Mise en équation des phénomènes de convection calorifique et aperçu sur le pouvoir refroidissant des fluides

J. Boussinesq

MISE EN ÉQUATION DES PHÉNOMÈNES DE CONVECTION CALORIFIQUE ET APERÇU SUR LE POUVOIR REFROIDISSANT DES FLUIDES ;

Par M. J. BOUSSINESQ.

I. Un des problèmes les plus simples relatifs aux phénomènes de convection calorifique me paraît être celui des courants permanents que produit dans un liquide pesant, de grande étendue en tous sens et (primitivement) au zéro choisi de température, un solide fixe immergé, que l'on maintient chauffé à une certaine température a. Nous désignerons par ρ la densité du liquide, par θ, u, v, w, P, fonctions de x, y, z à déterminer, sa température, devenue invariable en chaque point (x, y, z) de l'espace, les trois composantes de sa vitesse et la partie *non hydrostatique* de sa pression, quantités s'annulant toutes, asymptotiquement, aux distances infinies de l'origine, autour de laquelle restent localisées les perturbations qu'entraîne l'échauffement du solide.

Afin d'atteindre le maximum de simplicité, tout en laissant subsister le caractère essentiel du phénomène, nous supposerons la dilatabilité du liquide par la chaleur assez faible et, par contre, la pesanteur g assez forte, pour que la réduction de *poids* de l'unité de volume liquide, qu'opère l'échauffement θ, soit sensible, mais non le changement relatif des *volumes* liquides dans les termes où il n'est pas multiplié par g. Bref, l'échauffement θ est censé ne modifier notablement que le poids de l'unité de volume. Appelons $\rho\gamma$ la réduction qu'il y produit par degré centigrade, ou $\rho\gamma\theta$ la réduction effective; et, l'axe des z étant supposé vertical, dirigé vers le haut, les quatre équations indéfinies ordinaires de la dynamique des liquides deviendront

$$(1)\quad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,\quad \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}=-u',\quad \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dy}=-v',\ \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dz}=\gamma\theta-w' :$$

u', v', w' y désignent les accélérations du fluide suivant les axes.

Pour former l'équation indéfinie en θ, considérons, à l'époque t, un volume liquide élémentaire $d\varpi$. Comme dans une particule solide isotrope et athermane, c'est le mode *actuel* de distribution des températures, dans les couches de matière contiguës à sa superficie, qui règle les flux calorifiques y entrant ou en sortant pendant un instant dt ; et, par suite, la conductibilité lui procure, durant cet instant dt, une quantité de chaleur exprimée par $(K\Delta_2\theta)\, d\varpi\, dt$, K étant le coefficient de conductibilité intérieure du liquide. Si donc on appelle θ' la dérivée de la température par rapport au temps, dans la particule matérielle $d\varpi$, et C la capacité calorifique du fluide par unité de volume, la chaleur $C\theta\, d\varpi$ de la particule s'accroîtra, durant l'instant dt, d'une différentielle $C\theta'\, dt\, d\varpi$ égale à $(K\Delta_2\theta)\, d\varpi\, dt$; et l'équation cherchée sera

$$(2) \qquad \theta' = \frac{K}{C}\left(\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{d^2\theta}{dz^2}\right).$$

Mais la dérivée θ' s'obtiendra comme les dérivées u', v', w' des vitesses, c'est-à-dire en faisant, dans l'expression de θ, croître x, y, z de $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$; de sorte qu'on aura la quadruple formule

$$(3) \qquad (u', v', w', \theta') = u\,\frac{d(u, v, w, \theta)}{dx} + v\,\frac{d(u, v, w, \theta)}{dy} + w\,\frac{d(u, v, w, \theta)}{dz}.$$

Aux cinq équations indéfinies (1) et (2), il faudra joindre évidemment les sept relations définies suivantes, dans l'une desquelles λ, μ, ν désignent les trois cosinus directeurs de la normale menée de l'intérieur du fluide à un élément quelconque $d\sigma$ de la surface du corps :

$$(4) \quad \begin{cases} \text{(à la surface du solide)} \quad \lambda u + \mu v + \nu w = 0 \quad \text{et} \quad \theta = a, \\ \text{(aux distances infinies de l'origine)} \quad (P, u, v, w, \theta) = 0. \end{cases}$$

En effet, à la surface du solide, le fluide en contact prend instantanément la température a de celui-ci et la composante normale $\lambda u + \mu v + \nu w$ de la vitesse est nulle.

