**SUR LA LOI DE ROTATION DIURNE
DU CHAMP OPTIQUE FOURNI PAR LE SIDÉROSTAT ET L'HÉLIOSTAT ;**

Par M. A. CORNU.

Les appareils bien connus sous le nom d'*héliostats* et de *sidérostats* permettent d'envoyer dans une direction fixe, à l'aide d'un miroir mobile, le faisceau de lumière émané d'un astre entraîné par le mouvement diurne. La théorie géométrique de ces appareils est très simple : elle réduit l'astre à un point lumineux, le faisceau incident à un rayon rectiligne, qui décrit en vingt-quatre heures un cône de révolution autour de l'axe polaire de l'appareil, parallèle lui-même à l'axe terrestre. Pour obtenir la fixité du faisceau réfléchi, il faut et il suffit que la normale au miroir soit constamment parallèle à la bissectrice de l'angle que fait le rayon venu de l'astre avec la direction fixe choisie : c'est la condition que réalisent d'une manière plus ou moins parfaite les mécanismes imaginés par S'Gravesande, Gambey, Silbermann, Foucault, etc.

Si l'on reçoit suivant l'axe principal d'une lunette le faisceau réfléchi par le miroir ainsi guidé, l'image focale de l'astre restera immobile au centre du champ de vision, malgré le déplacement angulaire de la voûte céleste. Mais cette condition de fixité, réalisée géométriquement pour l'astre visé, n'est plus remplie pour les directions voisines ; on constate aisément que le champ de vision tourne autour de son centre de manière à effectuer en vingt-quatre heures une révolution complète. La vitesse de rotation n'est pas uniforme, de sorte que le déplacement angulaire du champ varie avec le temps suivant une loi qu'il importe de déterminer.

Représentons la voûte céleste par une sphère de rayon égal à l'unité et chaque ligne de visée sur le ciel par la trace sur cette sphère d'une droite menée par le centre parallèlement à cette direction.

Soit NESW, le cercle d'horizon réel ou fictif (*fig. 1*) ; P, le pôle céleste ; Z, le zénith ; PZS, le méridien du lieu ; PD, le cercle horaire de l'astre ; D et D', le point de l'horizon réel ou fictif vers lequel le faisceau réfléchi est constamment dirigé.

La position de l'astre D est définie à chaque instant par sa distance polaire $\delta = PD$, et son angle horaire $A = SPD$ compté positivement dans le sens du mouvement diurne, de l'est E vers l'ouest W. De

la voûte céleste est donc à chaque instant symétrique de leur position directe par rapport au point M.

Il en résulte que l'orientation du champ de vision est entièrement déterminée par la connaissance de l'image réfléchie d'un point quelconque, en dehors de l'astre qui en occupe le centre. Le pôle P, par son immobilité sur la voûte céleste, est particulièrement désigné pour ce but, et son image D' constitue le repère le plus simple et le plus commode.

Nous allons donc calculer pour chaque appareil la distance et l'orientation de l'image P' du pôle, c'est-à-dire la longueur de l'arc D'P' et l'angle Y que fait cet arc avec le grand cercle PD'P₀, trace du *plan de référence*.

Sidérostat. — Sous ce nom on désigne l'appareil spécialement construit pour diriger le faisceau réfléchi vers l'horizon sud.

L'avantage de cette disposition, imaginée par Léon Foucault, est de réduire autant que possible l'angle d'incidence DM = D'M des rayons venant des astres qui, à leur passage supérieur, culminent au voisinage du zénith ou de l'équateur; les aberrations de l'image réfléchie causées par les imperfections du miroir sont ainsi notablement atténuées. La *fig. 1* représente la disposition du faisceau issu de l'astre D et renvoyé par un sidérostat dans une direction horizontale faisant avec le méridien sud un angle α compté positivement vers l'ouest; α est généralement une petite fraction de l'angle droit.

1° *Distance P'D' de l'image P' du pôle au centre D' du champ.* — L'arc D'P' est le côté du triangle MD'P' symétrique du triangle MDP, puisque MD' = MD et MP' = MP. Ces deux triangles sont égaux comme ayant un angle égal en M compris entre deux côtés égaux. Les deux côtés D'P' et DP, opposés à l'angle égal, sont donc égaux : D'P' = DP = δ . Donc : *la distance D'P' de l'image du pôle à l'image de l'astre (centre du champ) est égale à la distance polaire de l'astre visé.* D'où il résulte que *l'image du pôle décrit autour du centre du champ un cercle ayant pour rayon la distance polaire de l'astre visé.*

