'amplitude des oscillations est très grande ; nous arrivons à la limite au cas d'un atome se mouvant librement, et dont le mouvement est rectiligne et uniforme dans l'intervalle des chocs.

Cela posé, nous devrons avoir un dernier multiplicateur $k\mathrm{W}$, k étant un facteur constant dont je me réserve de disposer ; la probabilité est exprimée par l'intégrale :

$$\int k\mathrm{W} d\tau = k \int \mathrm{W} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2,$$

ce qui peut s'écrire en passant aux variables ξ, η, φ, ψ :

$$(4) \qquad k \frac{m_1 m_2}{h_1 h_2} \int \mathrm{W} d\xi d\eta d\varphi d\psi.$$

La fonction W doit rester un dernier multiplicateur en dehors des chocs, c'est-à-dire quand on annule les termes Z, cela exige :

$$\frac{y_1}{m_1} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_1} - h_1 x_1 \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y_1} + \frac{y_2}{m_2} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_2} - h_2 x_2 \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y_2} = 0,$$

ou avec les nouvelles variables :

$$\sqrt{\frac{m_1}{h_1}}\frac{\partial W}{\partial \varphi}+\sqrt{\frac{m_2}{h_2}}\frac{\partial W}{\partial \psi}=0,$$

d'où :

$$W=\text{fonc.}\left(\xi,\ \eta,\ \varphi\sqrt{\frac{h_1}{m_1}}-\psi\sqrt{\frac{h_2}{m_2}}\right).$$

Les coefficients $\sqrt{\frac{h_1}{m_1}}$ et $\sqrt{\frac{h_2}{m_2}}$ étant généralement incommensurables, la seule solution qui soit uniforme en x_1, y_1, x_2, y_2, et par conséquent périodique en φ et ψ, c'est une fonction arbitraire de ξ et η_1.

Pour avoir la probabilité pour que les énergies soient comprises respectivement entre ξ et $\xi+d\xi$, et entre η et $\eta+d\eta$, il faut intégrer l'expression (4) par rapport à φ et à ψ depuis 0 jusqu'à 2π ; on trouve ainsi :

$$4\pi^2 k\,\frac{m_1 m_2}{h_1 h_2}\,W d\xi d\eta,$$

ce qui, en prenant l'arbitraire :

$$k=\frac{h_1 h_2}{4\pi^2 m_1 m_2},$$

se réduit à $W d\xi d\eta$.

Si donc on représente l'état du système par le point du plan dont les coordonnées sont ξ et η, la probabilité pour que le point représentatif soit intérieur à une certaine aire sera :

$$\int W d\xi d\eta.$$

La fonction W peut dépendre de ξ et de η, mais le résonnateur à très longue période étant assimilable à un atome, nous devons admettre qu'il suit les lois de la mécanique ordinaire et que les dérogations à ces lois ne pourront provenir que de la présence de l'autre résonnateur, ce qui signifie que W ne dépend que de η ; cette hypothèse sera mieux justifiée dans la suite.

Je dois rechercher quelle est la partition de l'énergie, c'est-à-dire quelles vont être les valeurs probables de ξ et de η_1, valeurs que j'appelle X et Y. J'observe que ξ et η sont liés par l'équation des forces vives :

$$\xi+\eta=h,$$

où h est une constante donnée. Je poserai alors :

$$\mathrm{M}dh = \int \mathrm{W} d\xi d\eta,$$

où l'intégration est étendue au domaine défini par les inégalités :

$$\xi > 0, \quad \eta > 0, \qquad h < \xi + \eta < h + dh.$$

J'aurai alors par définition :

$$\mathrm{MX}dh = \int \xi \mathrm{W} d\xi d\eta; \qquad \mathrm{MY}dh = \int \eta \mathrm{W} d\xi d\eta.$$

Il est clair que je pourrais écrire également :

$$(5) \quad \mathrm{M} = \int_0^h \mathrm{W}(\eta)\, d\eta; \qquad \mathrm{MX} = \int_0^h (h - \eta)\, \mathrm{W}(\eta)\, d\eta; \qquad \mathrm{MY} = \int_0^h \eta \mathrm{W}(\eta)\, d\eta.$$

On a dans tous les cas :

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y} = h.$$

Si $\mathrm{W} = 1$, il vient comme on sait $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$. Dans tous les cas, nous devons admettre que le résonnateur à longue période suit les lois actuelles, et par conséquent que X représente la température absolue (à un facteur constant près que nous pouvons supposer égal à 1 par un choix convenable des unités). Si la loi de Planck est vraie, on devra donc avoir :

$$\mathrm{Y} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{\mathrm{X}}} - 1},$$

ε étant une constante. Il serait aisé, à l'aide des formules (5), de déterminer W de façon à retrouver cette loi, mais cela n'aurait aucun intérêt, le cas de la nature étant entièrement différent.

§ 3. — Cas de plusieurs résonnateurs.

Nous devons imaginer, en effet, non pas deux résonnateurs, mais des résonnateurs en très grand nombre; nous supposerons qu'il y en ait p à longue période, tous semblables entre eux et ayant respectivement pour énergie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$; et en outre n résonnateurs à courte période, tous semblables entre eux et ayant respectivement pour

énergie, η_1, η_2, ..., η_n. Nous pourrons d'ailleurs désigner ces résonnateurs par R_1, R_2, ..., R_p, d'une part, par R'_1, R'_2, ..., R'_n, d'autre part; nous représenterons leurs phases par φ_1, φ_2, ..., φ_p et par ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n. Les équations différentielles devront alors admettre un dernier multiplicateur $k\mathrm{U}$ (où k est un facteur constant dont nous nous réservons de disposer); de telle façon qu'en représentant l'état du système par un point de l'espace à $2n + 2p$ dimensions des ξ, des η, des φ et des ψ, la probabilité pour que le point représentatif soit intérieur à un certain volume de cet espace sera :

$$\int k\mathrm{U} d\varpi,$$

où $d\varpi$ est le produit des $d\xi$, des $d\eta$, des $d\varphi$ et des $d\psi$.