II. Tâchons de remplacer tant les variables indépendantes x, y, z que les fonctions θ, u, v, w, P, par d'autres, ξ, η, ζ, Θ, U, V, W, Π, qui soient respectivement proportionnelles à chacune d'elles, mais avec coefficients de proportionnalité choisis de manière à éliminer les paramètres a, γ, $\frac{K}{C}$, ρ.

On reconnaît aisément qu'il convient de poser, pour cela :

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = \left(\dfrac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}} x, \quad \eta = \left(\dfrac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}} y, \quad \zeta = \left(\dfrac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}} z; \\ \theta = a\Theta, \quad u = \left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}} U, \quad v = \left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}} V, \quad w = \left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}} W, \\ \qquad P = \rho\left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}} \Pi. \end{cases}$$

Et les équations indéfinies (1), (2) deviennent:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dU}{d\xi}+\dfrac{dV}{d\eta}+\dfrac{dW}{d\zeta}=o, \\ \dfrac{d\Pi}{d\xi}=-U', \quad \dfrac{d\Pi}{d\eta}=-V', \quad \dfrac{d\Pi}{d\zeta}=\Theta-W', \quad \Theta'=\dfrac{d^2\Theta}{d\xi^2}+\dfrac{d^2\Theta}{d\eta^2}+\dfrac{d^2\Theta}{d\zeta^2}, \\ \text{où} \\ (U',V',W',\Theta')=U\dfrac{d(U,V,W,\Theta)}{d\xi}+V\dfrac{d(U,V,W,\Theta)}{d\eta}+W\dfrac{d(U,V,W,\Theta)}{d\zeta}. \end{cases}$$

Donnons-nous, d'ailleurs, l'équation du solide sous la forme

$$(7)\qquad f\left[\left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}x,\ \left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}y,\ \left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}z\right]=o;$$

ce qui reviendra, si le coefficient $\left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ change, à considérer, au lieu du solide proposé, des corps qui lui soient semblables, mais de dimensions inversement proportionnelles à ce coefficient, ou d'un volume en raison directe de $\frac{K^2}{a\gamma C^2}$. Alors les cosinus directeurs λ, μ, ν de la normale resteront les mêmes aux points homologues; et les conditions (4) aux limites deviendront:

$$(8)\quad \begin{cases} [\text{à la surface } f(\xi,\eta,\zeta)=o] \quad \lambda U+\mu V+\nu W=o \quad \text{et} \quad \Theta=1; \\ (\text{aux distances } \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \text{ infinies}) \quad (\Pi, U, V, W, \Theta)=o. \end{cases}$$

Le système d'équations (6) et (8) devant déterminer U, V, W, Θ, Π en fonction de ξ, η, ζ, il suffira de substituer dans ses intégrales, à ces huit nouvelles variables, leurs expressions tirées de (5), pour avoir cinq relations de la forme

$$(9)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\theta}{a}, \dfrac{(u,v,w)}{\left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}}}, \dfrac{P}{\rho\left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}}}\right] \\ \quad = \text{des fonctions définies de } \left(\dfrac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}x,\ \left(\dfrac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}y,\ \left(\dfrac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}z. \end{cases}$$

On voit que, si l'excédent a de température des corps considérés reçoit différentes valeurs, les vitesses u, v, w du fluide seront, aux points homologues de l'espace entourant ces corps, proportionnelles à la racine cubique, $a^{\frac{1}{3}}$, de cet excédent, et qu'une même fraction Θ

de celui-ci sera prise, en ces points homologues, par le fluide y effectuant son passage.