2° *Orientation de l'arc D'P'.* — Soit Y l'angle que l'arc D'P' fait avec D'P₀, prolongation de la trace du plan de référence DP. $Y = P_0D'P' = \pi - PD'P' = \pi - (PD'D + DD'P') = \pi - (PD'D + PDD')$, car DD'P' = PDD' en vertu de l'égalité des triangles MDP et MD'P'. L'angle cherché Y est donc le supplément des angles à la

base du triangle PDD', dont le sommet est en P. De la formule de Neper :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (B + C) = \frac{\cos \frac{1}{2} (b - c)}{\cos \frac{1}{2} (b + c)} \cotang \frac{A}{2}.$$

on déduit, en substituant $A = \text{DPD}' = H - \omega$, $b = \rho$, $c = \delta$,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} Y = \frac{\cos \frac{1}{2} (\rho + \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\rho - \delta)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (H - \omega),$$

expression qui donne l'orientation de l'arc D'P' et, par suite, la loi de la rotation du champ de vision, car H varie proportionnellement au temps.

Si l'on prend pour origine du temps le moment où l'astre visé est dans le plan de référence, $t = 0$ pour $H - \omega = 0$, et pour unité de temps le jour sidéral ou solaire (suivant l'astre considéré), on a $H - \omega = 2\pi t$, et l'expression de Y prend la forme symétrique

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} Y = K \operatorname{tang} \frac{1}{2} 2\pi t,$$

avec

$$K = \frac{\cos \frac{1}{2} (\rho + \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\rho - \delta)} \quad \text{et} \quad H - \omega = 2\pi t.$$

On en conclut aisément :

a. La rotation du champ a la même période que le mouvement diurne.

b. Elle est continue et toujours dans le même sens, direct ou inverse suivant le signe de K .

c. Le plan de référence est un plan de symétrie, car l'angle Y prend des valeurs égales et de signe contraire à des époques équidistantes de part et d'autre de l'origine du temps.

On pourrait représenter géométriquement cette loi de rotation par une courbe en prenant le temps comme abscisse, et l'angle Y comme ordonnée. Mais on aura une figuration plus directe de la rotation du champ en considérant l'arc D'P' comme le rayon vecteur mobile du cercle décrit par l'image P' du pôle et en traçant les positions suc-

cessives de ce rayon vecteur à des époques équidistantes, subdivisions aliquotes du jour. La *fig. 2* offre une représentation de ce genre sur le plan tangent à la sphère en D' ; les vingt-quatre positions successives de $D'P'$ se projettent suivant des rayons rectilignes; elles correspondent à la subdivision du jour en vingt-quatre heures. L'origine du temps $t = 0$ correspond à $D'P_0$, trace du plan de référence et axe de symétrie.

FIG. 2.

3° *Expression de la vitesse angulaire.* — La vitesse angulaire de rotation à l'époque t s'obtient en prenant la dérivée de l'expression de Y par rapport à t ; toutes réductions faites, on obtient la formule :

$$\frac{dY}{dt} = 2\pi \frac{K}{\cos^2 \pi t + K^2 \sin^2 \pi t}.$$

Le dénominateur étant essentiellement positif, la vitesse a toujours le signe de K ; elle varie périodiquement entre la valeur $2\pi K$, correspondant aux époques $t = 0, 1, 2, \dots$, et la valeur $\frac{2\pi}{K}$, correspondant aux époques intermédiaires $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, en passant par la valeur 2π , vitesse angulaire du mouvement diurne, aux époques données par la condition :

$$\cos^2 \pi t + K^2 \sin^2 \pi t = K,$$

ou

$$\tan \pi t = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + K}}.$$

Comme les positions de l'astre les plus favorables à l'observation (passage supérieur) sont voisines du plan de référence $t = 0$, la

vitesse de rotation peut être considérée comme constante et égale à $2\pi K$, car cette vitesse varie peu aux environs de $t=0$, puisqu'elle répond à un maximum ou à un minimum. La vitesse $\frac{2\pi}{K}$ n'est jamais observable avec le sidérostas, qui ne permet pas d'observer les passages inférieurs.

L'unité de vitesse angulaire est évidemment celle de 2π ou d'une circonférence par jour; si l'on voulait prendre une autre unité, exprimer, par exemple, la vitesse en minutes d'arc par minutes de temps, ou plus généralement en n^{mes} de circonférence par m^{mes} de jour, il suffirait de remplacer 2π par $\frac{n}{m}$. En effet, ce changement d'unités revient à poser :

$$\frac{Y}{2\pi} = \frac{y'}{n}, \quad \frac{t'}{1} = \frac{\pi}{m},$$

d'où :

$$\frac{dy'}{d\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{n}{m} \frac{dY}{dt}.$$

Comme il y a $n = 360 \times 60$ minutes d'arc dans la circonférence et $m = 24 \times 60$ minutes de temps, la vitesse $2\pi K$, devenue $\frac{n}{m} K$, est ici égale à $15K$; on retrouve bien $15'$ d'angle par minute de temps pour la vitesse angulaire du mouvement diurne $K = 1$.