Considérons maintenant l'effet des chocs entre les résonnateurs R_i et R'_k, et soit W, ce que serait le dernier multiplicateur si ces deux résonnateurs existaient seuls; nous avons vu au paragraphe précédent que W est une fonction de ξ_i et de η_k; nous avions même été conduits à supposer que W dépendait de η_k seulement, mais j'abandonne pour un instant cette hypothèse. Un choc entre R_i et R'_k fera varier brusquement (ou très rapidement) les variables ξ_i, η_k, φ_i, ψ_k, relatives à ces deux résonnateurs et ne changera pas les variables relatives aux autres résonnateurs. Pour que la distribution des probabilités n'en soit pas altérée, il faut que $k\mathrm{U}$ soit de la forme :

$$k\mathrm{U} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{W}(\xi_i, \eta_k),$$

$\mathrm{W}(\xi_i, \eta_k)$ étant le dernier multiplicateur, tel qu'il serait si les deux résonnateurs existaient seuls et F étant une fonction des variables relatives aux autres résonnateurs. Si donc nous envisageons en particulier les résonnateurs R_1, R_2 et R'_1 par exemple, nous pourrons écrire :

$$k\mathrm{U} = \mathrm{F}_1(\xi_2, \ldots)\ \mathrm{W}(\xi_1, \eta_1),$$

et d'autre part :

$$k\mathrm{U} = \mathrm{F}_2(\xi_1, \ldots)\ \mathrm{W}(\xi_2, \eta_1),$$

F_1 dépendant seulement des résonnateurs autres que R_1 et R'_1 et F_2 seulement des résonnateurs autres que R_2 et R'_1. Cela n'est possible que si l'on a :

$$k\mathrm{U} = \Phi \cdot w'(\xi_1)\ w'(\xi_2)\ w(\eta_1),$$

$w'(\xi_1)$, $w'(\xi_2)$, $w(\eta_1)$ étant des fonctions d'une seule variable ne

dépendant respectivement que de ξ_1, de ξ_2 et de η_1, tandis que Φ ne dépend que des variables relatives aux résonnateurs autres que R_1, R_2 et R_1'. On trouvera ainsi finalement :

$$kU = kw'(\xi_1)\, w'(\xi_2) \ldots w'(\xi_p)\, w(\eta_1)\, w(\eta_2) \ldots w(\eta_n).$$

C'est le moment de revenir à l'hypothèse faite plus haut et que nous discuterons plus complètement plus loin et de supposer $w'(\xi_i) = 1$, de telle façon que notre probabilité ne dépende que des η et pas des ξ.

Dans tous les cas, cette probabilité ne dépend pas des phases. Si donc nous représentons la distribution des énergies dans le système par un point de l'espace à $n + p$ dimensions des ξ et des η, la loi des probabilités s'obtiendra en intégrant l'expression :

$$\int kU d\varpi,$$

par rapport aux φ et aux ψ depuis 0 jusqu'à 2π ; on trouve ainsi :

$$k(2\pi)^{n+p} \int U d\sigma d\tau,$$

où $d\sigma$ désigne le produit des $d\eta$ et $d\tau$ celui des $d\xi$. Nous disposerons de k de telle façon que :

$$k(2\pi)^{n+p} = 1,$$

et, en nous rappelant que les w' sont supposés égaux à 1 et que U se réduit au produit des w, nous aurons pour l'expression de la probabilité :

$$\int U d\sigma d\tau = \int w(\eta_1)\, w(\eta_2) \ldots w(\eta_p)\, d\sigma d\tau. \tag{6}$$

L'équation des forces vives s'écrira :

$$\Sigma\xi + \Sigma\eta = h.$$

Les valeurs moyennes des ξ_i seront toutes les mêmes par raison de symétrie et il en est de même de celles des η_k ; j'appelle X la valeur moyenne des ξ_i et Y celle des η_k, et j'ai pour définir ces quantités les équations :

$$\text{(7)}\quad M dh = \int U d\sigma d\tau ; \qquad MX dh = \int \xi_1 U d\sigma d\tau ; \qquad MY dh = \int \eta_1 U d\sigma d\tau,$$

les intégrations étant étendues au domaine défini par les inégalités :

$$(8) \qquad \xi_i > 0, \quad \eta_k > 0, \qquad h < \Sigma\xi + \Sigma\eta < h + dh.$$

§ 4. — Discussion des formules.

Il y a lieu de se demander d'abord si la relation entre X et Y est indépendante des nombres entiers n et p. Il y a un cas où il en est effectivement ainsi, c'est celui où $\varpi(\eta)$ est une puissance de η, soit η^m. Pour nous en rendre compte, nous allons nous appuyer sur la formule suivante.

Répartissons arbitrairement en deux classes les résonnateurs soit à longue, soit à courte période, et désignons par ξ_i' et η_k' les énergies des résonnateurs de la première classe, par ξ_i'' et η_k'' celles des résonnateurs de la deuxième classe. Soit U' ce que serait le produit U si les résonnateurs de la première classe existaient seuls et U'' ce qu'il serait si ceux de la deuxième classe existaient seuls, on aura donc :

$$U = U'U'';$$

nous désignerons par $d\sigma'$, $d\tau'$, $d\sigma''$, $d\tau''$ les produits des $d\eta'$, des $d\xi'$, des $d\eta''$, des $d\xi''$ et nous aurons :

$$M dh = \int U'U'' d\sigma' d\tau' d\sigma'' d\tau''.$$

Commençons par calculer l'intégrale du second membre en l'étendant au domaine défini par les inégalités :

$$(8\ bis) \quad \begin{cases} \xi' > 0, \quad \eta' > 0, \quad \xi'' > 0, \quad \eta'' > 0; \\ h' < \Sigma\xi' + \Sigma\eta' < h' + dh'; \qquad h'' < \Sigma\xi'' + \Sigma\eta'' < h'' + dh'', \end{cases}$$

les variables se trouvent séparées et l'intégrale se décomposera en deux facteurs :

$$\int U' d\sigma' d\tau' \int U'' d\sigma'' d\tau''.$$

Ces deux facteurs ne sont autre chose que $M' dh'$ et $M'' dh''$, en désignant par M' (ou par M'') ce que deviendrait M si les résonnateurs de la première classe (ou de la seconde) existaient seuls. Pour retrouver l'intégrale étendue au domaine (8), il suffit d'intégrer de nouveau par rapport à h' et h'' dans le domaine défini par :

$$h' > 0, \quad h'' > 0, \qquad h < h' + h'' < h + dh,$$

on trouve ainsi :

$$\mathrm{M}dh = \int \mathrm{M}'\mathrm{M}''dh'dh'' : \qquad [h' > 0,\ h'' > 0,\ h < h' + h'' < h + dh]$$

ou ce qui revient au même :

$$\mathrm{M}(h) = \int_0^h \mathrm{M}'(x)\ \mathrm{M}''(h - x)\ dx. \tag{9}$$

Comme M est une fonction qui dépend de n et de p et que je puis écrire $\varphi_{n\cdot p}(h)$, je puis écrire la formule (9) sous la forme :

$$\varphi_{m+n\cdot p+q}(h) = \int_0^h \varphi_{m\cdot p}(x)\ \varphi_{n\cdot q}(h - x)\ dx. \tag{9 bis}$$

Si nous désignons par X'Y' (ou par X''Y'') ce que seraient les valeurs moyennes des ξ et des η si les résonnateurs de la première classe (ou de la deuxième) existaient seuls, on trouvera de même :

$$\mathrm{YM} = \int_0^h \mathrm{Y}'\mathrm{M}'\mathrm{M}''dx, \tag{10}$$

où Y' et M' sont des fonctions de x, et M'' de $h - x$.

