
SUR L'AMORTISSEMENT DES TRÉPIDATIONS DU SOL PAR LES SUSPENSIONS EN CAOUTCHOUC ;

Par M. H. BOUASSE.

1. A l'occasion d'un travail d'ensemble sur les modules d'élasticité de traction du caoutchouc vulcanisé, qui paraîtra prochainement dans les *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* (1), je me suis trouvé devant le problème de l'amortissement des trépidations du sol par les suspensions en caoutchouc. Ramené à la plus grande sim-

(1) *Sur les modules d'élasticité de traction du caoutchouc vulcanisé*, t. VI. Ce mémoire fait suite à deux mémoires publiés dans le tome V : *Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé* et *Sur la réactivité du caoutchouc vulcanisé.*

plicité, il correspond à l'expérience suivante : *un diapason* AB (*fig.* 1) *est entretenu électriquement ; il impose à l'extrémité supérieure* E *du fil de caoutchouc une oscillation verticale d'amplitude donnée. On demande quelle est l'amplitude de l'oscillation d'une masse* FG *librement suspendue à l'extrémité inférieure* F.

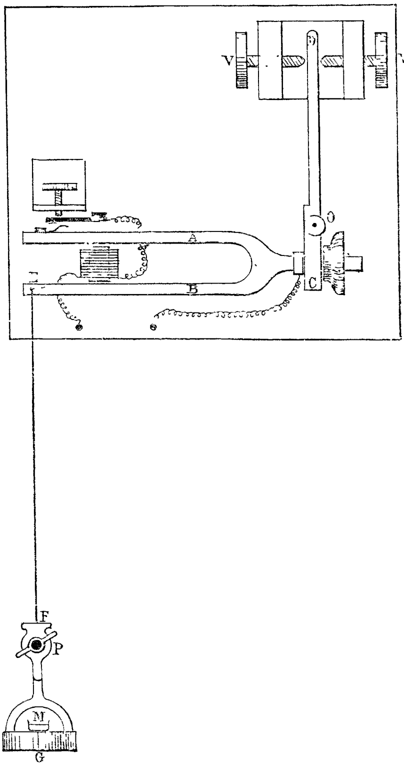

FIG. 1.

L'expérience est facilement réalisable : j'emploie un diapason faisant 50 oscillations par seconde, entretenu électriquement à la manière habituelle. Pour qu'en oscillant il ne butte pas contre l'électro-aimant, même lorsque la masse G est égale ou supérieure à 1 kilogramme, il est nécessaire de modifier le procédé par lequel il est ordinairement fixé à la planche qui lui sert de support. On rend la pièce de fonte sur laquelle il est vissé mobile autour de l'axe O, et on la termine par une barre rigide OD dont l'extrémité est prise entre deux vis V, qui permettent d'en faire varier et d'en fixer exactement la position. On peut ainsi régler le diapason bien symétriquement par rapport à l'électro, quelle que soit la charge G.

Il ne faut pas croire que la forte tension qui s'exerce seulement sur une des branches du diapason gêne son mouvement; il est paradoxal, mais de tous points conforme à la théorie, qu'une petite masse collée contre l'une des branches provoque des battements, tandis qu'une tension d'un ou de plusieurs kilogrammes ne modifie en rien le mouvement et l'égalité de période des deux branches. Il serait trop long d'expliquer les raisons d'un phénomène que chacun pourra vérifier.

L'extrémité supérieure du caoutchouc est attachée à une vis V qui retient ordinairement le petit triangle de clinquant avec lequel on se rend compte de l'amplitude des oscillations du diapason. Pour que le caoutchouc s'applique exactement contre la vis, on le tend avec les doigts et on le lie très près de la vis avec du fil métallique; on l'abandonne à lui-même et on coupe le bout inutile au ras de la ligature. J'utilise le caoutchouc que j'ai constamment employé dans mes recherches : c'est une corde ronde, pure gomme et soufre, de 4 millimètres de diamètre.

L'extrémité inférieure est prise dans une pince qui supporte, par l'intermédiaire d'un étrier, une masse de plomb; sur cette masse repose un très petit cristallisoir à demi plein de mercure dont la surface servira à déceler les vibrations transmises. On regarde par réflexion sur elle une source lumineuse lointaine.

