Sur les allongements par flexion

Bouasse, Berthier

SUR LES ALLONGEMENTS PAR FLEXION ;

Par MM. BOUASSE et BERTHIER.

1. Quand on cherche à allonger un fil raide soit par *traction simple*, soit par *flexion*, on rencontre le curieux paradoxe suivant : *Un fil qu'on ne peut allonger d'un millième par traction simple sans qu'il ne casse se laisse aisément allonger de* 10, *de* 20 0/0... *par flexion*. Il semble que des allongements notables soient particulièrement difficiles à obtenir en utilisant des déformations *homogènes*, et qu'au contraire la déformation *successive et continue* de parties voisines puisse être obtenue plus aisément. C'est ce phénomène que nous nous proposons d'étudier.

2. *Courbe de traction ordinaire.* — Les discussions qui suivent ont pour base la courbe ordinaire de traction. Elle a généralement la forme

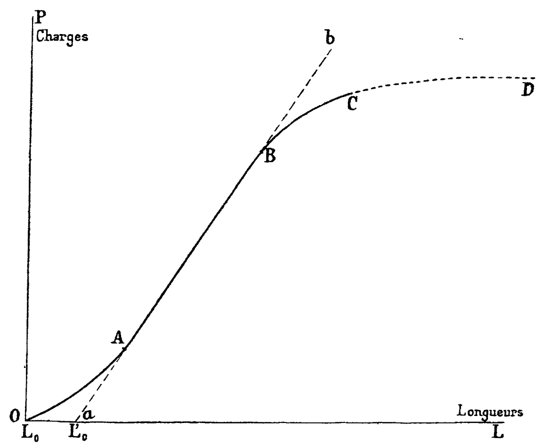

Fig. 1.

ci-contre (*fig.* 1). Après une partie OA nettement courbe et qui doit être attribuée à la rectification du fil, on parcourt une partie sensiblement rectiligne AB qui se réduit souvent à une tangente d'inflexion [1] ; enfin la courbe s'arrondit suivant BCD. La rupture arrive

[1] Le module de traction E est donné par l'inclinaison de la portion presque rectiligne AB. Avec un fil, elle se réduit le plus souvent à une tangente d'inflexion

en un point C dont la position dépend essentiellement de l'homogénéité du fil, de la manière de l'attacher et généralement de circonstances à peu près impossibles à définir. Les expériences qui suivent tendent à prouver que, *même pour le fil le plus raide*, l'allongement indéfini ne serait pas impossible, si ces causes de rupture, qui n'ont rien de nécessaire, pouvaient être écartées. Les fils raides (fortement étirés à la filière par exemple) seraient simplement caractérisés par une courbure très brusque au voisinage du point B et une presque rectilinéité de la partie BCD, les fils mous (recuits par exemple) par un arrondissement très doux de toute la courbe de traction.

Le fil utilisé dans les expériences actuelles est du fer aciéreux fortement étiré à la filière et de 1.180 μ environ de diamètre; l'aire de sa section droite est donc voisine de $1^{mm^2},094$. Nous avons déterminé grossièrement l'allongement le plus grand qu'il pouvait supporter sans rupture avec un levier dont il est inutile de donner le détail. Nous avons trouvé qu'il cassait toujours pour une charge inférieure à 80 kilogrammes et un allongement permanent inférieur à un millième.

Nous en avons alors enroulé et déroulé systématiquement des bouts sur des cylindres de fer d'axe horizontal. Nous faisions varier le diamètre 2R du cylindre, la charge P sous laquelle l'enroulement et le déroulement s'opéraient. Nous avons obtenu les résultats suivants.