Si nous supposons $w(\eta) = \eta^m$, je trouve :

$$\varphi_{1\cdot 1} = \frac{h^{m+1}}{m+1}, \qquad \varphi_{2\cdot 0} = h, \qquad \varphi_{0\cdot 2} = h^{2m+1}\int_0^h x^m(1 - x)^m\ dx.$$

Je dis que nous aurons en général :

$$\varphi_{n\cdot p} = \mathrm{K}h^{mn+n+p-1},$$

K étant un facteur numérique. Il suffit de remarquer que l'intégrale définie :

$$\int_0^h x^\alpha (h - x)^\beta\ dx$$

est proportionnelle à $h^{\alpha+\beta+1}$ et d'appliquer la formule (9 *bis*) pour reconnaître que la proposition vraie pour les petites valeurs de n et de p doit être également vraie par récurrence pour toutes les valeurs de ces entiers.

Si nous plaçons dans la première classe tous les résonnateurs à courte période et dans la seconde tous ceux de période longue,

nous aurons donc :

$$M' = K' h'^{mn+n-1}, \qquad M'' = K'' h''^{p-1}.$$

On devra avoir d'ailleurs $Y' = \frac{h'}{n}$, $X'' = \frac{h''}{p}$, puisque dans le cas, par exemple, où les n résonnateurs à courte période existent seuls, comme ils sont tous identiques, l'énergie moyenne Y' de chacun d'eux devra être la n^e partie de l'énergie totale h' ; on aura donc, pour les formules (9) et (10) :

$$M = K'K'' \int_0^h x^{mn+n-1} (h-x)^{p-1}\, dx,$$

$$MY = K'K'' \int_0^h \frac{x^{mn+n}}{n} (h-x)^{p-1}\, dx; \quad MX = K'K'' \int_0^h x^{mn+n-1} \frac{(h-x)^p}{p}\, dx.$$

Mais l'intégration par parties nous donne :

$$\int_0^h x^{\alpha+1} (h-x)^\beta\, dx = \frac{\alpha+1}{\beta+1} \int_0^h x^\alpha (h-x)^{\beta+1}\, dx.$$

On en déduit :

$$\frac{nY}{pX} = \frac{mn+n}{p},$$

d'où :

$$\frac{X}{1} = \frac{Y}{m+1}.$$

On voit que la répartition de l'énergie ne dépend pas des nombres n et p, mais c'est là le seul cas où cette indépendance ait lieu.

Considérons le cas de $n = 1$, $p = 2$; de sorte que nous aurons trois résonnateurs dont les énergies seront respectivement η, ξ_1 et ξ_2 ; et on aura :

$$M = \int w\, d\eta\, d\xi_1, \qquad XM = \int \xi_1 w\, d\eta\, d\xi_1, \qquad YM = \int \eta w\, d\eta\, d\xi_1,$$

où w dépend seulement de η, où l'état du système est représenté par le point du plan dont les coordonnées sont η et ξ_1 et où les intégrations sont étendues au triangle :

$$\eta > 0, \qquad \xi_1 > 0, \qquad \eta + \xi_1 < h.$$

Si alors w est considéré comme représentant la densité de la matière, M représentera la masse du triangle, X et Y son centre de gravité. Ce centre de gravité sera sur la médiane correspondant au côté qui est sur l'axe des ξ_1, puisque la densité est constante le long des droites parallèles à cet axe ; on a donc :

$$2X + Y = h.$$

Quand on fera varier h, ce centre de gravité XY décrira une certaine courbe C, et l'équation de cette courbe nous donnera la relation cherchée entre X et Y.

Pour passer au cas de $n = 1$, $p = 1$, nous n'avons qu'à faire :

$$M = \int w d\eta, \qquad XM = \int \xi_1 w d\eta = \int (h - \eta)\, w d\eta, \qquad YM = \int \eta w d\eta,$$

en étendant les intégrations à la droite :

$$\xi_1 + \eta = h,$$

qui sert de base à notre triangle ; le point XY représente alors le centre de gravité de cette base. Si nous voulons que la loi de partition de l'énergie soit la même pour $n = 1$, $p = 1$, que pour $n = 1$, $p = 2$, il faut que le lieu de ce nouveau centre de gravité, quand on fait varier h, soit encore la courbe C.

Je dis que cela n'est possible que si la courbe C est une droite passant par l'origine ; si, en effet, ce n'était pas une droite, c'est-à-dire si le rapport $\frac{Y}{X}$ n'était pas une constante, nous pourrions prendre h assez petit pour que, de O jusqu'à h, cette courbe ne présente pas de point d'inflexion et soit par conséquent convexe. Décomposons le triangle en trapèzes infiniment étroits en menant des parallèles à la base $\xi_1 + \eta = h$; chacun de ces trapèzes aura son centre de gravité sur C ; le centre de gravité total du triangle ne changera pas si on concentre la masse de chacun de ces trapèzes en son centre de gravité : c'est donc le centre de gravité de la courbe C en attribuant à cette courbe une densité partout positive. Or, le centre de gravité d'une courbe convexe ne peut se trouver sur cette courbe ; donc le centre de gravité du triangle ne pourrait se trouver sur C, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La courbe C est donc une droite :

$$\frac{Y}{X} = m + 1,$$

d'où :

$$\frac{\int_0^h \eta_1 w d\eta_1}{\int_0^h (h - \eta_1)\, w d\eta_1} = m + 1.$$

Le rapport des deux intégrales étant indépendant de h, nous obtiendrons encore le même rapport en différentiant le numérateur et le dénominateur par rapport à h; mais

$$\frac{d}{dh}\int_0^h \eta_1 w d\eta_1 = hw(h), \qquad \frac{d}{dh}\int_0^h (h - \eta_1)\, w d\eta_1 = \int_0^h w d\eta_1,$$

d'où successivement :

$$\frac{hw(h)}{\int_0^h w d\eta_1} = m + 1, \qquad \int_0^h w d\eta_1 = h^{m+1}, \qquad w = \eta_1^m.$$