III. Le flux F de chaleur fourni dans l'unité de temps par l'unité d'aire d'un quelconque des corps, égal à celui que la couche liquide contiguë communique au fluide plus intérieur, aura, comme on sait, l'expression $K\left(\lambda\frac{d\theta}{dx}+\mu\frac{d\theta}{dy}+\nu\frac{d\theta}{dz}\right)$. En y introduisant les nouvelles variables et fonction ξ, η, ζ, Θ, on aura donc :

$$F=(KC^2\gamma)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{4}{3}}\left(\lambda\frac{d\Theta}{d\xi}+\mu\frac{d\Theta}{d\eta}+\nu\frac{d\Theta}{d\zeta}\right). \tag{10}$$

Aux points homologues des surfaces $f(\xi, \eta, \zeta)=0$ limitant les corps considérés, les cosinus directeurs λ, μ, ν et les dérivées $\frac{d\Theta}{d(\xi, \eta, \zeta)}$ ont mêmes valeurs respectivement. Donc *le flux de chaleur fourni par l'unité d'aire des corps semblables dont il s'agit est proportionnel, en ces points homologues, à la puissance* $\frac{4}{3}$, $a^{\frac{4}{3}}$ ou $a^{1,333}$, *de l'excédent de température de chaque corps sur la masse du fluide ;* et il dépend des autres propriétés physiques de celui-ci par le facteur $(KC^2\gamma)^{\frac{1}{3}}$, croissant avec sa conductibilité intérieure K, avec la capacité calorifique C de son unité de volume, enfin avec le produit, γ, de la gravité g par l'accroissement de cette unité de volume pour un degré d'élévation de la température.

Si, l'excédent a venant à croître, le solide, au lieu de se contracter en volume (dans un rapport inverse de a), gardait ses dimensions, l'unité d'aire de sa surface serait moins courbe et, par conséquent, moins convexe, que ne le suppose la formule (10) quand, ξ, η ζ, y conservent leurs valeurs. Or, on conçoit que, toutes choses égales d'ailleurs, une forme moins convexe de l'unité de surface restreigne dans une légère mesure les rapports du solide avec le fluide ambiant, rapports qu'une forme concave réduirait évidemment : ainsi, il est vraisemblable qu'une moindre convexité atténue la quantité de chaleur emportée par le fluide. Donc le flux F doit, en réalité, quand l'excédent a augmente *chez un même corps*, croître un peu *moins vite* que la puissance $a^{\frac{4}{3}}$ ou $a^{1,333}$; et l'on s'explique que les expériences de Dulong et Petit aient indiqué des flux calorifiques de convection sensiblement proportionnels à $a^{1,233}$, ou aient conduit à adopter un exposant de a inférieur à $\frac{4}{3}$ de 0,1 environ.

Ces expériences, il est vrai, concernaient le pouvoir refroidissant des gaz et non des liquides. Mais, si les variations de volume du fluide à température constante, alors un peu sensibles, devaient y compliquer les phénomènes de convection, rien ne dit qu'elles en changeassent notablement les traits principaux ; car la cause de ces phénomènes est toujours dans la réduction, à pression constante, du poids de l'unité de volume par l'échauffement.