4° *Sens du mouvement de rotation du champ de vision.* — On doit supposer l'observateur recevant le faisceau lumineux; par conséquent il dirige son regard vers le centre de la sphère suivant le rayon qui aboutit en D' , d'où il résulte que le sens du mouvement de rotation sera celui qu'un observateur placé suivant la direction D' en dehors de la sphère attribuera au mouvement de l'arc $D'P'$. D'après l'expression de Y , on voit que Y et $R = \omega$ seront de même signe, si le coefficient K est positif. On connaît le sens du mouvement diurne, c'est-à-dire le sens de la variation positive de R ; on voit sur la *figure* que, quand l'ascension droite de l'astre D grandit, l'arc PD , vu de l'extérieur de la sphère, tourne dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre; donc pour K positif, Y varie dans le même sens. La condition pour que K soit positif est évidemment :

$$\cos \frac{1}{2} (\rho + \delta) > 0, \quad \frac{1}{2} (\rho + \delta) < \frac{\pi}{2}, \quad \delta < \pi - \rho.$$

D'où l'on conclut :

Lorsque la distance polaire de l'astre visé est moindre que le supplément de la distance polaire de la direction réfléchie, le sens apparent de la rotation du champ de vision du sidérostas est celui du mouvement des aiguilles d'une montre.

Il est de sens contraire, si la distance polaire de l'astre est moindre que ce supplément. L'observation avec une lunette astronomique ne change pas le sens de la rotation : le renversement des images se borne à tourner de 180° la direction origine $D'P_0$.

5° *Distance polaire critique : champ de vision immobile.* — La transition entre ces deux cas correspond à la condition $K = 0$, c'est-à-dire $\cos \frac{1}{2}(\rho + \delta) = 0$; la valeur de Y demeure constamment nulle, quelle que soit l'ascension droite de l'astre ; donc :

Le champ de vision du sidérostas reste rigoureusement immobile lorsque la distance polaire de l'astre visé est égale au supplément de la distance polaire de la direction réfléchie.

Ce cas d'immobilité absolue du champ correspond à une particularité géométrique qui rend le résultat évident : on démontre, en effet, aisément que, si $\rho + \delta = \pi$, l'arc $PM = \frac{\pi}{2}$; la normale au miroir devient normale à la ligne des pôles ; le miroir est donc parallèle à l'axe terrestre. En outre, l'arc PM bissecte l'angle DPD' ; par suite, le miroir tourne d'un angle égal à la moitié de la variation de l'angle horaire. Ce sont les deux conditions caractéristiques du *Cœlostas* de M. Lippmann⁽¹⁾, appareil très simple qui donne une image du ciel absolument fixe ; il se compose, en effet, d'un miroir tournant autour d'un axe parallèle à son plan et à l'axe terrestre avec une vitesse angulaire égale à la moitié de celle du mouvement diurne et de même sens.

Le sidérostas peut donc remplacer le cœlostas pour une région du ciel située autour d'un astre de distance polaire δ ; il suffit de choisir pour direction du faisceau réfléchi l'une de celles qui satisfont à la condition $\rho + \delta = \pi$, c'est-à-dire l'une des génératrices du cône de révolution faisant avec l'axe terrestre l'angle $\pi - \delta$ ou supplément de la distance polaire. Il est bon de connaître cette propriété du sidérostas, car on peut, dans certaines circonstances, l'utiliser sans grande complication expérimentale.

(1) C. R. de l'Acad. des Sciences, t. CXX, p. 1015.

6° *Sidérostat orienté dans le méridien.* — C'est le mode d'installation le plus ordinaire du sidérostat; le faisceau réfléchi horizontalement est dirigé exactement vers le sud. Il en résulte que $\omega = 0$, $\rho = \pi - L$, L étant la latitude. L'angle Y est l'angle que fait l'arc $D'P'$ avec le méridien devenu le plan de référence et de symétrie. L'expression de Y prend la forme :

$$\tan \frac{1}{2} Y = K \tan \frac{1}{2} H,$$

avec

$$K = \frac{\sin \frac{1}{2} (L - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (L + \delta)}.$$

Les énoncés précédents deviennent alors très simples.