C. Q. F. D.

Ce n'est donc que dans des cas très exceptionnels que la loi de partition de l'énergie est indépendante des entiers n et p ; il semble d'abord qu'il en résulte qu'aucun équilibre thermique ne soit possible et que cela soit en contradiction avec le second principe de la thermodynamique, mais il faut se rappeler que les nombres n et p sont toujours très grands. Il convient donc de se poser la question autrement : *la loi de partition de l'énergie est-elle indépendante du rapport* $\frac{n}{p}$ *quand les entiers n et p sont très grands?*

Si cette indépendance n'avait pas lieu, l'équilibre thermodynamique serait impossible ; tous les théorèmes de Boltzmann, qui *postulent* la possibilité de cet équilibre seraient en défaut; la notion même d'entropie n'aurait plus aucun sens. Tant donc que cette indépendance n'est pas établie, il peut rester des doutes sur les raisonnements de M. Planck, qui reposent sur l'existence de l'entropie et les théorèmes de Boltzmann. Cela suffirait pour justifier le travail que j'ai entrepris ici.

§ 5. — Cas des grands nombres.

Reprenons, dans le cas général (c'est-à-dire pour w quelconque), les équations (9) à (10) en classant dans une même classe, comme plus haut, les résonnateurs de même période ; nous pourrons écrire :

$$M' = \varphi_n(h'), \qquad M'' = K''h''^{p-1}, \qquad Y' = \frac{h'}{n}, \qquad X'' = \frac{h''}{p};$$

et il viendra :

$$(11) \qquad M = K'' \int_0^h \varphi_n(x)\,(h-x)^{p-1}\,dx;$$

$$(12)\ MY = \frac{K''}{n}\int_0^h x\varphi_n(x)\,(h-x)^{p-1}\,dx; \qquad MX = \frac{K''}{p}\int_0^h \varphi_n(x)\,(h-x)^p\,dx.$$

Supposons que pour n très grand, $\varphi_n(x)$ puisse se mettre sous la forme suivante :

$$(13) \qquad \varphi_n(x) = HNF^n\left(\frac{x}{n}\right)\theta\left(\frac{x}{n}\right),$$

F et θ sont deux fonctions de $\frac{x}{n}$, la première élevée à la puissance n ; N est un coefficient numérique ne dépendant que de n, H est une expression qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini ; nous poserons $p = kn$, et nous supposerons que n et p sont très grands, mais que leur rapport k est fini.

Posons encore :

$$\frac{x}{n} = \omega, \qquad \frac{h}{n} = \beta, \qquad \Phi = F(\omega)\,(\beta - \omega)^k,$$

il viendra :

$$M = n^p K''N \int_0^\beta H\theta(\omega)\ \Phi^n(\omega)\ \frac{d\omega}{\beta-\omega};$$

$$MY = n^p K''N \int_0^\beta \omega H\theta(\omega)\ \Phi^n(\omega)\ \frac{d\omega}{\beta-\omega}; \qquad MX = \frac{n^p K''N}{k}\int_0^\beta H\theta(\omega)\ \Phi^n(\omega)\ d\omega.$$

Sous le signe $\int$ figure une fonction Φ élevée à une puissance très grande ; l'élément de cette intégrale, qui correspond au maximum de

Φ, aura donc une influence très prépondérante. Le rapport des intégrales :

$$\frac{MY}{M}, \qquad \frac{MX}{M},$$

pourra donc se calculer en tenant compte seulement de cet élément; on aura donc :

$$Y = \omega, \qquad X = \frac{\beta - \omega}{k},$$

ω *étant la valeur qui rend maximum* Φ ; or cette valeur sera donnée par l'équation :

$$\frac{F'(\omega)}{F(\omega)} - \frac{k}{\beta - \omega} = 0,$$

ou bien :

$$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)}. \tag{14}$$

C'est là la loi de partition de l'énergie, c'est-à-dire la relation cherchée entre X et Y. *On voit qu'elle est indépendante du rapport* $\frac{n}{p}$.

Soit d'abord $w = \eta^m$, d'où :

$$\varphi_n = Kx^{mn+n-1},$$

$$F = \left(\frac{x}{n}\right)^{m+1}, \quad \theta = \left(\frac{x}{n}\right)^{-1}, \quad H = 1, \quad N = Kn^{mn+n-1}; \quad \frac{F'(Y)}{F(Y)} = \frac{m+1}{Y},$$

et enfin :

$$X = \frac{Y}{m+1}.$$

Soit maintenant $w = e^{\gamma\eta}$; il viendra :

$$\varphi_n(x)\, dx = \int e^{\gamma\Sigma\eta} d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue au domaine :

$$\eta_i > 0, \qquad x < \Sigma\eta < x + dx;$$

on en déduit :

$$\varphi_n(x)\, dx = e^{\gamma x} \int d\sigma = \frac{e^{\gamma x} x^{n-1} dx}{(n-1)!};$$

d'où, en faisant $h = x = n\omega$:

$$F(\omega) = e^{\gamma\omega}\omega, \qquad \theta = \frac{1}{\omega}, \quad H = 1, \quad N = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \frac{F'(Y)}{F(Y)} = \gamma + \frac{1}{\omega},$$

d'où enfin :

$$X = \frac{Y}{\gamma Y + 1}.$$

§ 6. — La loi de Planck.

Dans l'hypothèse de M. Planck, l'énergie d'un résonnateur ne peut être égale qu'à un multiple de ε, ε étant un quantum; la probabilité est donc discontinue; la fonction $w(\eta)$ est nulle toutes les fois que η n'est pas multiple de ε; si η devient multiple de ε, la fonction w devient au contraire infinie et cela de telle façon que l'intégrale

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} w d\eta$$

soit égale au nombre des multiples de ε compris entre η_0 et η_1; voyons quelles sont les conséquences de cette hypothèse et voyons en particulier ce que devient la fonction $\varphi_n(x)$; on a par définition :

$$\varphi_n(x)\, dx = \int w(\eta_1)\, w(\eta_2) \ldots w(\eta_n)\, d\sigma,$$

l'intégration devant être étendue au domaine :

$$\eta_i \geqq 0, \qquad x \leqq \Sigma\eta \leqq x + dx.$$

Dans le cas qui nous occupe, notre intégrale doit être remplacée par une somme finie, puisque la fonction sous le signe $\int$ est discontinue, elle sera égale au nombre des points situés à l'intérieur du domaine et dont les n coordonnées η_i sont des multiples de ε (les limites du domaine sont supposées contenues dans le domaine).