3. Soit L_1 la longueur du fil avant l'enroulement, L_2 après le déroulement; n, le nombre de tours dont il faut tourner le cylindre pour enrouler ou dérouler le bout de fil sur lequel on expérimente. On peut écrire :

$$2\pi n(R+\varepsilon_1)=L_1,\qquad 2\pi n(R+\varepsilon_2)=L_2\,;\qquad L_2-L_1=2\pi n(\varepsilon_2-\varepsilon_1).$$

ε_1 et ε_2 mesurent les distances au cylindre des fibres *neutres* d'enroulement ou de déroulement. Par *fibre* il faut entendre un cylindre élémentaire purement géométrique auquel on ne suppose aucune autonomie physique. La fibre *neutre* est celle qui, dans l'enroulement ou le déroulement, ne change pas de longueur. Les longueurs L_1 et L_2, généralement comprises entre 150 et 200 centimètres, sont mesurées au millimètre près sur une règle verticale; n est connu au centième de tour. On s'arrange pour que, dans l'enroulement ou le déroulement, le fil ne puisse se tordre.

de direction douteuse; aussi emploie-t-on généralement pour mesurer E des barres tournées qui sont à peu près rectilignes pour les charges nulles. Il est cependant impossible d'éviter, même par cet artifice, les phénomènes de réactivité qui se superposent toujours à l'élasticité parfaite.

Utilisons d'abord un certain cylindre, faisons varier la charge P et le nombre m d'opérations ; déterminons en fonction de ces variables l'allongement $L_2 - L_1$ dû à un enroulement suivi d'un déroulement.

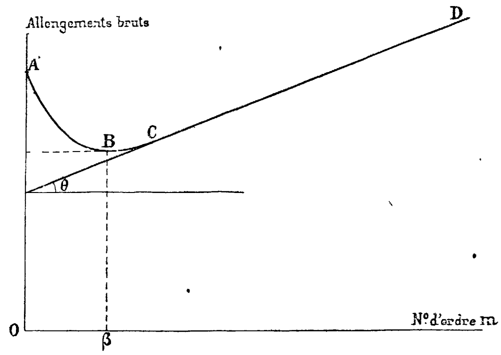

FIG. 2.

En fonction du numéro m de l'opération, la courbe obtenue est représentée *fig.* 2. Il y a diminution de l'allongement pour les premières opérations et augmentation pour les opérations ultérieures ; le nombre $m = O\beta$, qui correspond au minimum, est d'autant plus petit que la charge est plus grande et le rayon R plus petit. L'inclinaison θ de la partie CD de la courbe croît à mesure que la charge croît et que le rayon R du cylindre diminue.

A mesure que m augmente, la longueur du fil augmentant, les allongements bruts ne sont plus rapportés à la même longueur initiale. En les rapportant à une même longueur initiale, on obtient une courbe de même allure, mais dont la branche CD est approximativement horizontale.

Voici quelques nombres pour fixer les idées : $R = 1$ centimètre environ ; le diamètre du fil est 1.180 μ environ ; on donne les allongements dans les opérations successives en millièmes de la longueur au début de chaque opération.

Poids P = 5^k	Allongements =	4	4	3	3	3	3	3	3
10^k		13	11	10	10	11	11	11	11
20^k		33	29	30	31	32	33		
30^k		52	48						

L'allongement croît plus vite que le poids tenseur; il s'annule sensiblement quel que soit le rayon R, si la charge est nulle. Toutefois, pour des raisons que nous ne pouvons étudier ici et qui sont développées dans un autre travail (*Sur l'enroulement des fils et les ressorts à boudin*, n° 6, *Annales de Toulouse*), la tension réelle du fil est très inférieure à la charge, tant que celle-ci reste petite. Peut-être existerait-il une proportionnalité plus exacte entre la tension réelle et l'allongement.

On remarquera l'énormité des allongements obtenus par enroulement et par déroulement, c'est-à-dire par flexions successives dans deux sens contraires. Sous 20 kilogrammes, un fil, qui ne peut sans casser s'allonger de plus d'un millième par traction directe, a passé en huit opérations de $154^{cm},1$ à $191^{mc},0$; soit un allongement de $36^{cm},9$, ce qui correspond à 24 0/0 de la longueur initiale. En deux opérations sous 30 kilogrammes, le fil s'allonge de 10 0/0 de sa longueur initiale.