Ceci posé, je vais rappeler brièvement la théorie qui est ordinairement admise : elle est empruntée à Helmholtz et se trouve dans les suppléments VIII et IX de la *Théorie physiologique de la musique*. Dans la pensée de l'auteur, elle ne s'applique qu'à des phénomènes de résonance très différents de ceux que j'étudie ici. Il en a fait le plus intéressant et le plus remarquable usage dans sa théorie de l'oreille et pour l'entretien d'un diapason par un autre diapason. La théorie proposée beaucoup plus récemment par Cornu pour résoudre le problème de l'entretien des horloges n'en diffère pas; l'originalité du travail de Cornu réside plutôt dans l'étude de la solution pratique que dans une théorie qui était connue depuis longtemps. Enfin elle a été reprise plus récemment par M. Hamy pour l'étude du problème même que je traite; je me propose précisément de montrer qu'elle ne s'applique en aucune manière aux suspensions en caoutchouc, et qu'elle n'est admissible que dans des appareils très particuliers et comme cas limite.

2. Soit $y = A \sin \omega t$ l'équation du mouvement du point E ; soit M la masse suspendue, qui est sollicitée simultanément par son poids, la tension moyenne du caoutchouc et la variation de cette tension. Les deux premières forces s'annulent et n'entrent pas dans les équations. Soit $x = a \sin (\omega t - \varepsilon)$ le mouvement de l'extrémité F et, par conséquent, de la masse M. Nous admettons qu'*un ébranlement se transmet d'un bout à l'autre du fil dans un temps très petit vis-à-vis de la période* T *de la vibration imposée à l'extrémité supérieure.* Cette hypothèse est, comme nous le verrons, grossièrement erronée pour le caoutchouc ; c'est précisément pourquoi la théorie ne s'applique pas. Pour simplifier, les frottements seront supposés proportionnels à la vitesse des déformations, hypothèse qui a toutes les chances d'être inexacte, mais dont la fausseté est sans grande importance dans le cas présent. Soit $\mathcal{C}$ la constante de traction *pour l'état actuel de tension et d'allongement du fil*, c'est-à-dire le coefficient par lequel il faut multiplier l'allongement pour avoir la variation de la tension. Comptons les x et les y positivement vers le bas. L'équation du mouvement de l'extrémité inférieure est :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \mathcal{C}(x - y) + f \frac{dx}{dt} \quad f_1 \frac{dy}{dt} = 0.$$

Les conditions que doivent satisfaire a et ε sont :

$$a(\mathcal{C} - M\omega^2) \cos \varepsilon + fa\omega \sin \varepsilon = \mathcal{C}A$$
$$- a(\mathcal{C} - M\omega^2) \sin \varepsilon + fa\omega \cos \varepsilon = f_1 A\omega.$$

Posons $M\omega'^2 = \mathcal{C}$; on peut écrire les conditions sous la forme :

$$aM(\omega'^2 - \omega^2) \cos \varepsilon + fa\omega \sin \varepsilon = \mathcal{C}A$$
$$- aM(\omega'^2 - \omega^2) \sin \varepsilon + fa\omega \cos \varepsilon = f_1 A\omega.$$

Je ne discuterai pas complètement ces équations, ce qui n'aurait ici aucun intérêt ; on saura que, si ω est grand vis-à-vis de ω' (c'est-à-dire si la période T d'entraînement, celle du diapason, est très petite vis-à-vis de la période T′ de l'oscillation de la masse M sous l'influence de l'élasticité du caoutchouc, quand le diapason ne fonctionne pas), il faut poser $\varepsilon = \pi$. Il vient alors :

$$\frac{a}{A} = \frac{\omega'^2}{\omega^2} = \frac{T^2}{T'^2} = \frac{\mathcal{E}}{M}\frac{T^2}{4\pi^2}.$$

C'est ce que donnent les formules (*4a*) et (*4b*) (p. 516) de la traduction française de Helmholtz ; on fera seulement attention qu'il y a une faute d'impression dans la formule (*4a*). Si le paramètre $\mathcal{E}$ est constant, l'allongement sous la charge Mg est : $L - L_0 = Mg : \mathcal{E}$.