Considérons l'intégrale $\int \varphi_n(x)\, dx$ étendue à un petit intervalle : de deux choses l'une, ou bien cet intervalle contiendra un multiple $\gamma\varepsilon$ de ε, ou il n'en contiendra aucun; dans le second cas, l'intégrale sera nulle; dans le premier, elle sera égale au nombre de partitions de l'entier γ en une somme de n entiers, positifs ou nuls. Ce nombre de partitions est donné par la formule :

$$\frac{(\gamma + n - 1)!}{\gamma!\,(n-1)!}.$$

Dans les formules (11) et (12), les intégrales doivent être remplacées par des sommes, et on aura par exemple :

$$M = K'' \sum \frac{(\gamma + n - 1)!}{\gamma ! (n-1)!} (h - \gamma\varepsilon)^{p-1},$$

la sommation étant étendue à tous les entiers γ tels que $\gamma\varepsilon$ soit plus petit que h. Les formules qui donnent MY et MX se déduiraient de la précédente en multipliant sous le signe $\int$ par :

$$\frac{\gamma\varepsilon}{n}, \qquad \frac{h - \gamma\varepsilon}{p}.$$

Nous allons maintenant remplacer les factorielles par leurs valeurs approchées :

$$(\gamma + n)! = (\gamma + n)^{\gamma+n} e^{-\gamma-n} \sqrt{2\pi(\gamma + n)};$$
$$\gamma ! = \gamma^{\gamma} e^{-\gamma} \sqrt{2\pi\gamma}; \qquad n ! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

d'où :

$$\frac{(\gamma + n - 1)!}{\gamma ! (n-1)!} = \frac{(\gamma + n)!}{\gamma ! n !} \frac{n}{\gamma + n} = \left(1 + \frac{n}{\gamma}\right)^{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)^{n} \sqrt{\frac{\gamma + n}{2\pi\gamma n}} \frac{n}{\gamma + n}.$$

Nous avons d'ailleurs :

$$x = n\omega = \gamma\varepsilon,$$

d'où :

$$\frac{(\gamma + n - 1)!}{\gamma ! (n-1)!} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{\gamma} \left(1 + \frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sqrt{\frac{\omega + \varepsilon}{\omega}} \frac{\varepsilon}{\omega + \varepsilon}.$$

Cela nous montre que l'on peut prendre :

$$F(\omega) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\omega}{\varepsilon}\right), \qquad N = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \qquad \theta(\omega) = \sqrt{\frac{\omega + \varepsilon}{\omega}} \frac{\varepsilon}{\omega + \varepsilon},$$

et le second membre se réduira comme il convient à $F^n \theta N$. Nos raisonnements s'appliqueront a nos sommes comme ils s'appliquaient à nos intégrales, les seuls éléments de la somme qui donneront un effet sensible sont ceux qui correspondent au maximum de F, et nous retomberons sur la formule (14). Or on trouve aisément :

$$\frac{F'(Y)}{F(Y)} = \frac{1}{\varepsilon} \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right),$$

d'où :

$$\frac{\varepsilon}{X} = \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right), \qquad Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}.$$

ce qui est bien la loi de Planck.

§ 7. — Deuxième méthode

Cela ne nous donne toutefois pas entière satisfaction ; nous ne savons pas encore, en effet : 1° si la loi de partition sera indépendante du rapport $\frac{n}{p}$, quelle que soit la fonction w ; 2° si l'hypothèse du paragraphe précédent est la seule qui conduise à la loi de Planck. Pour répondre à ces deux questions, je vais employer un autre mode de calcul, fondé sur l'emploi de l'intégrale de Fourier. Posons :

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} w(\eta_1)\, e^{-\alpha\eta_1} d\eta_1. \tag{15}$$

Si la fonction $w(\eta_1)$ reste finie pour $\eta_1 = \infty$, ou devient infinie à la façon d'un polynôme entier en η_1, et si α a sa partie réelle positive, l'intégrale du second membre est finie. Si la formule restait vraie quand la partie réelle de α est nulle, nous pourrions écrire :

$$\Phi(i\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta_1)\, e^{-i\beta\eta_1} d\eta_1,$$

$\psi(\eta_1)$ étant une fonction qui est égale à w pour $\eta_1 > 0$ et à 0 pour $\eta_1 < 0$, et nous aurions ainsi l'intégrale de Fourier sous sa forme ordinaire et nous en déduirions :

$$w(\eta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(i\beta)\, e^{i\beta\eta_1} d\beta.$$

Mais cela n'est possible que si la fonction $w(\eta_1)$ tend vers 0 pour $\eta_1 = \infty$, dans le cas contraire, la formule de Fourier n'est pas établie. Elle reste vraie néanmoins, *mutatis mutandis ;* donnons, en effet, à α une valeur complexe $\gamma + i\beta$ où la partie réelle γ soit positive, nous aurons alors :

$$\Phi(\gamma + i\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta_1)\, e^{-\gamma\eta_1} e^{-i\beta\eta_1} d\eta_1.$$

Cette fois la quantité $\psi(\eta) e^{-\gamma\eta}$ tend vers 0 pour $\eta = \infty$, la formule de Fourier peut donc s'appliquer sans difficulté, ce qui donne :

$$w(\eta) e^{-\gamma\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\gamma + i\beta) e^{i\beta\eta} d\beta.$$

La partie réelle γ est regardée comme une constante, et β prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, donc le point α décrit une droite perpendiculaire à l'axe des quantités réelles ; on a d'ailleurs :

$$d\alpha = id\beta,$$

d'où enfin :

$$w(\eta) = \frac{1}{2i\pi} \int \Phi(\alpha) e^{\alpha\eta} d\alpha. \tag{16}$$

La formule (15) nous donne en l'élevant à la puissance n :

$$\Phi^n(\alpha) = \int w(\eta_1) w(\eta_2) \dots w(\eta_n) e^{-\alpha\Sigma\eta} d\sigma,$$

en intégrant par rapport aux n variables depuis 0 jusqu'à l'infini ; étendons d'abord l'intégration au domaine :

$$\eta_i > 0, \qquad x < \Sigma\eta < x + dx,$$

nous trouverons :

$$\varphi_n(x) e^{-\alpha x} dx ;$$

il reste à intégrer pour toutes les valeurs de x depuis 0 jusqu'à l'infini, ce qui donne :

$$\Phi^n(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_n(x) e^{-\alpha x} dx, \tag{15 \textit{bis}}$$

et en la traitant comme la formule (15), nous en déduirons :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha. \tag{16 \textit{bis}}$$

L'intégrale (16 *bis*), comme l'intégrale (16), doit être prise le long d'une droite perpendiculaire à l'axe des quantités réelles ; mais ce chemin d'intégration peut être déformé, pourvu que la partie réelle de α reste toujours positive et que sa partie imaginaire varie de $-\infty$ à $+\infty$, et, en effet, la fonction $\Phi(\alpha)$ est holomorphe dans tout le demi-plan où la partie réelle de α est positive.