4. *Allongement en fonction du rayon du cylindre d'enroulement.* — Représentons en abscisses la courbure du cylindre d'enroulement $\chi = 1 : R$ et en ordonnées les allongements moyens sous une charge P donnée pour un nombre fixe d'opérations. On obtient des

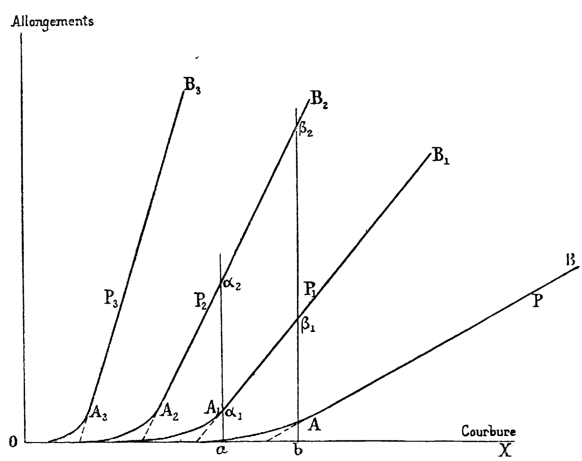

FIG. 3.

courbes formant un faisceau représenté *fig.* 3. Chaque courbe correspond à une charge invariable P.

Quelle que soit la courbure, l'allongement est à peu près nul pour

$P = o$; l'axe des χ est donc une des courbes du faisceau. Pour une charge suffisante, l'allongement est énorme quelle que soit la courbure ; l'axe des ordonnées est donc une courbe (évidemment limite) du faisceau.

Il résulte de la forme du faisceau que l'effet relatif d'un accroissement de charge diminue à mesure que la courbure augmente. Cette règle se traduit par l'inégalité évidente $a\alpha_2 : a\alpha_1 > b\beta_2 : b\beta_1$.

La comparaison que nous faisons se traduirait par des nombres assez arbitraires, puisque la loi d'allongement en fonction du numéro d'ordre de l'opération dépend de la charge et de la courbure du cylindre. Le faisceau (*fig.* 3) dépend donc du nombre m fixe d'opérations que l'on choisit : il diffère notablement suivant qu'on se borne à la première ou qu'on élimine cette opération qui donne toujours des allongements plus forts.

5. *Position de la fibre neutre. — Tensions faibles.* — Pour aller plus loin, il faut connaître le rayon R du cylindre d'enroulement et le nombre n de tours. La détermination de R s'effectue en enroulant d'un nombre n de tours un fil *très fin*, de diamètre δ connu au moins approximativement, sous une charge juste suffisante pour le tendre ; on détermine la longueur L enroulée à l'aide d'un cathétomètre. Les résultats précédents permettent d'écrire :

$$2\pi n\left(R + \frac{\delta}{2}\right) = L.$$

La mesure de R se fait ainsi avec une précision plus que suffisante.

Que pouvons-nous d'abord conclure du fait que, *sous tension faible*, il n'y a pas d'allongement permanent sensible, même si le diamètre du cylindre n'est que dix fois le diamètre du fil ?

Avant l'enroulement, toutes les fibres ont la longueur L_1. Pendant l'enroulement, la fibre *intérieure* (au contact du cylindre) prend la longueur $l_i = 2\pi n R$; la fibre extérieure prend la longueur $l_e = 2\pi n\,(R + \delta)$, où δ est le diamètre du fil ; enfin on a par définition :