D'où l'expression :

$$\frac{a}{A} = \frac{g}{L - L_0}\frac{T^2}{4\pi^2}.$$

Telle est la formule proposée par M. Hamy (*Soc. de Phys.*, 1er mai 1903).

3. Pour le caoutchouc, $\mathcal{E}$ est infiniment loin d'être constant : on se reportera à mon mémoire pour l'étude complète de ce paramètre. Qu'il me suffise de dire que si M, pris pour variable, augmente de 0 à la plus forte valeur que puisse supporter le caoutchouc, $\mathcal{E}$ commence par décroître, passe par un minimum, puis croît ensuite rapidement. Le quotient $\mathcal{E}$: M décroît d'abord très vite, puis reste à peu près constant dans un grand intervalle, pour croître à nouveau. D'où la conclusion que, pour avoir le meilleur amortissement, il faut charger le caoutchouc assez, mais pas trop.

Malheureusement cette théorie n'a aucun rapport avec l'expérience. *Elle suppose en effet qu'un ébranlement se transmet d'un bout à l'autre du fil dans un temps négligeable vis-à-vis de la période d'entretien.* Admettons que les vibrations du sol aient une période de l'ordre $0^s,01$, hypothèse généralement considérée comme raisonnable. La vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal dans le caoutchouc est de l'ordre de 50 mètres par seconde ; si le fil a 1 mètre de long, le temps mis à le parcourir est $0^s,02$, soit double de la période. On supposerait $T = 0^s,1$ que l'hypothèse n'en serait pas plus légitime.

A qui d'ailleurs fera-t-on croire qu'une formule puisse être exacte, où le frottement intérieur de la matière qui transmet l'ébranlement, énorme dans le cas du caoutchouc, n'intervient pas ? Qu'on réalise des ondes stationnaires avec un caoutchouc un peu long, on vérifiera que le mouvement n'est pas nul aux nœuds. Je renvoie pour l'étude de ces phénomènes à mon mémoire cité au début du présent travail.

Nous quitterons donc ce point de vue et nous construirons une théorie sur des bases toutes différentes. Elle est si simple et si naturelle qu'elle se passerait de vérifications expérimentales : il est vrai que ces vérifications abondent et contredisent la théorie qui précède.

Pour arriver d'un seul coup aux résultats, je devrais partir de l'équation différentielle :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + n \frac{\partial^3 s}{\partial^2 x \partial t},$$

où s est l'ébranlement longitudinal et v sa vitesse de propagation. Mais cette équation, qui renferme un terme amortissant, ne donnant la solution cherchée que sous forme d'une série difficile à établir, je traiterai le problème en deux parties : dans la première, je supposerai qu'il n'y a pas d'amortissement dans le fil, et j'utiliserai l'équation différentielle précédente avec la condition $n = 0$ (1'); dans la seconde, je supposerai un amortissement énorme, de manière à ne tenir compte que d'une seule réflexion de l'onde à l'extrémité du fil où se trouve la masse M. La solution exacte est intermédiaire entre les deux précédentes.

4. Soit donc s le déplacement de chaque point de la corde autour de sa position d'équilibre, x la distance au diapason du point considéré, t le temps, v la vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal. Je prends l'intégrale sous la forme :

$$(2) \qquad s = \Sigma \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \sigma\right) \sin \frac{2\pi t}{T};$$

$\lambda = vT$; les paramètres Σ et σ sont arbitraires.

Imposons au diapason une oscillation d'amplitude déterminée s_0; nous devons avoir : $s = s_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, pour $x = 0$. Cette condition, transportée dans l'intégrale, lui donne la forme :

$$(3) \qquad s = \frac{s_0}{\sin \sigma} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \sigma\right) \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Elle ne contient plus qu'une arbitraire σ que nous terminerons à l'aide de l'équation du mouvement de la masse M.

