



Application des oscillographes à la méthode de résonance

H. Armagnat

► To cite this version:

H. Armagnat. Application des oscillographes à la méthode de résonance. J. Phys. Theor. Appl., 1902, 1 (1), pp.345-364. 10.1051/jphystap:019020010034500 . jpa-00240616

HAL Id: jpa-00240616

<https://hal.science/jpa-00240616>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

APPLICATION DES OSCILLOGRAPHES A LA MÉTHODE DE RÉSONANCE ⁽¹⁾;

Par M. H. ARMAGNAT.

1. Un courant périodique quelconque peut toujours être représenté par une série de Fourier, telle que :

$$(1) y = a_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t \dots + A_n \sin n\omega t + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t \dots + B_n \cos n\omega t,$$

ou encore, en écrivant :

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi_n = \frac{B_n}{A_n},$$

$$(2) \quad y = a_0 + a_1 \sin(\omega t + \varphi) + a_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) \dots + a_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

En résumé, le courant périodique est représenté par la somme d'une série de sinusoïdes, variables en nombre et en grandeur, qui sont des *harmoniques* de la fonction principale $a_1 \sin(\omega t + \varphi)$. Dans le cas des courants alternatifs, on prend comme fonction principale celle qui correspond à la période du courant essayé. Si T est la durée de cette période, la *fréquence* est $\frac{1}{T}$ et :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Les variations de plus longue période, par exemple celles qui sont dues à l'irrégularité des moteurs à vapeur, sont ordinairement négligées; leur examen rentre dans l'étude mécanique de la machine.

Dans les courants alternatifs *symétriques*, le terme a_0 disparaît; il ne reste que les termes en sinus et cosinus.

Pour obtenir l'équation complète de la courbe, il faut connaître les coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n$, qui ne sont autre chose que les *demi-amplitudes* des sinusoïdes composantes, l'*ordre* n et enfin la *phase* φ_n de chaque harmonique. Dans le cas de (1), il faut connaître les coefficients A_n et B_n de chaque harmonique, et la phase est donnée par leur rapport.

Deux méthodes différentes peuvent être employées pour déterminer cette équation. Si l'on a relevé, par points ou à l'aide des instru-

(1) Communication faite à la Société de Physique, Séance du 20 décembre 1901.

J. de Phys., 4^e série, t. I. (Juin 1902.)

ments automatiques : ondographe, oscillographe ou rhéographe, la courbe du courant étudié en fonction du temps, on peut, à l'aide des procédés graphiques ordinaires, déterminer les constantes ci-dessus. Malheureusement, les courbes ainsi obtenues n'ont jamais une finesse et une netteté suffisantes pour permettre cette analyse, à moins que les harmoniques cherchés soient relativement importants et d'ordre peu élevé. De plus, les courbes obtenues sont toujours faussées par les accidents *non périodiques*, que l'on ne peut éviter, et ces perturbations risquent d'apporter beaucoup de trouble dans l'analyse.

La *fig. 1* met bien en évidence la difficulté d'obtenir sur une courbe l'indication de l'ordre et de la grandeur des harmoniques. Les deux courbes représentent le courant inducteur et le courant induit dans un petit transformateur à circuit magnétique ouvert. Le courant est fourni par une commutatrice dont la force électromotrice est représentée par la courbe dentelée des *fig. 5 à 9*. La self-induction

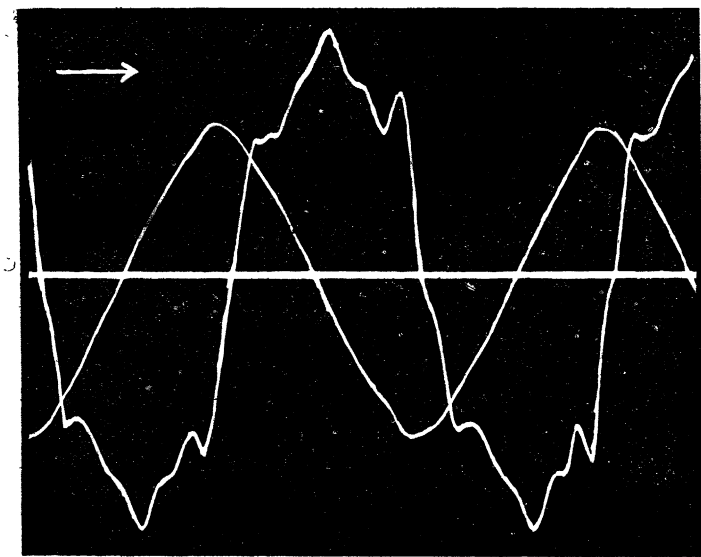


FIG. 1. — Courant inducteur et courant induit dans un transformateur.

relativement considérable du primaire et la présence du fer saturé ont fait disparaître les dentelures, de sorte que le courant inducteur présente la forme presque triangulaire que l'on voit ici. Néanmoins

les harmoniques que nous retrouverons plus loin existent encore et on les voit très amplifiés dans le courant induit; cependant l'examen de la courbe du courant inducteur permet difficilement de prévoir leur existence. Il y a même, en plus, l'harmonique trois dû au fer.