Si nous substituons à $\varphi_n(x)$ sa valeur (16 *bis*) dans les équations (11) et (12), il viendra :

$$(11\ bis) \qquad M = \frac{K''}{2i\pi}\int\int \Phi^n(\alpha)\, e^{\alpha x}(h - x)^{p-1}\, dx d\alpha,$$

$$(12\ bis) \qquad \begin{cases} MY = \dfrac{K''}{2ni\pi}\displaystyle\int\int x\Phi^n(\alpha)\, e^{\alpha x}(h - x)^{p-1}\, dx d\alpha; \\ MX = \dfrac{K''}{2pi\pi}\displaystyle\int\int \Phi^n(\alpha)\, e^{\alpha x}(h - x)^{p}\, dx d\alpha, \end{cases}$$

et en posant encore :

$$x = n\omega, \qquad h = n\beta, \qquad p = kn,$$

nous obtiendrons :

$$M = \frac{n^p K''}{2i\pi}\iint \Theta^n \frac{d\alpha d\omega}{\beta - \omega},$$

$$MY = \frac{n^p K''}{2i\pi}\iint \Theta^n \frac{\omega d\alpha d\omega}{\beta - \omega}; \qquad MX = \frac{n^p K''}{2i\pi}\iint \Theta^n \frac{\beta - \omega}{k}\frac{d\alpha d\omega}{\beta - \omega},$$

en posant :

$$\Theta = \Phi(\alpha)\, e^{\alpha\omega}(\beta - \omega)^k.$$

L'intégration est prise depuis 0 jusqu'à β par rapport à ω et par rapport à α tout le long d'une droite perpendiculaire à l'axe des quantités réelles.

Les seuls éléments des intégrales qu'il y ait à prendre en considération sont ceux qui rendent maximum la fonction Θ, qui est élevée à une très grande puissance, pourvu toutefois que le chemin d'intégration passe par cet élément ; mais, comme nous l'avons remarqué plus haut, nous pouvons déformer ce chemin, et nous le ferons de façon que cette condition soit remplie. On aura donc :

$$Y = \omega, \qquad X = \frac{\beta - \omega}{k},$$

ω étant la valeur qui correspond à ce maximum. Pour exprimer que la fonction Θ passe par un maximum, nous exprimerons que ses dérivées logarithmiques partielles par rapport à α et à ω sont nulles, ce qui donne :

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} + \omega = \alpha - \frac{k}{\beta - \omega} = 0.$$

On a donc :

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = -Y; \qquad X = \frac{1}{\alpha}. \tag{17}$$

En éliminant α entre ces deux équations, on aura la relation cherchée entre X et Y. On voit que, quel que soit w, la loi de partition ne dépend pas du rapport des deux entiers n et p, pourvu que ces deux entiers soient très grands.

Pour $w = \eta^m$, on a :

$$\Phi = \frac{k}{\alpha^{m+1}}, \qquad Y = (m+1)\,X.$$

Pour $w = e^{\gamma\eta}$, on a :

$$\Phi = \frac{1}{\alpha - \gamma}, \qquad Y = \frac{X}{1 - \gamma X}.$$

On remarquera que dans ce dernier cas l'intégrale (15) n'est finie et par conséquent la fonction Φ définie que quand la partie réelle de α est plus grande que γ.

Passons à l'hypothèse de Planck ; dans ce cas l'intégrale (15) doit être remplacée par une somme ; on ne doit conserver que les valeurs de η qui sont multiples de ε, soit $\eta = m\varepsilon$; l'intégrale $\int w d\eta$, généralement nulle, est égale à 1 si on l'étend à un petit intervalle comprenant une de ces valeurs exceptionnelles ; la formule 15 devient donc :

$$\Phi = \Sigma e^{-m\alpha\varepsilon} = 1 + e^{-\alpha\varepsilon} + e^{-2\alpha\varepsilon} + \ldots,$$

c'est-à-dire :

$$\Phi = \frac{1}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}};$$

on en déduit par la formule (17) :

$$Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}.$$

C'est la formule de Planck.

§ 8. — Nécessité de l'hypothèse de Planck.

Nous pouvons maintenant répondre à la question que nous nous étions posée au début.

Lorsque la loi qui lie Y à X est déterminée, la dérivée logarithmique $\frac{\Phi'}{\Phi}$ l'est également ; il en est donc de même de la fonction Φ à un facteur constant près et par conséquent [par la formule (16)] de w. *L'hypothèse des quanta est donc la seule qui conduise à la loi de Planck.*

Mais une loi expérimentale n'est jamais qu'approximative; ne pourrait-on imaginer des lois dont les différences avec celle de Planck seraient inférieures aux erreurs d'observation et qui conduiraient à une fonction w continue? Si la fonction w est continue, je dis que Φ est nul pour $\alpha = \infty$, c'est-à-dire à basse température. En effet, w qui représente une probabilité est essentiellement positive, il en résulte que l'intégrale (15) décroît quand α croît, puisque tous ses éléments décroissent. Soit $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$ et η_0 une valeur quelconque, il viendra :

$$\Phi = \int_0^{\eta_0} w e^{-\alpha\eta} d\eta + \int_{\eta_0}^{\infty} w e^{-\alpha\eta} d\eta.$$

La première intégrale est plus petite que $\int_0^{\eta_0} w d\eta$, la seconde est plus petite que :

$$e^{-\alpha'\eta_0} \int_{\eta_0}^{\infty} w e^{-\alpha_0\eta} d\eta < e^{-\alpha'\eta_0} \Phi(\alpha_0),$$

d'où :

$$\Phi(\alpha) < \int_0^{\eta_0} w d\eta + e^{-\alpha'\eta_0} \Phi(\alpha_0),$$

et comme α' tend vers l'infini en même temps que α, on aura :

$$\Phi(\infty) < \int_0^{\eta_0} w d\eta.$$

$\Phi(\infty)$ est la limite vers laquelle tend la fonction décroissante $\Phi(\alpha)$ quand α tend vers l'infini ; si donc Φ n'est pas nul, c'est que l'intégrale

du second membre de notre inégalité ne tend pas vers zéro avec η_0. Cela n'est pas possible si la fonction w est continue ou même finie; il faudrait au contraire que cette fonction présentât, pour $\eta = 0$, précisément le même genre de discontinuité que dans l'hypothèse de Planck.