Écrivons que l'accélération de cette masse est due à la force qui résulte de la déformation du dernier élément. D'une manière générale, si P est la tension, on a d'après la définition des paramètres $\mathcal{E}$ et E :

$$dP = \mathcal{E} dL = E \frac{dL}{L} S.$$

Le paramètre E est le module ordinaire d'Young ; L est la longueur du caoutchouc et S sa section. Quand il s'agit non plus de la déformation globale, mais de la déformation du dernier élément pour lequel $x = L$, on a : $dP = - E \frac{\partial s}{\partial x} S$, avec la condition que, si $\partial s : \partial x$ est positif, la force est dirigée vers le haut. L'équation de condition pour l'extrémité inférieure du caoutchouc est donc :

$$- M \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot ES.$$

Soit maintenant p la masse de caoutchouc par unité de longueur et δ la densité : la vitesse v de propagation est donnée par la formule :

$$v = \sqrt{\frac{E}{\delta}} = \sqrt{\frac{ES}{p}}; \qquad ES = pv^2 = \frac{p\lambda^2}{T^2};$$

où λ est la longueur d'onde qui correspond à la tension actuelle du caoutchouc et à la période T. L'équation de condition est donc pour l'extrémité inférieure :

$$- MT^2 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \lambda^2 p \frac{\partial s}{\partial x}. \tag{4}$$

Écrivons que, pour $x = L$, l'intégrale (3) satisfait à l'équation (4); il vient :

$$\text{tang}\left(2\pi \frac{L}{\lambda} + \sigma\right) = \frac{p\lambda}{2\pi M}. \tag{5}$$

Soit s_1 l'amplitude de l'oscillation de la masse M ; supposons que M est grand vis-à-vis de $p\lambda$ (par exemple, dans mes expériences, M peut être de l'ordre de 1000 grammes, $p\lambda$ de l'ordre de 10 grammes). On obtient en définitive :

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{1}{\sin \sigma} \sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda} + \sigma\right) = \frac{p\lambda}{2\pi M} \frac{1}{\sin \sigma}. \tag{6}$$

5. Discutons cette solution à la lumière de l'expérience suivante. Traçons à l'encre des traits fins sur le caoutchouc. Mettons le diapason en marche, nous pouvons très aisément déterminer les positions des nœuds et des ventres : je renvoie pour le détail à mon mémoire où je traite un cas un peu différent, mais où la technique est la même. Nous constatons qu'il y a généralement un nœud auprès de la masse M. C'est ce que montre la formule (6) : s_1 est toujours petit devant s_0, *excepté lorsque sin* $\sigma = 0$. *Il n'y a donc pas nécessairement un ventre au niveau du diapason.*

Ces remarques générales énoncées, supposons que la masse M reste constante et qu'on prenne la longueur L pour variable.

s_1 est une fonction périodique de L que l'on calcule aisément avec les deux équations (5) et (6) : je ne considérerai qu'une période et ferai varier L entre 0 et $\lambda : 2$, en laissant de côté la question du signe de s_1 qui n'a aucun intérêt.

Pour $L = 0$, s_1 est grand : il devient infini pour une petite valeur de L, décroît ensuite très rapidement, varie peu pour une grande variation de L, passe par un minimum pour L voisin de $\lambda : 4$; de nouveau, s_1 varie peu pour une grande variation de L, croît enfin très vite quand L s'approche de $\lambda : 2$. Il redevient infini pour une valeur de L légèrement supérieure à $\lambda : 2$, et ainsi de suite.

En définitive, si la quantité $p\lambda : 2\pi M$ *est petite, ce qui est le cas pratique,* s_1 *est toujours extrêmement petit, sauf au voisinage des valeurs de* L *qui annulent* σ, *valeurs qui sont approximativement égales à un nombre entier quelconque de demi-longueurs d'onde.* Le calcul donne alors pour s_1 des valeurs infinies ; nous savons qu'il ne faut pas prendre ces solutions au pied de la lettre : il y a dans les hypothèses des simplifications illégitimes qui sont la cause de ces résultats *quantitativement* inadmissibles.

Pratiquement, quand la longueur L n'est pas voisine d'un nombre entier de demi-longueurs d'onde, s_1 est très petit. L'amplitude s_1 est minima quand L est un nombre impair de quarts de longueur d'onde; il y a alors un ventre sur le diapason et un nœud au niveau de la masse M. Quand au contraire L est un nombre entier de demi-longueurs d'onde, il doit exister simultanément un nœud au voisinage de la masse M et un nœud au niveau du diapason ; la solution *quantitativement* inadmissible, $s_1 = \infty$, tient à ce que ce dernier nœud coïncide avec une amplitude qui est imposée et qui, par conséquent, n'est pas nulle.