L'analyse graphique étant insuffisante pour la détermination de l'équation des courbes, il faut employer des méthodes donnant *directement* n , a_n et φ_n ; ce sont les *méthodes analytiques* proprement dites. En réalité, les méthodes analytiques ont été essayées en même temps que les premiers oscillographes, et ce sont les progrès continus de ces derniers qui les ont fait oublier; mais, par un retour assez curieux, ces appareils facilitent singulièrement l'emploi des méthodes analytiques, de sorte que, s'il est nécessaire, on peut obtenir, à l'aide d'un même instrument : oscillographe ou rhéographe, la courbe elle-même, ou sa décomposition en harmoniques.

Parmi les méthodes analytiques proposées, puis abandonnées, on peut citer celle de MM. Healing et Le Tall ⁽¹⁾, dans laquelle le courant étudié traverse un électro placé devant un fil tendu. Quand la tension du fil est telle que sa période de vibration correspond à celle d'un des harmoniques, le fil se met à vibrer fortement, l'amplitude de ses vibrations indiquant, à peu près, l'amplitude de l'harmonique et l'ordre n étant déduit de la tension et des dimensions du fil. Cette méthode ne donne pas la phase.

MM. Lamb et Smith, à la même époque ⁽²⁾, et M. Blondel ensuite ⁽³⁾, obtiennent la valeur des harmoniques en envoyant le courant étudié dans le circuit fixe d'un électrodynamomètre, le circuit mobile recevant le courant fourni par un alternateur auxiliaire. Ce dernier, dont la vitesse peut être réglée à volonté, doit donner un courant sinusoïdal. Chaque fois que le courant auxiliaire i correspond à la fréquence d'un des harmoniques, on a :

$$i = C \sin n\omega t,$$

et la déviation passe par un maximum. Or la déviation est proportionnelle à :

$$\frac{1}{T} \int_0^T y i = \frac{C}{T} \int_0^T y \sin n\omega t,$$

⁽¹⁾ *Journal of the Inst. of Elect. Eng.*, t. XVIII, p. 284; — *Lumière électrique*, t. XXXII, p. 584; 1889.

⁽²⁾ *Industrie électrique*, p. 375, 25 août 1893.

⁽³⁾ *Lumière électrique*, t. LIII, p. 288; 1894.

c'est-à-dire à l'un des coefficients cherchés, puisque les formules de Cauchy donnent :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T y \sin n\omega t.$$

Un réglage préalable ayant permis de mettre i en phase avec les termes en sinus, il suffit de décaler l'alternateur de $\frac{\pi}{2}$, pour avoir :

$$i = C \cos n\omega t,$$

et, par suite :

$$(3) \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T y \cos n\omega t.$$

Sous cette forme, qui est celle de M. Blondel, la méthode est complète, puisque les trois facteurs cherchés sont déterminés ; malheureusement elle n'a pas été appliquée ainsi ; seuls, MM. Lamb et Smith ont fait quelques expériences, sans se préoccuper de la phase.

2. Avec la méthode de résonance de M. Pupin⁽¹⁾, nous entrons dans une autre voie ; les expériences sont plus faciles à réaliser et le calcul des résultats moins incertain.

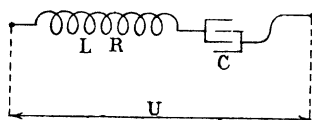


FIG. 2. — Schéma de la méthode de résonance.

Un circuit composé d'une bobine sans fer, ayant une résistance R et une self-induction L , en série avec condensateur de capacité C , étant soumis (fig. 2) à une différence de potentiel U , de fréquence $\frac{n}{T}$:

$$U = a_n \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

est traversé par un courant I_n :

$$(4) \quad I_n = \frac{a_n}{R \sqrt{1 + \left(\frac{n^2 \omega^2 CL - 1}{n\omega CR} \right)^2}} \sin(n\omega t + \varphi_n - \psi),$$

$$(5) \quad \tan \psi = \frac{n^2 \omega^2 CL - 1}{n\omega CR}.$$

⁽¹⁾ *American Journal of Science*, mai 1893 ; — *Lumière électrique*, t. LIII, p. 288 ; 1894.

Cette intensité est maximum quand :

$$(6) \quad n^2 \omega^2 CL = 1,$$

elle est alors égale à :

$$(7) \quad I_n' = \frac{a_n}{R} \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

A ce moment il y a *résonance*, car, en effet, le circuit ci-dessus n'est pas autre chose qu'un *résonateur*, dont la période d'oscillation propre, abstraction faite de l'amortissement, est :

$$T' = 2\pi \sqrt{CL};$$

or, il est facile de voir que T' est aussi la période $\frac{T}{n}$ du courant I_n , puisque, comme le montrent (3) et (6) :

$$\frac{T}{n} = \frac{2\pi}{n\omega} = 2\pi \sqrt{CL}.$$

Dans les expériences de Pupin, un électromètre, placé en dérivation sur le condensateur C , sert à l'observation. Il se développe dans le circuit des forces électromotrices $L \frac{dI}{dt}$ et $\frac{1}{C} \int I dt$, qui sont précisément égales entre elles et maxima au moment de la résonance; on tire de (7) :

$$(8) \quad e = L \frac{dI_n}{dt} = n\omega \frac{L}{R} a_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Comme, dans la circonstance, on mesure un des harmoniques, c'est-à-dire un courant rigoureusement sinusoïdal, il est facile de déduire a_n de la force électromotrice *efficace* mesurée :

$$e_{\text{eff.}} = 0,707 e_0,$$

et

$$a_n = \frac{e_0 R}{n\omega L}.$$

La méthode de Pupin exige l'emploi de bobines ou de capacités permettant la variation continue de CL . Chaque fois que la déviation de l'électromètre passe par un maximum, on se trouve en présence d'un harmonique dont l'ordre n est donné par le produit CL :

$$(9) \quad n = \frac{1}{\omega \sqrt{CL}}.$$

et l'amplitude par l'équation (8). Cette méthode ne donne pas la phase.