$$L_1 = 2\pi n\,(R + \varepsilon_1), \qquad L_2 = 2\pi n\,(R + \varepsilon_2).$$

Poser $L_1 = L_2$ revient à poser $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, et en toute rigueur ne nous apprend rien sur les valeurs séparées de ε_1 et de ε_2. Mais supposer que la fibre *neutre* ne coïncide pas, pendant l'enroulement, avec la fibre *moyenne*, entraîne l'hypothèse d'une difficulté inégale de déformation permanente par allongement ou par raccourcissement; cette dissymétrie devrait se retrouver *avec le même sens* pendant le déroulement : d'où un allongement ou un raccourcissement. Il semble donc que la condition $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ne puisse être satisfaite qu'avec la condition supplémentaire $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta : 2$. La fibre neutre coïncide avec la fibre moyenne. L'expérience directe qui permet de mesurer séparément ε_1 et ε_2 confirme ce raisonnement.

Cette égale facilité des allongements et des raccourcissements permanents, exacte pour le fil dont nous nous servions, n'est pas nécessairement réalisée dans tous les cas; on voit par ce qui précède comment on peut étudier le phénomène.

L'allongement ou le raccourcissement relatif des fibres extrêmes sous tension faible est donc sensiblement égal à $\delta : 2R$; il est par conséquent énorme et égal à 5 0/0 dans le cas d'un fil de 1 millimètre de diamètre enroulé sur un cylindre de 1 centimètre. Il est intéressant qu'on puisse, dans ces conditions, enrouler et dérouler un grand nombre de fois sous tension faible sans amener la rupture.

6. *Position de la fibre neutre. — Tensions fortes.* — Le résultat des expériences est contenu dans la règle suivante : *il y a symétrie à peu près parfaite entre l'enroulement et le déroulement.* Comme les diamètres δ_1 et δ_2 du fil avant l'enroulement et après le déroulement sont différents, cette symétrie se traduit par la relation :

$$\frac{\varepsilon_1}{\delta_1} + \frac{\varepsilon_2}{\delta_2} = 1.$$

Pour fixer les idées, nous donnons dans le tableau suivant une série effectuée avec un cylindre de 1 centimètre de diamètre. Pour rendre les comparaisons plus aisées, nous avons calculé les quantités :

$$\psi_1 = \frac{\varepsilon_1}{\delta_1}\frac{\delta_1+\delta_2}{2}, \qquad \psi_2 = \frac{\varepsilon_2}{\delta_2}\frac{\delta_1+\delta_2}{2}.$$

Charges	ψ_1	ψ_2	$\psi_1 + \psi_2$	$\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$
5^k	555^μ	586^μ	1.141^μ	1.184^μ
10	523	616	1.139	1.182
20	468	662	1.130	1.176
30	418	716	1.134	1.174

La symétrie n'est pas parfaite; la somme $\psi_1 + \psi_2$ est légèrement inférieure à $(\delta_1 + \delta_2) : 2$; toutefois, il ne faut pas oublier qu'il s'agit de centièmes de millimètre, et que, la flexion se faisant tantôt à partir d'une droite pour arriver à la forme circulaire, tantôt à partir d'un cercle pour arriver à la forme rectiligne, une égale difficulté de déformation par allongement ou raccourcissement ne peut pas se traduire exactement par la relation donnée plus haut entre ε_1 et ε_2. Mais nous ne pouvons insister.

7. *Modification de la matière par enroulement ou déroulement.* — On peut donc obtenir par enroulement et déroulement des allongements énormes avec un fil qui, par traction simple, casserait sans allongement sensible. Il est naturel de se demander si ce sont là de véritables déformations permanentes, ou s'il se produit des failles, des brisures, comme on en constate dans certains cas sur les parties extérieures de matières trop fortement fléchies.

L'étude micrographique de la surface ne fournit à ce sujet rien de bien concluant. Nous avons étudié la variation du module de torsion du fil après des enroulements et déroulements systématiques. On sait depuis Coulomb que les modules sont à peine modifiés par les déformations permanentes, mais on peut admettre que des failles, des brisures intérieures ne les laisseraient pas invariables.