6. L'expérience vérifie tous ces faits avec une facilité surprenante.

Attachons au diapason, comme il a été dit plus haut, un long caoutchouc sur lequel nous avons tracé des traits fins ; suspendons la masse M, excitons le diapason et déterminons λ. Il est inutile, pour cette opération préliminaire, de prendre des précautions pour que L ait une relation quelconque avec λ. On constate toujours un nœud près de M ; suivant la longueur L, un ventre se trouve plus ou moins loin du diapason. A partir du diapason, marquons des traits équidistants et dont la distance soit un quart de longueur d'onde.

Faisons varier L. Si $L = (2K + 1)\frac{\lambda}{4}$, il y a un ventre sur le diapason ; il est alors très aisé d'entretenir une amplitude s_0 considérable. Le diapason vibre autant dire tout seul.

On conçoit en effet que, l'amplitude de la déformation du caoutchouc étant maxima au niveau du diapason et partout ailleurs plus petite, l'énergie totale absorbée soit relativement faible. L'observation de la surface de mercure prouve que la masse M est quasiment immobile : son amplitude s_1 est alors minima.

Si $L = K\frac{\lambda}{2}$, il en va tout autrement. Le diapason est difficile à entretenir même avec des courants intenses. En effet, la déformation possède l'amplitude minima au niveau du diapason ; à un quart de longueur d'onde de celui-ci, elle peut être 20 fois plus considérable : le rapport dépend de l'exactitude du réglage. Dans ces conditions, il y a une énergie énorme absorbée et l'oscillation du diapason reste toujours très petite, quel que soit le courant d'entretien. L'observation de la surface du mercure montre que la masse M vibre alors avec l'intensité maxima.

Ainsi l'expérience prouve de la façon la plus nette que l'intensité de la vibration de la masse M ne décroît pas d'une manière continue, quand on augmente la longueur du caoutchouc ; elle manifeste des maximums et des minimums, d'accord avec la théorie précédente et en contradiction avec la théorie ordinairement considérée comme exacte.

7. J'ai admis au numéro 4 que l'amortissement est nul : la théorie conduit donc à une périodicité rigoureuse : elle n'est évidemment pas exacte de ce chef. Pour les raisons que j'ai dites, je vais traiter le cas extrême opposé : je prendrai l'amortissement assez grand pour

n'avoir à tenir compte que d'une onde incidente sur la masse M et d'une onde réfléchie. Je peux représenter l'onde incidente par une expression de la forme :

$$e^{-\mu x} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

L'onde réfléchie possède au point $x = L$ la même amplitude, si j'admets qu'aucune énergie n'est absorbée dans l'oscillation du poids suspendu (ce qui est suffisamment exact) ; mais la différence de phase σ' doit être déterminée de manière que l'équation différentielle (4) du mouvement de la masse M soit satisfaite. L'onde réfléchie est de la forme :

$$-e^{-\mu(2L-x)} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2L-x}{\lambda}\right) + \sigma'\right].$$

Le mouvement s à l'extrémité inférieure du caoutchouc est la somme de ces deux mouvements, somme dont l'amplitude dépend de la phase σ' : elle contient en facteur $2 \sin \frac{\sigma'}{2}$.

La valeur de σ' est à peu près la même, et les calculs sont beaucoup plus rapides, si on prend la somme des deux ondes sous la forme :

$$(7) \qquad s = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2L-x}{\lambda}\right) + \sigma'\right],$$

qui revient à supposer un amortissement faible, mais un caoutchouc extrêmement long [1]. On trouve pour déterminer σ' :

$$\operatorname{tang} \frac{\sigma'}{2} = \frac{p\lambda}{2\pi M}.$$

σ' est toujours peu différent de o ; on peut remplacer la tangente par le sinus, et on obtient pour expression de l'amplitude : $\frac{p\lambda}{\pi M}$. Voici ce que cela veut dire :

---

[1] Au point de vue mathématique, l'approximation consiste à négliger $\lambda^2 p\mu$ devant $4\pi^2 M$, ou, si l'on veut, $\lambda\mu$ devant $\frac{4\pi^2 M}{\lambda p}$. Or, dans mes expériences, le dernier terme peut être de l'ordre de 4000 et le premier de l'ordre de quelques unités.