Remplaçons maintenant l'électromètre par un oscillographe ou un rhéographe, immédiatement l'observation est simplifiée. Avant d'être arrivé à la résonance, on voit se tracer sur l'écran la courbe de l'harmonique visé et, si l'on a eu soin de conserver la courbe y du courant étudié, il est facile de *compter* le nombre n des oscillations qui se produisent pendant une période de la courbe y . Une fois l'ordre n de l'harmonique le plus voisin connu, il est facile de calculer la valeur plus exacte de CL à employer; mais ce calcul n'est qu'approximatif.

Au moment où la courbe observée est maximum, la résonance est atteinte et, si l'on connaît la résistance R du circuit de l'oscillographe et de la bobine de self-induction, si l'oscillographe lui-même est étalonné, la mesure de I'_n est facile, et on a :

$$a_n = RI_0,$$

I_0 étant l'ordonnée maximum de l'intensité I'_n .

De plus, l'équation (5) montre que la différence de phase ψ entre le courant I_n et la différence de potentiel U est nulle quand la résonance est atteinte; donc on peut, en se servant de la courbe y comme repère, déterminer la phase φ_n de chaque harmonique.

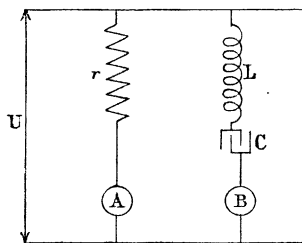


FIG. 3. — Mesure des faibles voltages.

3. Entrons plus avant dans la question. Pour la mesure des *différences de potentiel* assez basses, jusqu'à 200 volts environ, on peut employer le schéma de la fig. 3. L'oscillographe A, muni d'une résistance non inductive r , trace sur l'écran la courbe y du courant étudié. Le second oscillographe B est en série avec le condensateur C et une bobine de self-induction L; le produit CL peut varier par l'un ou l'autre des facteurs, ou par les deux, et la *variation doit être aussi*

continue que possible. Un réglage préalable des deux oscillographes a permis de faire coïncider les axes et les origines des temps sur les courbes.

Les choses étant ainsi disposées, on met d'abord le circuit CL en résonance avec la période principale (*fig. 5*), et on détermine soigneusement son amplitude maximum et sa phase par rapport à la courbe témoin. Ensuite on diminue CL, et l'observation de la courbe montre facilement les harmoniques qui existent dans le courant étudié; on les met en résonance et on mesure également leur phase et leur amplitude.

Diverses causes d'erreurs existent dont il faut tenir compte. Nous avons toujours calculé, jusqu'ici, le courant produit par l'harmonique visé seulement; mais l'équation (4) nous montre que le courant fourni par les autres harmoniques n'est jamais négligeable; il y a lieu d'en tenir compte dans certains cas.

Examinons, par exemple, ce qui se passe pour un harmonique d'ordre $n + p$, lorsque la résonance est établie pour l'harmonique n ; à ce moment nous avons :

$$C = \frac{1}{n^2 \omega^2 L},$$

et cette valeur, introduite dans l'équation (4), où n a été préalablement remplacée par $n + p$, nous donne :

$$(10) \quad I_{n+p} = \frac{a_{n+p}}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n^2 - (n+p)^2}{n+p} \right)^2 \omega^2 \frac{L^2}{R^2}}} \sin[(n+p)\omega t + \varphi_{n+p} - \psi_{n+p}].$$

C'est-à-dire que l'intensité donnée par l'harmonique $n + p$ est réduite, par rapport à la valeur qu'elle aurait à la résonance, dans le rapport indiqué par le radical. Par conséquent, en étudiant l'harmonique n , il faut tenir compte des harmoniques $n + p$ dont l'amplitude est assez grande pour donner une intensité appréciable, bien qu'ils ne soient pas en résonance. En pratique, c'est surtout la période fondamentale : $n + p = 1$, qui apporte du trouble dans les harmoniques supérieurs.

La présence des courants dus à tous les harmoniques autres que n ne change rien à l'amplitude ni à la phase de ce dernier; il en résulte seulement une légère courbure de l'axe du temps (*fig. 6 et 7*) ou une interférence qui donne lieu à des nœuds et à des ventres (*fig. 9*). Ces perturbations gênent fort peu ici, tandis qu'elles affectent notable-

ment la valeur efficace du courant, telle qu'on la mesure dans la méthode de Pupin proprement dite.

Tous les harmoniques différents de n sont décalés sur leur phase réelle, et on a :

$$(11) \quad \tan \psi_{n+p} = \frac{(n+p)^2 - n^2}{n} \omega \frac{L}{R} = \left(\frac{p^2}{n} + 2p \right) \omega \frac{L}{R}.$$

L'équation (10) montre que le courant I_{n+p} est d'autant plus atténué que la *constante de temps*, $\frac{L}{R}$, de la bobine est plus grande; on a donc intérêt à faire cette constante aussi élevée que possible; il en résulte que ψ_{n+p} est toujours voisin de $\frac{\pi}{2}$, en avance quand p est positif, c'est-à-dire pour les harmoniques supérieurs à n , en retard pour les harmoniques inférieurs.