Avec le sidérostat orienté dans le méridien, le champ de vision est immobile, lorsque la distance de l'astre visé est égale à la latitude du lieu d'observation; la rotation du champ a lieu dans le sens des aiguilles d'une montre, si cette distance polaire est moindre que la latitude; en sens inverse, si elle est plus grande.

Le coefficient K , qui définit la valeur pratiquement constante de la vitesse de rotation du champ en fonction de la rotation diurne, est toujours plus petit que l'unité.

En voici les valeurs numériques pour la latitude de Paris, $L = 48^\circ 50'$, δ croissant de 10° en 10° (passage supérieur) :

δ	K	δ	K
0° (pôle).....	+ 1,000	70°	— 0,213
10	0,677	80	— 0,298
20	0,440	90	— 0,376
30	0,238	100	— 0,448
40	+ 0,103	110	— 0,518
$48\ 50 = L$	0,000	120	— 0,583
50	— 0,013	130	— 0,651
60	— 0,120		

Helio-stat. — C'est l'appareil qui renvoie le faisceau réfléchi dans une direction voisine de l'horizon nord, rarement au-delà du NE ou du NW.

La *fig. 3* représente le faisceau issu de l'astre D et renvoyé dans la direction horizontale D'' , faisant avec le méridien nord un angle $NPD'' = \alpha'$, compté positivement vers l'est. Le pôle est en P ; SPD est

l'angle horaire, et δ la distance polaire de l'astre visé D. Nous désignerons par $\omega' = \text{NPD}''$ et $\rho' = \text{PD}''$ l'angle horaire et la distance polaire de la direction réfléchie D'', qu'on déduit comme précédemment de l'azimut α' et de la latitude L au moyen du triangle rectangle NPD''. La normale M au miroir est au milieu de l'arc DD'' et l'image P'' du pôle sur l'arc PM prolongé de telle sorte que $\text{MP}'' = \text{MP}$.

FIG. 3.

L'angle de rotation du champ sera déterminé par l'angle que fait l'arc D''P'' avec la trace du plan de référence PD''.

Soit $Y' = \text{PD}''\text{P}''$ cet angle; on le déduirait aisément de l'expression de Y relative au sidérostas, dont la définition est analogue; mais il est plus simple de le calculer directement.

Les triangles PDM et P''D''M sont égaux comme ayant un angle égal en M compris entre deux côtés égaux $\text{DM} = \text{D}''\text{M}$, $\text{PMP}''\text{M}$. Donc $\text{D}''\text{P}''\text{DP} = \delta$.

Ainsi, comme avec le sidérostas, l'image du pôle réfléchie par l'héliostat décrit, autour du centre du champ, un cercle ayant pour rayon la distance polaire de l'astre visé.

D'autre part:

$$Y' = \text{PD}''\text{P} = \text{PD}''\text{D} + \text{DD}''\text{P}'' = \text{PD}''\text{D} + \text{D}''\text{DP}',$$

en vertu de l'égalité des deux triangles PMD et P''MD''. L'angle Y est donc la somme des deux angles à la base du triangle PDD'' dont le sommet est en P. De la formule de Neper citée plus haut on déduit, en substituant :

$$b = \rho', \quad c = \delta \quad \text{et} \quad A = \pi - A' + \omega',$$

$$\tan \frac{1}{2} Y' = \frac{\cos \frac{1}{2} (\rho' - \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\rho' + \delta)} \tan \frac{1}{2} (A' - \omega').$$

Y est compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre. On met également cette expression sous la forme :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} Y' = K' \operatorname{tang} \frac{1}{2} 2\pi t,$$

en posant :

$$K' = \frac{\cos \frac{1}{2} (\rho' - \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\rho' + \delta)} \quad \text{et} \quad H - \omega' = 2\pi t.$$

On retrouve les trois conclusions (a), (b), (c), démontrées ci-dessus pour le sidérostàt (p. 252). Nous ne répéterons pas la discussion, qui serait toute semblable; mais nous insisterons sur la différence qui existe au point de vue pratique entre les deux appareils: avec l'héliostat, le coefficient K' est toujours plus grand que l'unité et conserve le signe positif dans les conditions où l'on utilise d'ordinaire l'héliostat, c'est-à-dire dans l'observation du passage supérieur des astres au voisinage du zénith ou de l'équateur, réfléchis dans une direction qui ne s'écarte pas beaucoup de l'horizon du nord.