Dans l'hypothèse où il en serait ainsi, c'est-à-dire où nos formules pourraient être approximativement appliquées même aux gaz, la diminution de 0,1 effectuée sur l'exposant $\frac{4}{3}$ de a, dans (10), constituerait donc une correction *empirique* de la variation produite sur le facteur trinome $\lambda \frac{d\Theta}{d\xi} + \mu \frac{d\Theta}{d\eta} + \nu \frac{d\Theta}{d\zeta}$, par un agrandissement des dimensions de la surface type $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ dans le rapport de 1 à $a^{\frac{1}{3}}$, agrandissement qui, par conséquent, aurait à peu près, comme effet, sur le trinome, de diviser sa valeur par $a^{0,1} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{0,3}$. Alors l'agrandissement analogue dont il faudrait pouvoir évaluer l'effet réducteur sur le même trinome, si l'on fait varier indifféremment a, γ, C ou K sans modifier les dimensions du corps, sera, d'après les expressions (5), de ξ, η, ζ, dans le rapport de 1 à $\left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}$; et, vu que la fonction Θ définie par le système d'équations (6) et (8) change de la même manière à raison de cet agrandissement, quelle qu'en soit la cause, le trinome se trouverait alors, dans (10), divisé à peu près par $\left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{0,1}$. Ainsi, le *pouvoir refroidissant des divers fluides sur un même corps* serait, d'après (10), proportionnel au produit

$$(KC^2\gamma)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{4}{3}} \left(\frac{K^2}{a\gamma C^2}\right)^{0,1} = \gamma^{0,233} K^{0,533} C^{0,467} a^{1,233};$$

il serait, d'ailleurs, indépendant de la nature du corps et de l'état physique de sa surface, conformément à ce qu'a montré l'expérience.

IV. Il semble qu'on peut encore, simplement, dégager des équations précédentes un résultat intéressant, du moins quand le corps est plus étendu suivant le sens vertical que dans les sens horizontaux, ou même quand c'est un plateau large, mais beaucoup moins épais que haut, suspendu verticalement, de manière à avoir, par exemple, ses deux faces perpendiculaires à l'axe des x. Alors les courants peuvent être principalement verticaux et, emportant la chaleur dans le sens des z positifs, ne laisser l'échauffement du fluide se produire d'une manière sensible qu'à des distances horizontales du corps bien moindres que sa hauteur.

Cela étant, s'il s'agit, par exemple, du plateau normal aux x, tirons, des deux équations (1) qui contiennent u' et w', la condition d'intégrabilité de P,

$$\frac{d}{dx}(\gamma\theta - w') = -\frac{du'}{dz}.$$

Multiplions-la par dx et intégrons du côté du plateau où x est, par exemple, positif, depuis $x = \infty$, où θ, w', u' s'annulent jusqu'à une valeur de x quelconque. Il viendra, en transposant $-w'$,

$$\gamma\theta = w' - \int_{\infty}^{x} \frac{du'}{dz}\, dx.$$

Or, ici, le dernier terme est bien moindre qu'il ne serait si l'on y remplaçait la dérivée en z de u' par sa dérivée en x, supposée notablement plus forte; ce qui donnerait à ce terme, comme valeur, $-u'$, c'est-à-dire une fraction encore minime du terme précédent w'. Ainsi l'on a, sauf erreur négligeable,

$$w' = \gamma\theta. \tag{11}$$

Autrement dit, *l'accélération ascendante du fluide est partout proportionnelle à son échauffement actuel* θ. Donc les courants de convection accroissent sans cesse leur vitesse verticale, à mesure qu'ils s'élèvent non seulement à côté du corps, mais même au-dessus de lui, ou après l'avoir dépassé, jusqu'à ce qu'ils se soient, tout en montant, assez étendus latéralement, pour avoir acquis des dimensions horizontales comparables à la hauteur totale parcourue et avoir mis ainsi en défaut, avec notre raisonnement la formule même (11).

On voit que ces courants naissent à de petites distances au-dessous du corps, là où commence à se faire sentir sa chaleur, qu'ils s'accélèrent et, par suite, s'effilent ou s'aplatissent de plus en plus contre le corps, en s'adjoignant sur leur côté extérieur le fluide latéral qu'ils échauffent en chemin; après quoi ils s'étendent très loin au-dessus du corps, en s'y continuant, à raison de leur vitesse acquise, même après s'être presque entièrement refroidis.