L'équation (8) montre que la force électromotrice d'induction est aussi proportionnelle à la constante de temps. Comme le condensateur est soumis à une différence de potentiel égale, il y a lieu d'éviter une trop grande valeur de $\frac{L}{R}$ pour les harmoniques où le produit na_n est élevé. Cette considération est déjà contradictoire à la condition précédente; nous trouverons plus loin une autre cause qui oblige aussi à limiter la constante de temps du circuit.

Voyons maintenant l'effet d'une petite erreur sur le réglage de la résonance; posons :

$$(12) \quad n^2 \omega^2 CL - 1 = \varepsilon,$$

ε étant très petit devant 1. Cette valeur, introduite dans (4), donne, en remplaçant 1 + ε par 1 :

$$(13) \quad I_n'' = \frac{a_n}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \omega^2 \frac{L^2}{R^2} \varepsilon^2}} \sin(n\omega t + \varphi_n - \psi''),$$

et

$$(14) \quad \tan \psi'' = n\omega \frac{L}{R} \varepsilon.$$

Les équations (13) et (14) montrent qu'un très petit dérèglement de la résonance affecte à la fois l'*amplitude* et la *phase* de l'harmonique et que, pour obtenir des résultats exacts, il faut pouvoir faire varier le produit CL d'une manière presque continue, en observant soigneu-

sement le moment où l'amplitude maximum est atteinte. La meilleure solution est évidemment l'emploi de bobines à self-induction variable, dans le genre de celles de MM. Brillouin ou Ayrton et Perry.

Le dérèglement ε peut aussi être dû à une variation de vitesse de l'alternateur ; celle-ci produit une variation de la fréquence fondamentale et le facteur ω de l'équation (12) diffère de la valeur ω_0 qui donne la résonance ; on obtient ainsi :

$$(13) \quad \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le facteur ε est donc proportionnel à la variation relative de la vitesse angulaire, c'est-à-dire à l'*irrégularité* de l'alternateur étudié.

Avec les machines très irrégulières, cet effet est tel qu'il est impossible de photographier les courbes de résonance. Il faut observer directement l'amplitude maximum et la phase au même moment. Si, après réglage, on veut substituer la glace sensible à l'écran de l'oscillographe, on a très peu de chances de déclencher l'obturateur photographique au moment d'un maximum. On peut, il est vrai, placer un électromètre aux bornes du condensateur et s'en servir pour observer le moment du maximum ; mais, en outre de la complication, ce moyen a le défaut de n'être efficace que pour les irrégularités très longues, l'inertie de l'électromètre le rendant impropre aux indications rapides.

Il faut remarquer que la variation d'amplitude est d'autant plus grande que $\frac{L}{R}$ est aussi plus grand ; on peut donc, le cas échéant,

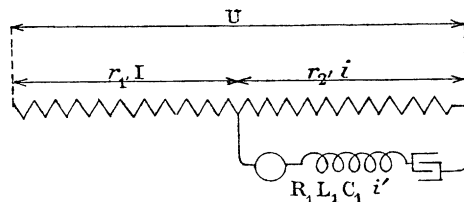


FIG. 4. — Mesure des voltages élevés.

réduire la constante de temps à la valeur juste nécessaire pour rendre les harmoniques voisins sans influence. Les courbes 8 et 9 montrent bien ce défaut : elles ont été relevées sur une commutatrice dont l'irrégularité dépasse beaucoup 10/0.

4. Pour les voltages élevés, il faut employer un autre dispositif : en effet, il est dangereux de soumettre un condensateur à une différence de potentiel de plusieurs centaines de volts, et il ne faut pas oublier que le voltage qui agit sur le condensateur peut être beaucoup plus élevé que le voltage à mesurer.

La solution la plus simple consiste à mettre le circuit résonateur en dérivation sur une fraction, r_2 , d'une résistance sans induction, $r_1 + r_2$, qui reçoit le voltage total (fig. 4).

Dans ces conditions, il est facile de voir qu'on a, au moment de la résonance :

$$Ri = r_2 i, \quad I = i + i',$$

et, finalement, le courant mesuré par l'oscillographe est :

$$i' = \frac{r_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R} u_n;$$

u_n étant l'harmonique n de la différence de potentiel U .

Il faut calculer les résistances r_1 et r_2 , de sorte que la différence de potentiel $r_2 i$ soit, au plus, égale à 100 volts.

Il est bien entendu que les deux méthodes ci-dessus (§ 3 et 4) mesurent des *différences de potentiel* U et que, pour en déduire la *force électromotrice* E de l'alternateur, il faut tenir compte de la résistance et de la self-induction du générateur. La correction à apporter à U , pour obtenir E , est naturellement variable avec l'ordre n de l'harmonique, et, si l'oscillographe exige un courant appréciable, certains harmoniques de la force électromotrice peuvent être presque complètement étouffés. Par conséquent, l'oscillographe employé donnera une valeur de E d'autant plus exacte que la résistance du circuit sera plus grande; c'est exactement le cas de tous les voltmètres.