La méthode consiste à suspendre un oscillateur au fil déroulé et à déterminer la durée T d'oscillation. Le module de rigidité μ est proportionnel à $L : \delta^4 T^2$. Soit p le poids du fil en expérience; de l'hypothèse de l'invariabilité de la densité, on conclut que le module μ est proportionnel à $L^3 : T^2 p^2$. La longueur L du fil en expérience, son poids total p et la durée d'oscillation sont aisément mesurés.

Toutefois, dans l'allongement sous charge forte, le fil devient légèrement elliptique. Il n'est plus possible d'appliquer la formule $C = \mu\pi\delta^4 : 32L$ donnant le couple de torsion par radian; il faut utiliser la formule plus complexe :

$$C' = \frac{\mu\pi}{L}\,\frac{A^3B^3}{A^2 + B^2},$$

où A et B sont les axes de la section droite elliptique.

Comme on mesure le poids du fil et sa longueur, c'est-à-dire en définitive l'aire de la section droite, il est avantageux de la mettre en évidence dans les formules. On obtient :

$$C = \frac{\mu s^2}{2\pi L} \qquad C' = \frac{\mu s^2}{2\pi L} \cdot \left[2 : \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)\right].$$

Posons $2A = \delta + \varepsilon$, $2B = \delta - \varepsilon'$; on a très exactement $C = C'$, tant qu'on peut négliger les termes en $(\varepsilon : \delta)^2$ et $(\varepsilon' : \delta)^2$. Or, dans nos expériences, $\varepsilon + \varepsilon'$ est de l'ordre de 10 à 20 microns pour un diamètre moyen de 1.100 microns. On a donc $C = C'$ avec une approximation très supérieure aux erreurs sur la mesure des couples.

Voici d'abord une expérience qui prouve une modification de la matière du fil par enroulement et déroulement. Cinq fils sont pris sur le paquet. Les fils 1, 3, 5 sont essayés immédiatement; les fils 2, 4 sont enroulés et déroulés une fois sur un cylindre de 1 centimètre de diamètre. On trouve en unités arbitraires, pour les premiers, $\mu = 331$, 331, 332; pour les seconds, $\mu = 308$, 307. Il ne faut cependant pas se hâter de conclure à l'existence de failles et de brisures.

Voici les résultats obtenus avec des fils différents, un enroulement et un déroulement sur le même cylindre et des charges de plus en plus grandes.

Kilogrammes. .	5	20	30	35	40
μ	311	316	320	323	322

μ croît donc régulièrement à mesure que la charge et par conséquent l'allongement croissent.

D'autre part, enroulons et déroulons plusieurs fois sur le même cylindre et avec la même charge. Voici les résultats pour 1 centimètre de diamètre et 5 kilogrammes :

Nombre d'opérations .	1	5	10
μ	311	310	311

Voici maintenant pour 20 kilogrammes :

Nombre d'opérations .	1	5
μ	316	318

Voici enfin pour un cylindre de $0^{cm},8$ de diamètre et 10 kilogrammes :

Nombre d'opérations . .	1	5
μ	312	310

Il semble presque inadmissible que, d'une part, les failles et brisures ne produisent aucune modification du module μ, et que, d'autre part, elles n'augmentent pas à mesure que le nombre des opérations croît. La première opération produit des effets particuliers ; nous le savions déjà par les résultats du paragraphe 3.

La possibilité d'obtenir par flexion des allongements impossibles à produire par traction simple étonne moins quand on réfléchit aux effets obtenus avec la filière ou le laminoir. Il est vrai que, dans ces deux derniers cas, le métal est *soutenu*, tandis qu'il l'est à peine dans l'enroulement ou le déroulement.

En définitive, la rupture d'un fil par traction simple ne provient pas d'une impossibilité organique de s'allonger, mais de son défaut d'homogénéité soit géométrique, soit matérielle. Quand les déformations se font points par points, les effets de cette hétérogénéité disparaissent à peu près complètement [1].