On envoie un train permanent d'ondes au moyen du diapason le long du caoutchouc ; à mesure qu'il se propage, il diminue d'amplitude. Il arrive sur la masse M avec une certaine amplitude et se réfléchit. Si on avait alors $\sigma' = 0$, la masse M serait immobile. Le calcul montre que σ' n'est pas nul : la masse M oscille donc ; le rapport de l'amplitude de son oscillation à l'amplitude de l'oscillation qui se réfléchit contre elle est égal à : $\frac{p\lambda}{\pi M}$.

Ce rapport est indépendant de la longueur du caoutchouc, qui doit seulement être suffisante pour que l'hypothèse soit satisfaite, à savoir qu'on n'ait pas à tenir compte de l'onde réfléchie qui reviendrait à nouveau après une seconde réflexion sur le diapason. Autrement dit, μL est assez grand pour qu'après trois parcours l'amplitude de l'oscillation soit négligeable ; $e^{-3\mu L}$ doit être très petit.

Toutefois l'amplitude de l'oscillation de la masse M dépend de la longueur du fil : elle a sensiblement pour expression : $e^{-\mu L} \cdot \frac{p\lambda}{\pi M}$; elle diminue très vite quand L et μ croissent.

La solution est encore à peu près la même quand la masse M subit un frottement fonction de sa vitesse. Ses déplacements sont en effet généralement si petits, la vitesse par conséquent si faible, que l'absorption d'énergie qui en résulte est négligeable, surtout devant celle qui est due à la propagation de l'ébranlement dans le caoutchouc. Il n'y a d'ailleurs aucune difficulté à introduire un frottement fonction de la vitesse dans l'équation de condition (4). Mais alors il faut laisser indéterminée l'amplitude du mouvement réfléchi, pour avoir la seconde arbitraire nécessaire. Conformément à ce que je viens de dire, l'expérience montre qu'on ne supprime pas les trépidations en plongeant la masse M dans un liquide même très visqueux.

8. Il est évident que la solution rigoureuse du problème tient à la fois des deux solutions limites que je viens de donner. Il serait intéressant, mais difficile de partir immédiatement de l'équation complète (1). Je livre ce problème à la sollicitude des mathématiciens. Quoi qu'il en soit, si le fil est court, la périodicité du phénomène en fonction de L est absolument nette. Elle disparaît peu à peu à mesure que la longueur augmente. Quand la longueur est grande, l'influence de son accroissement intervient seulement pour amortir les vibrations dans leur propagation le long du fil.

L'une et l'autre solution contiennent en facteurs, dans l'amplitude de l'oscillation de la masse M, l'expression $p\lambda : M$. Comme l'expérience montre que $p\lambda$ varie entre des limites restreintes quand M passe de 0 à la plus grande valeur qu'il puisse prendre, il y a avantage, pour diminuer les trépidations, à augmenter M, ce qui revient à allonger le caoutchouc de plusieurs fois sa longueur.

MM. Perrot et Fabry (*Soc. de Phys.*, 1er mai 1903) disent que le caoutchouc amortit le mieux possible pour $\Lambda = 2$ (Λ est le rapport de la longueur actuelle L à la longueur initiale L_0).

Mais il y a deux questions bien différentes en jeu dans un appareil de suspension. Un support ne doit pas transmettre les vibrations; mais, de plus, il doit être fixe. Or, quand on allonge beaucoup le caoutchouc, sa réactivité devient si grande que son emploi comme support est incommode. Il me paraît certain que l'indication de ces auteurs doit être prise dans un sens un peu vague : à savoir que le caoutchouc doit être suffisamment tendu.

Il est vrai que $p\lambda : M$ passe par un minimum quand M croît : mais ce minimum correspond généralement à des Λ très supérieurs à 2 et qui varient notablement suivant les quantités de matières étrangères (sulfate de baryte, oxyde de zinc, blanc d'Espagne) que contient le caoutchouc.