5. Pour la mesure des intensités, le procédé à employer est encore différent. On pourrait évidemment placer le circuit résonateur en dérivation sur une résistance sans self-induction et mesurer comme ci-dessus; mais il faut observer que l'on ne peut obtenir ainsi qu'une différence de potentiel très faible et, à moins que l'oscillographe employé soit très sensible, il faut que la résistance R du résonateur soit faible, ce qui conduit à L également très faible et exige pour C des valeurs très grandes et pratiquement inutilisables.

Une solution plus simple consiste à faire usage d'un petit transformateur *élevateur de tension*, sans fer, dans le circuit secondaire

duquel on intercale l'oscillographe, le condensateur et, au besoin, une bobine de self-induction additionnelle. A la résonance, le courant secondaire I_n mesuré par l'oscillographe est *en phase* avec la force électromotrice induite par l'harmonique visé, c'est-à-dire en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur l'harmonique i_n lui-même, et le courant observé a pour valeur, en appelant M le coefficient d'induction mutuelle du transformateur :

$$(16) \quad I_n = \frac{Mn\omega i_n}{R} \sin\left(n\omega t + \varphi_n - \frac{\pi}{2}\right).$$

En calculant, comme ci-dessus, l'influence des harmoniques voisins, on voit que l'intensité I_{n+p} est réduite à :

$$(17) \quad I_{n+p} = \frac{M(n+p)\omega i_{n+p}}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n^2 - (n+p)^2}{n+p}\right)^2 \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}} \sin\left(n\omega t + \varphi_{n+p} - \frac{\pi}{2} - \Psi_{n+p}\right).$$

On voit que les harmoniques inférieurs, p négatif, ont une action perturbatrice moindre que dans le cas de la mesure des voltages. Au contraire, les harmoniques supérieurs sont beaucoup plus gênants. Ce double résultat est dû à ce que le courant donné par chaque harmonique est proportionnel au produit $(n+p) i_{n+p}$, tandis que, dans la mesure des voltages, il est seulement proportionnel à a_{n+p} .

La constante de temps joue ici le même rôle que précédemment pour l'étouffement des harmoniques voisins, et on trouvera la même difficulté à l'augmenter, à cause de la force électromotrice d'induction qui croît très vite :

$$e = Mn^2\omega^2 \frac{L}{R} I_n,$$

et, aussi, à cause des variations de vitesse qui causent la même variation d'amplitude et de phase des courbes [Voir (13) et (14)].

6. La facilité d'emploi de cette méthode repose en grande partie sur la bobine de self-induction dont on dispose. Il faut que cette self-induction varie d'une manière continue par l'éloignement ou le rapprochement de deux bobines, ou par leur variation d'angle. Il est nécessaire de posséder au moins deux bobines de self-induction : une de 1 à 2 henrys, l'autre de 0,1 à 0,2 henry, pour obtenir la résonance avec des capacités pas trop grandes.

La constante de temps du circuit est le quotient de la somme des self-inductions par la somme des résistances ; il faut donc donner à

la bobine additionnelle la plus grande constante de temps possible pour que la constante résultante soit élevée. Si on craint les effets nuisibles de $\frac{L}{R}$, on a toujours la ressource d'augmenter R , quand la sensibilité de l'oscillographe le permet.

On est assez vite limité dans l'augmentation de $\frac{L}{R}$. On sait, en effet, que la *constante de temps* varie, toutes choses égales d'ailleurs, et pour des bobines homologues, comme le carré des dimensions linéaires, c'est-à-dire comme la puissance $\frac{2}{3}$ du volume :

$$\frac{L}{R} : \frac{L'}{R'} = \left(\frac{V}{V'}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

La constante de temps varie avec la *forme* de la bobine, avec la *conductibilité* du fil et avec l'*épaisseur de l'isolant*. Dans les conditions les plus favorables, on obtient $\frac{L}{R} = 0,01$ seconde avec un volume de fil de 300 à 600 centimètres cubes correspondant à un *poids* utile de fil de 2 à 3 kilogrammes.

Il ne doit y avoir, dans les bobines de self-induction employées, aucune autre dépense d'énergie que l'effet Joule, RI^2 , dans le circuit mesuré. C'est pour cette raison qu'il faut employer des bobines sans fer, n'ayant pas de spires en court-circuit et sans masses métalliques susceptibles d'être le siège de courants de Foucault.

On emploie quelquefois l'expression constante de temps en l'appliquant à des bobines à noyau de fer. Dans ce cas, la valeur intéressante, en courant alternatif, dépend non seulement de $\frac{L}{R}$, mais encore de toutes les pertes d'énergie, et on doit écrire :

$$\tan \varphi = \omega \frac{L'}{R},$$

en donnant à φ sa valeur tirée du *facteur de puissance* K :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{P}{EI} = K, \\ \frac{L'}{R} &= \frac{1}{\omega} \tan \varphi = \frac{1}{\omega} \frac{\sqrt{1 - K^2}}{K}. \end{aligned}$$

Cette expression de la constante de temps nous donne la valeur de la résistance fictive R' qu'il faudrait introduire dans les équations

précédentes pour le calcul des amplitudes et des forces électromotrices. Il est facile de voir que cette formule contient le facteur K , qui est variable avec la fréquence et presque toujours inconnu. Mais on voit aussi que $\frac{L'}{R}$ est toujours plus petit que $\frac{L}{R}$, par conséquent les amplitudes, comme les forces électromotrices calculées, sont plus grandes que les valeurs observées, quand il y a du fer dans la bobine.