Si $\Phi(\infty) = 0$, cela veut dire que l'intégrale :

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)}\, d\alpha$$

est infinie ; la fonction sous le signe $\int$ peut devenir nulle pour $\alpha = \infty$, mais au plus comme $\frac{1}{\alpha}$; si elle devenait nulle comme $\frac{1}{\alpha^k}$, où $k > 1$, l'intégrale serait finie. Pour aller plus loin, rappelons quelques-uns des principes de la théorie du rayonnement. D'après la loi de Wien, l'énergie du rayonnement noir, entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$, est représentée par la formule :

$$u_\lambda d\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda^5} F(\lambda T),$$

où T est la température absolue. D'autre part, si nous désignons par ν la fréquence et par $u_\nu d\nu$ l'énergie de rayonnement comprise entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, M. Planck a démontré (Acad. de Berlin, *Sitzungsber.*, 1899, p. 461 ; *Physik. Zeitschrift*, 1900-1901) que l'on a :

$$u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda = K\nu^2 Y d\nu, \tag{18}$$

où K est un coefficient numérique et où Y représente comme plus haut l'énergie moyenne des résonnateurs de longueur d'onde λ. On en déduit :

$$Y = \frac{u_\nu}{K\nu^2} = \frac{u_\lambda}{K\nu^2}\frac{d\lambda}{d\nu} = K' u_\lambda \cdot \lambda^4 = \frac{K' F(\lambda T)}{\lambda}.$$

Or T n'est autre chose que X, en supposant les unités convenablement choisies et $X = \frac{1}{\alpha}$. On a donc, d'après (17) :

$$Y d\alpha = -d \log \Phi(\alpha), \qquad Y dX = X^2 d \log \Phi,$$

ou

$$K' \frac{F(\lambda X)\, dX}{\lambda X^2} = d \log \Phi.$$

Dans cette relation, on suppose que λ est une constante ; elle nous montre que le premier membre ne change pas quand on change X en μX et λ en $\frac{\lambda}{\mu}$, μ étant une constante quelconque : donc Φ est fonction de λX, et on a en regardant maintenant λ et X comme variables :

$$K' \frac{F(\lambda X)\,(\lambda dX + X d\lambda)}{\lambda^2 X^2} = d \log \Phi,$$

ou si X est regardé comme constant :

$$K' \frac{F(\lambda X)\, d\lambda}{\lambda^2 X} = d \log \Phi,$$

ou enfin :

$$u_\lambda d\lambda = \frac{K'}{X} \frac{d \log \Phi}{\lambda^3}.$$

Le rayonnement total est alors :

$$\int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \frac{X}{K'} \int \frac{d \log \Phi}{\lambda^3}.$$

Si la fonction w était continue, Φ s'annulerait et $\log \Phi$ deviendrait infini pour $\alpha = \infty$, c'est-à-dire pour $\lambda X = 0$; la fonction sous le signe $\int$ devient donc infinie pour $\lambda = 0$, et cela de telle façon que $\int d \log \Phi$ ou *a fortiori* que

$$\int \frac{d \log \Phi}{\lambda^3}$$

devienne infinie.

Donc, quelle que soit la loi du rayonnement, si l'on suppose que le rayonnement total est fini, on sera conduit à une fonction w présentant des discontinuités analogues à celles que donne l'hypothèse des quanta.

Cela suppose toutefois l'exactitude de la formule (18), et sur ce point des doutes restent permis, puisque M. Planck n'a pu l'établir

qu'en s'appuyant sur les principes de l'Électrodynamique classique, que sa théorie a précisément pour objet de remplacer.

§ 9. — La deuxième théorie de M. Planck.

On sait que M. Planck a proposé une seconde théorie un peu différente de la première. Dans sa première théorie les résonnateurs ne peuvent émettre ni absorber d'énergie que par bonds; dans la seconde, ils ne peuvent en émettre que par bonds, mais ils peuvent en absorber d'une manière continue. Dans cette théorie nouvelle, M. Planck pose :

$$Y = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{e^{\frac{\varepsilon}{x}}+1}{e^{\frac{\varepsilon}{x}}-1},$$

d'où :

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = -\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{e^{\alpha\varepsilon}+1}{e^{\alpha\varepsilon}-1} = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon}-1},$$

et :

$$\Phi(\alpha) = \frac{e^{-\alpha\frac{\varepsilon}{2}}}{1-e^{-\alpha\varepsilon}} = e^{-\frac{\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{3\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{5\alpha\varepsilon}{2}} + \ldots$$

En se reportant à la formule (15), on voit que cela veut dire que w est nul, sauf pour des valeurs exceptionnelles pour lesquelles il est infini et que ces valeurs exceptionnelles sont les multiples impairs de $\frac{\varepsilon}{2}$. Ce n'est pas là l'hypothèse d'où M. Planck était parti; si en effet, l'énergie d'un résonnateur devait toujours être un multiple impair de $\frac{\varepsilon}{2}$, il serait impossible que ce résonnateur absorbât de l'énergie d'une manière continue.

Il serait curieux de rechercher comment deux raisonnements en apparence identiques ont pu conduire dans un cas à un résultat exact, dans un autre à un résultat inexact. J'observerai seulement que dans son raisonnement M. Planck ne fait pas intervenir les échanges d'énergie par choc, mais seulement par émission et absorption.

§ 10. — JUSTIFICATION DES HYPOTHÈSES RESTRICTIVES.

Nous avons, pour simplifier et surtout pour fixer les idées, fait un certain nombre d'hypothèses assez particulières et un peu restrictives; on peut se demander si elles jouent un rôle essentiel, auquel cas leur caractère artificiel pourrait éveiller de la méfiance. Nous avons d'abord supposé que, dans le cas simple de deux résonnateurs, le dernier multiplicateur $W(\xi, \eta)$ ne dépendait pas de ξ; nous avons vu ensuite que, sans faire aucune hypothèse restrictive, on devrait avoir dans tous les cas :

$$W(\xi, \eta) = w(\eta)\, w_1(\xi);$$

posons alors par une formule analogue à (15) :

(15 *ter*) $$\Phi_1(\alpha_1) = \int_0^\infty w_1(\xi)\, e^{-\alpha_1 \xi} d\xi.$$

Nous aurons alors

(en posant $\Sigma\xi = y$, $\Sigma\eta = x$, $x + y = \Sigma\xi + \Sigma\eta = h$) :

$$M = \int \Phi^n(\alpha)\, \Phi_1{}^p(\alpha_1)\, e^{\alpha x} e^{\alpha_1 (h-x)}\, dx d\alpha d\alpha_1.$$