9. Je vais montrer comment on passe de la solution exposée au numéro 4 à la solution du numéro 2, quand on suppose que la vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal devient assez grande pour que la déformation se transmette d'une manière quasi instantanée d'un bout à l'autre du fil. Si on se bornait aux deux équations (1′) et (4), on rencontrerait nécessairement une impossibilité ; il faut alors compléter (4) par des termes d'amortissement ; l'équation deviendra :

$$(4') \qquad -M\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\lambda^2 p}{T^2}\frac{\partial s}{\partial x} + f\frac{\partial s}{\partial t}.$$

que nous pouvons écrire, d'après la définition des paramètres E et $\mathcal{E}$:

$$-M\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \mathcal{E}L\frac{\partial s}{\partial x} + f\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Cette condition doit être réalisée pour $x = L$: nous devons encore satisfaire en tous les points à l'équation :

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

Mais, si v est très grand, cette dernière se réduit à :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = C^{te}.$$

Reprenons maintenant les notations du numéro 2. Puisque $\frac{\partial s}{\partial x}$ est constant, nous pouvons calculer cette quantité au moyen du fil entier : $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{x - y}{L}$.

L'équation de condition devient donc :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon (x - y) + f \frac{dx}{dt} = 0,$$

identique à celle du numéro 2, au terme près d'amortissement dans le caoutchouc. Il n'y a d'ailleurs aucune difficulté à faire apparaître celui-ci en partant non plus de l'équation (1′), mais de l'équation (1), puisque le dernier terme de cette équation implique précisément un frottement proportionnel à la vitesse de déformation.

Ainsi les deux théories ne sont pas *en principe* contradictoires, quoique donnant des résultats expérimentaux contradictoires. La théorie de Helmholtz est un cas très particulier de l'autre, plus exactement un cas limite.

10. Reste à savoir si, dans la pratique, c'est-à-dire quand le diapason est remplacé par un mur, les conditions de la théorie complète ou de son cas limite se trouvent réalisées.

Sans aucun doute, dans toutes les suspensions où l'on utilise du caoutchouc, on est très loin du cas limite. Il faudrait supposer pour les trépidations du sol des périodes beaucoup trop longues. Résulte-t-il de là qu'on obtiendra un phénomène périodique par rapport à L ? Évidemment non, car les trépidations du sol n'ont pas la régularité des vibrations d'un diapason ; surtout il est difficile d'admettre que les murs donnent un son simple. La périodicité du phénomène doit disparaître, masquée par sa complexité.

D'ailleurs il ne faut pas oublier que les perturbations longitudinales ne sont pas seules à se transmettre, surtout quand le caoutchouc est mince et sans raideur notable; il peut naître des perturbations transversales, dont les théories n'ont jamais tenu compte et qui sont cependant infiniment plus gênantes que les longitudinales. Elles sont analogues à celles qu'on obtient dans l'expérience de

Melde ; leur production est étudiée dans une note jointe à mon mémoire *Sur les modules d'élasticité du caoutchouc vulcanisé.*

Quand on emploie des suspensions en ressorts à boudin, il est possible qu'on se trouve plus près du cas limite : c'est une question à discuter pour chaque appareil. Enfin, dans la suspension de Julius qui utilise des fils métalliques, il semble qu'on puisse admettre sans grande erreur que le mouvement se propage instantanément. La vitesse de propagation d'un ébranlement longitudinal est en effet de plusieurs milliers de mètres, 5000 environ pour un fil d'acier. Pour une vibration de $0^s,01$ de période, λ est pour l'acier de l'ordre de 50 mètres, et pour le caoutchouc de $0^m,50$ seulement.

Bien entendu, le travail qui précède ne modifiera pas ce qu'on a coutume de faire : il y a une quinzaine d'années, au laboratoire de M. Mascart au Collège de France, on se servait couramment des suspensions en caoutchouc pour les galvanomètres très sensibles et on y savait qu'il faut employer les tensions les plus fortes et les longueurs les plus grandes possible. Je me rappelle un galvanomètre balistique ayant pour miroir son aimant, et qui fonctionnait correctement dans ce quartier plutôt tourmenté. J'ai moi-même étudié à cette époque la réflexion métallique sur la surface d'un mercure porté par une suspension en caoutchouc : aucune difficulté ne s'est présentée au sujet de la perfection des images. La solution expérimentale est donc connue depuis longtemps ; ce n'est pas une raison pour négliger la théorie.