Pour la même raison, le coefficient de self-induction L' , d'une bobine avec fer, mesuré en courant alternatif, est toujours plus petit que la valeur statique, parce que le calcul est basé sur la valeur vraie R , au lieu de la résistance fictive R' .

Les condensateurs employés peuvent être quelconques, pourvu que leur isolement ne soit pas trop mauvais. Le calcul de la capacité n'intervenant pas, puisque n est déterminé par le nombre d'oscillations observé dans une période, le réglage défectueux des capacités et les petits défauts tels que la variation de la capacité avec le temps de

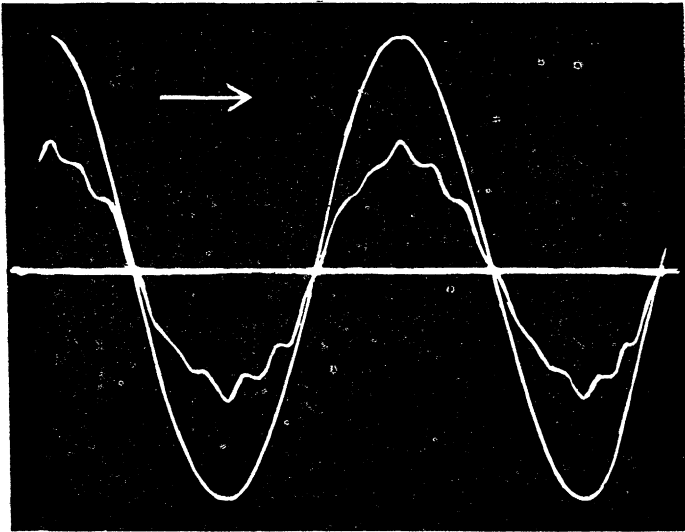


FIG. 3. — Période principale en résonance.

charge, ne gênent pas. La dépense d'énergie dans les condensateurs est toujours assez petite pour être négligée, au moins avec les oscillographes industriels qui exigent des courants assez intenses.

7. Comme exemple de décomposition d'une courbe de courant alternatif, nous allons prendre les *fig.* 5 à 9, qui ont été relevées sur une commutatrice. Cette machine porte, sur un seul induit, deux enroulements distincts, de façon à ce que le voltage secondaire en courant continu soit égal au voltage efficace primaire en alternatif.

Le rôle de la machine a été renversé. Le courant primaire est pris sur un réseau à courant continu dont le voltage oscille fréquemment et très brusquement, entre 115 et 120 volts. Il en résulte naturellement une vitesse fort irrégulière de la commutatrice, ce qui rend presque impossible la photographie des courbes de résonance. On trouvera, dans le tableau ci-dessous, les valeurs de a_n et φ_n , pour les harmoniques principaux, relevées sur les clichés et observées directement. Il y a une différence très notable entre ces valeurs pour $n = 7$ et 14; cela provient de ce que, malgré des essais répétés, il a été impossible de faire coïncider la photographie avec un moment de résonance parfaite.

Les mesures ont été faites dans des conditions variées de self-induction, de capacité et de résistance. Les bobines de l'oscillographe ont été mises en série — sensibilité $S = 1$ — ou en dérivation — sensibilité 0,5. La colonne y_n indique, en millimètres, l'ordonnée maximum de l'harmonique observé, et la colonne a_n renferme les valeurs relatives des demi-amplitudes :

$$a_n = \frac{Ry_n}{S}.$$

Comme on le voit, l'harmonique 5 est affecté par la période principale. En appliquant la formule (10), on voit que $n + p = 1$ donne encore une sinusoïde dont l'amplitude est environ le quart de celle qui correspond à $n = 5$; le calcul se vérifie bien sur le cliché. La courbure de l'axe des temps ne gêne pas pour la mesure de l'amplitude; on peut, sans commettre d'erreur trop forte, prendre pour y_n la moyenne de trois maxima consécutifs, les deux extrêmes étant de signe opposé au moyen :

$$y_n = \frac{y' + 2y'' + y'''}{4}.$$

Pour la phase, il faut la mesurer en partant d'un *maximum*, quand cette courbe part d'un axe curviligne, comme c'est le cas dans la *fig.* 6. On choisit une période de l'harmonique aussi près que pos-

sible du maximum de la courbe perturbatrice et on prend la moyenne entre les deux passages au zéro de cette courbe. Il suffit de retrancher

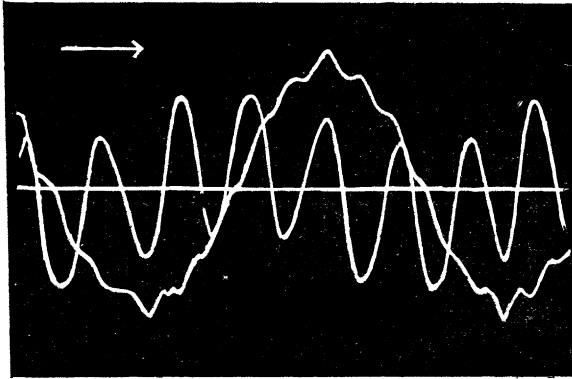


FIG. 6. — Harmonique cinq.

de la distance de ce point à l'origine de la courbe témoin le nombre de périodes entières qui y est contenu, moins un quart de période ; le reste donne la phase cherchée.