Nous poserons alors :

$$x = n\omega, \qquad h - x = p\omega_1, \qquad \omega = \frac{h}{n} - k\omega_1,$$

et nous aurons à un *même* facteur constant près :

$$M = \int \Phi^n(\alpha)\, \Phi_1{}^p(\alpha_1)\, e^{n\alpha\omega} e^{p\alpha_1\omega_1} d\omega d\alpha d\alpha_1;$$

$$MY = \int \omega \Phi^n \Phi_1{}^p e^{n\alpha\omega} e^{p\alpha_1\omega_1} d\omega d\alpha d\alpha_1; \quad MX = \int \omega_1 \Phi^n \Phi_1{}^p e^{n\alpha\omega} e^{p\alpha_1\omega_1} d\omega d\alpha d\alpha_1.$$

Nous verrions alors que l'on a :

$$Y = \omega, \qquad X = \omega_1 = \frac{h}{p} - \frac{\omega}{k},$$

en donnant à ω, α et α_1 les valeurs qui rendent maximum l'expression :

$$\Phi(\alpha)\, \Phi_1{}^k(\alpha_1)\, e^{\alpha\omega} e^{k\alpha_1\omega_1}.$$

En égalant à zéro les dérivées logarithmiques de cette expression

par rapport à α, α_1 et à ω (ω_1 étant supposée remplacée par sa valeur en fonction de ω), il vient :

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} + \omega = \frac{\Phi'_1(\alpha_1)}{\Phi_1(\alpha_1)} + \omega_1 = \alpha - \alpha_1 = 0,$$

d'où enfin les formules :

$$(17\ bis) \qquad \frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = -\,Y; \qquad \frac{\Phi'_1(\alpha)}{\Phi_1(\alpha)} = -\,X,$$

qui peuvent remplacer les formules (17). D'où la loi suivante pour la partition de l'énergie.

A chacun des résonnateurs est attachée une certaine fonction $\Phi(\alpha)$, et son énergie moyenne à une température donnée est représentée par $-\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)}$, α étant une fonction de la température, qui est la même pour tous les résonnateurs; or l'expérience nous apprend qu'il y a des corps dont l'énergie est proportionnelle (nous dirons égale en choisissant convenablement les unités) à la température absolue; et que cela arrive en particulier pour les résonnateurs à très longue période.

Dans les formules (17 *bis*), X et Y sont exprimés en fonction d'une variable auxiliaire α.

Supposons que nous connaissions par l'expérience la relation entre X et Y; nous pourrions choisir arbitrairement l'une des fonctions Φ ou Φ_1, c'est-à-dire l'une des relations (17 *bis*); l'autre s'en déduirait. Il est clair que ce choix pourrait toujours être fait de telle sorte que les intégrales :

$$\int^{\infty} X d\alpha, \qquad \int^{\infty} Y d\alpha,$$

soient infinies, c'est-à-dire de telle façon que w et w_1 soient des fonctions continues; mais ce serait renoncer à l'hypothèse $w_1 = 1$. Qu'en résulterait-il ?

Les chocs entre les atomes (résonnateurs à longue période) seraient alors régis, au point de vue de la Mécanique statique, par l'intégrale :

$$\int w_1(\xi_1)\, w_1(\xi_2) \ldots w_1(\xi_p) d\tau,$$

qui jouerait le rôle de l'intégrale M dans l'analyse précédente. On retrouverait pour ces atomes la loi d'équipartition; mais on devrait

renoncer à la loi de Maxwell pour la distribution des vitesses; les chocs entre atomes ne pourraient plus se faire d'après les lois ordinaires de la Mécanique, et en particulier *d'après la loi de la conservation des quantités de mouvement.* Ces conséquences ne semblent guère admissibles et il paraît préférable de supposer $w_1 = 1$.

Les formules (17), appliquées à deux résonnateurs à courte période montrent que la loi de partition ne sera pas altérée, si des chocs se produisent non pas entre un résonnateur à longue et un autre à courte période, mais entre deux résonnateurs de périodes différentes, mais courtes.

Au lieu des résonnateurs simples de M. Planck, nous pourrons aussi avoir des systèmes plus compliqués; alors W, en supposant deux systèmes, pourra dépendre non seulement des énergies ξ et η, mais d'autres variables ξ', ξ'', ..., relatives au premier système, et d'autres encore η', η'', ..., relatives au second système. On devra avoir d'ailleurs pour les raisons exposées plus haut :

$$W = w(\eta, \eta', \eta'', \ldots)\, w_1(\xi, \xi', \xi'', \ldots).$$

L'ensemble des systèmes satisfait à l'intégrale des forces vives :

$$\Sigma\xi + \Sigma\eta = h.$$

Je n'en suppose pas d'autre; j'envisage alors l'intégrale :

$$u(\eta) = \int w(\eta, \eta', \eta'', \ldots)\, d\eta' d\eta'' \ldots$$

étendue à toutes les valeurs que peuvent prendre les variables η', η'', ...; alors $u(\eta)$ et la fonction analogue $u_1(\xi)$ formée avec w_1 joueront le même rôle que nous avions donné à $w(\eta)$ et $w_1(\xi)$, nous pourrons poser (s'il y a $n + p$ systèmes) :

$$U = u(\eta_1)\, u(\eta_2) \ldots u(\eta_n)\, u_1(\xi_1)\, u_1(\xi_2) \ldots u_1(\xi_p); \qquad M = \int U d\sigma d\tau;$$

$$MY = \int \eta_1 U d\sigma d\tau; \qquad MX = \int \xi_1 U d\sigma d\tau,$$

et notre analyse pourra se poursuivre jusqu'au bout sans changement

Après avoir formé le dernier multiplicateur, il conviendrait de chercher des équations différentielles qui admettent ce dernier multiplicateur, ou de voir quelles sont les équations à sauts brusques qui pourraient jouer le rôle de ces équations différentielles quand le

dernier multiplicateur w n'est pas continu. C'est là un problème qui ne serait sans doute pas sans difficulté. Je ne m'en occuperai pas pour le moment.

Rappelons en terminant que les échanges d'énergie peuvent se faire de deux manières : par le jeu du principe de Döppler-Fizeau et par les chocs. Dans cet article, nous n'avons étudié que la seconde manière. Je reviendrai sur la première dans un autre article ; mais je dois faire observer que, *si l'on admet la possibilité des chocs*, les deux manières doivent conduire à la même loi de partition, sans quoi le second principe de la thermodynamique serait en défaut. C'est ce qui m'a permis de me borner à l'étude d'un seul mode d'échange.