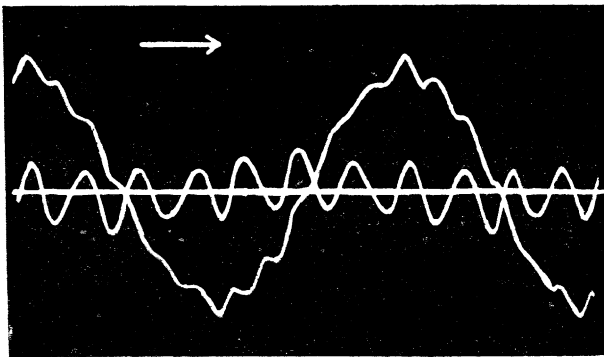


FIG. 7. — Harmonique sept.

La même perturbation se retrouve dans la fig. 7, où la période principale a encore une amplitude égale environ au quart de celle de l'harmonique 7.

Avec la courbe 11 (fig. 8), l'amplitude est suffisante pour que la période fondamentale ne gêne plus ; mais les variations de vitesse

sont considérablement grossies et on voit que l'amplitude de la courbe varie constamment.

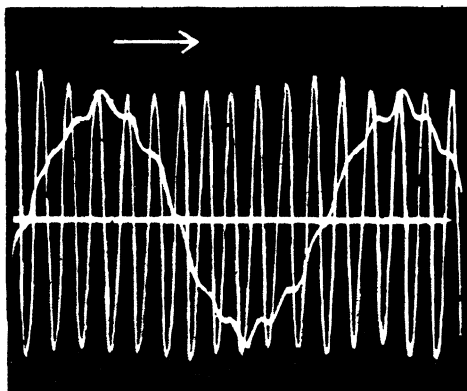


FIG. 8. — Harmonique onze.

Enfin, dans la courbe 13 (fig. 9), nous avons un curieux effet dû à l'interférence des harmoniques 11 et 13. Le premier n'est réduit qu'à 16 0/0 de sa valeur, ce qui, grâce à sa grandeur, lui donne

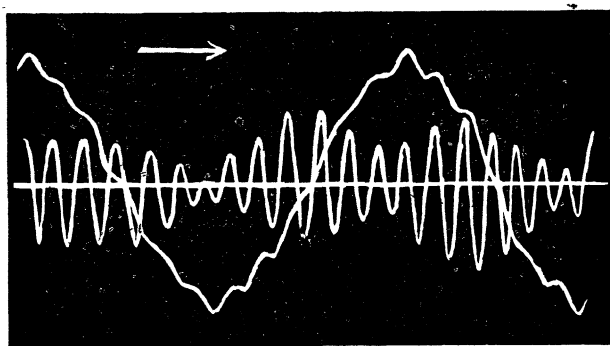


FIG. 9. — Harmonique treize interférant avec l'harmonique onze.

une amplitude du même ordre que celle de l'harmonique 13, qui est étudié. Il est évident qu'il faudrait une constante de temps énorme; mais alors les mesures deviendraient très difficiles, à cause des variations de vitesse, qui sont déjà très gênantes. L'amplitude indiquée dans le tableau, pour $n = 13$, est l'amplitude moyenne.

Valeurs relevées sur les clichés.

	L	C	R	y_n	φ	S	a_n
1	2,006	9	204	32	0	1	6,500
5	0,240	3	13	10,5	avance $0,3\pi$	1	136
7	0,240	1,60	6,8	4,2	avance $3/4\pi$	0,5	57
11	0,240	0,63	13	20	retard $\frac{\pi}{2}$	1	260
13	0,106	0,90	18,1	5	0	1	90

Valeurs observées directement (maxima).

5	0,240	3	6,8	10	0	0,5	136
7	0,240	1,60	6,8	5,5	avance $3/4\pi$	0,5	75
11	0,101	1,45	11,9	15	retard π	0,5	357

Si grossiers que soient les résultats, dans le cas particulier que nous venons d'analyser, on voit que la différence de potentiel aux bornes de la commutatrice est représentée, en valeur relative, par une équation de la forme suivante :

$$U = 6.500 \sin \omega t + 136 \sin 5\omega t + 75 \sin \left(7\omega t + \frac{3\pi}{4} \right) + 357 \sin (11\omega t - \pi) + 90 \sin 13\omega t.$$

Cette courbe renferme encore d'autres harmoniques plus élevés, le vingt-septième par exemple ; mais leur amplitude est négligeable vis-à-vis de ceux ci-dessus.

8. La méthode de résonance n'a pas été souvent employée jusqu'ici, faute de moyens commodes pour l'appliquer, et, aussi, parce qu'elle est peu connue. Il est cependant un certain nombre de questions dans lesquelles le simple examen des courbes, oscillographiques ou autres, ne peut pas donner des résultats complets.

Toutes les fois qu'on se trouve en présence d'un phénomène rigoureusement périodique, il est facile de déterminer l'équation de la courbe ; par conséquent, on peut voir l'influence des différents facteurs sur chaque harmonique et, souvent, obtenir une interprétation mathématique là où on est obligé de se servir de formules empiriques.

Parmi les questions de ce genre, l'une des plus importantes paraît être l'étude du rôle du fer dans tous les appareils électriques ; c'est même la question *type*, car, avec un courant bien régulier, on a des phénomènes rigoureusement périodiques et susceptibles d'une traduction mathématique. L'action des diélectriques pourrait être étudiée de même.

Dans les phénomènes à forme plus complexe, comme ceux de l'arc et de l'électrolyse, l'irrégularité des courbes, lorsqu'on les observe avec les oscillographes, est tout à fait décourageante; cependant on voit, en pratiquant la méthode de résonance, que les irrégularités troublent peu les résultats, et il serait intéressant d'entreprendre l'étude de ces phénomènes à ce point de vue. Les irrégularités paraissent porter exclusivement sur certains harmoniques. Ceci peut contribuer à déterminer leur nature.

Le procédé le plus exact, dans ces cas, consiste à remplacer la courbe témoin par la courbe du même harmonique, mesurée sur l'autre facteur. En effet, la puissance électrique en courant alternatif complexe est, comme l'on sait, égale à la *somme* des puissances qui correspondent à chaque harmonique; donc, en mettant côte à côte le même harmonique pris sur U et sur I , on obtient plus exactement la différence de phase et, par suite, la puissance réelle.

9. L'*irrégularité* de la vitesse des alternateurs étant une des principales difficultés que l'on rencontre dans l'emploi de la méthode de résonance, il est naturel de chercher à se servir de la perturbation produite pour mesurer cette irrégularité.

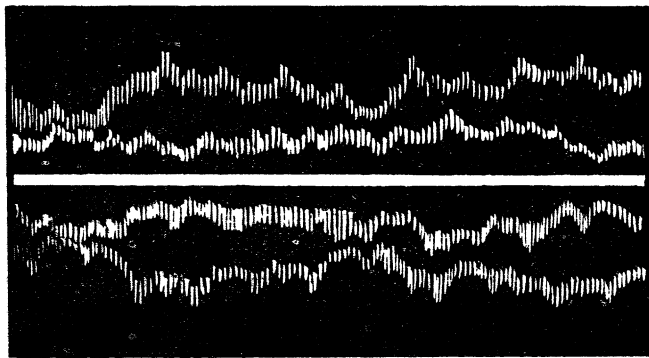


Fig. 10. — Effet des variations de vitesse. Les courbes tracées très rapidement ne sont nettement visibles qu'à leurs sommets, ce qui suffit à indiquer les variations d'amplitude.

Si, dans un oscillographe, nous supprimons le déplacement du spot en fonction du temps, nous aurons, au lieu de la courbe habituelle, un trait lumineux rectiligne, de longueur variable avec l'amplitude de la courbe observée. Si cette courbe est celle d'un harmo-

nique élevé, la variation de longueur pourra indiquer les petites variations de vitesse de l'alternateur. Il suffira de recevoir cette ligne lumineuse sur un papier sensible, enroulé sur un manchon tournant synchroniquement avec l'arbre de l'alternateur, pour obtenir un tracé en forme de ruban de largeur variable, cette *largeur* étant fonction de la vitesse angulaire réelle de la machine.

La *fig. 10* montre une application de ce genre faite sur la commutatrice étudiée ci-dessus. Les variations d'amplitude enregistrées correspondent à des variations de vitesse de 4 à 5 0/0. L'harmonique en résonance est le onzième et, sur le cliché, on voit très nettement les courbes séparées. Le déplacement en fonction du temps a été produit à la main, à la vitesse de 36 centimètres par seconde ; deux images successives se sont superposées.

Il est facile de calculer la relation entre l'*amplitude* des oscillations et l'*irrégularité* de l'alternateur. Nous avons trouvé précédemment :

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cette valeur, introduite dans (13), nous donne, pour l'amplitude :

$$\alpha = 2 \frac{a_n}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + 4n^2\omega^2 \frac{L^2}{R^2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2}}.$$

tandis qu'à la résonance parfaite nous avons :

$$\alpha_0 = 2 \frac{a_n}{R};$$

le rapport de ces valeurs donne :

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \sqrt{1 + 4n^2\omega^2 \frac{L^2}{R^2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2}.$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \pm \frac{R}{2n\omega L} \sqrt{\frac{\alpha_0^2 - \alpha^2}{\alpha^2}}.$$

Pour cette application de la méthode, il suffit de régler la résonance pour le *maximum* ou le *minimum* de la vitesse, afin d'éviter que deux valeurs de l'irrégularité donnent la même amplitude ; α_0 est alors la *plus grande* amplitude de la courbe et, pour toutes les autres valeurs α , la formule permet de calculer l'irrégularité.

larité. Il faut prendre l'*amplitude* au lieu de la distance à l'axe, à cause des harmoniques voisins qui peuvent apporter de la dissymétrie dans la courbe, comme on le voit *fig. 10*.

Le rapport $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ croissant avec la constante de temps du circuit résonateur, il faut, pour déceler les petites irrégularités, augmenter considérablement les dimensions des bobines, à moins que le courant ne renferme des harmoniques élevés.

Comme exemple, nous pouvons calculer la constante de temps qu'il faudrait employer pour mesurer des variations de $\frac{1}{2}$ degré par tour, sur les alternateurs de la Rive Gauche, en nous servant de l'harmonique 15 de ce courant. L'irrégularité sera, au minimum, de $\frac{1}{720}$; si nous voulons obtenir par ce moyen un rapport $\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1}{2}$, il faudra prendre une bobine ayant $\frac{L}{R} = 0,158$ seconde, c'est-à-dire ayant un poids de cuivre de 125 à 190 kilogrammes! Le cas échéant, une pareille bobine pourrait être formée d'une grosse botte de câble, le réglage de la résonance se faisant en éloignant ou en supprimant quelques spires.