En effet on peut, en développant la valeur des cosinus, écrire K' sous la forme :

$$K' = \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \delta}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \delta}.$$

Le signe $+$ du coefficient K' correspond ici, comme on le voit sur la figure, à une variation de Y' de sens contraire à celle de l'angle horaire R . Donc on en conclut :

Le champ de vision de l'héliostat, dans les conditions où il est utilisable, tourne avec une vitesse angulaire toujours plus grande que celle du mouvement diurne; le sens de la rotation est celui des aiguilles d'une montre.

Cette conclusion met en évidence une nouvelle cause d'infériorité de l'héliostat sur le sidérostàt : à l'inconvénient provenant de la réflexion sous de grandes incidences sur le miroir de l'héliostat, se joint celui d'une grande vitesse de rotation du champ de vision. Ces deux conditions sont défavorables pour les observations qui exigent, dans les images, une grande perfection en même temps qu'une complète stabilité : c'est ce qui fait préférer le sidérostàt pour l'astronomie de précision.

Mais cette rapidité de rotation du champ n'est pas toujours un inconvénient ; pour certaines observations astrophysiques, elle est, au contraire, avantageuse, en ce sens qu'elle dispense de l'emploi de dispositifs optiques complexes et délicats ; en voici un exemple :

Imaginons qu'on projette, à l'aide d'un objectif convenable, l'image solaire réfléchi par un héliostat sur la fente d'un spectroscope à grande dispersion pour étudier le déplacement des raies, dû aux mouvements de la surface du soleil. La condition la plus favorable se présente quand l'équateur solaire est normal à la fente ; si l'on balance cette image de manière à amener successivement les bords opposés du disque tangentiellement à cette fente, on obtient le double du déplacement maximum provenant de la différence des vitesses radiales sur le pourtour de l'équateur (méthode du balancement des raies).

A moins de circonstances exceptionnelles, l'image du disque solaire ne se présentera pas dans cet azimut favorable et aura peu de chance de l'atteindre, si l'on emploie un sidérostas, puisque, avec cet appareil, la vitesse de rotation du champ de vision est nulle ou très petite.

Pour amener l'équateur dans l'azimut demandé, on est obligé d'avoir recours à un appareil auxiliaire composé, par exemple, d'un prisme isocèle à réflexion totale, mobile autour d'un axe parallèle à sa base ; la rotation de ce prisme entraîne d'un angle double l'azimut du disque solaire, ce qui permet d'amener successivement l'équateur perpendiculairement à la fente dans les deux positions à 180° , qui reproduisent le double déplacement maximum en ordre inverse. Mais le prisme doit être très parfait, comme matière et planéité des surfaces ; de plus, la monture rotative qui l'entraîne est assez difficile à construire et à régler.

Avec l'héliostat, la rotation spontanée du champ de vision dispense de cet appareil auxiliaire ; il suffit d'attendre l'effet de cette rotation, et l'on voit l'équateur solaire se placer de lui-même perpendiculairement à la fente. A certaines époques de l'année, pour certaines orientations de la fente et du faisceau réfléchi par l'héliostat, cette condition de perpendicularité se présente deux fois dans la même journée, à quelques heures d'intervalle, l'image de l'équateur solaire tournant de 180° .

Ce résultat, que j'ai découvert par expérience et observé plusieurs fois, m'a beaucoup surpris au premier abord ; je pensais qu'il fallait

environ douze heures pour que l'image réfléchie du disque solaire pût tourner de 180° autour de son centre. Aussi est-ce la recherche de l'explication de ce phénomène qui est l'origine du présent travail. La discussion complète exigerait des développements assez longs. Je me bornerai ici à indiquer le principe des démonstrations.

L'explication repose sur la grandeur relative de la vitesse de rotation du champ de l'héliostat, lorsque l'astre visé est voisin de l'équateur ($\delta = 90^\circ$). Le coefficient K' , qui la mesure en fonction de la rotation diurne, est, en effet, pour le soleil entre les deux solstices, compris entre 2 et 5.

Voici la Table des valeurs de K' , dans le cas usuel où l'héliostat est orienté dans le méridien, le faisceau réfléchi dirigé horizontalement vers le nord; on substitue, dans la formule $\omega' = 0$, $\rho' = L = 40^\circ 50'$, δ croissant de 10° en 10° (passages supérieurs) :

δ	K'	δ	R
0° (pôle).....	1,000	70°	1,932
10	1,083	80	2,231
20	1,174	90 (équinoxe).....	2,663
30	1,277	100	3,358
40	1,396	113 37 (solstice d'hiver)...	5,489
50	1,537	110	4,687
60	1,710	120	8,359
66 38 (solstice d'été).....	1,849		

La valeur K' tend vers l'infini, qu'elle atteint lorsque l'astre est à l'horizon sud : c'est, en effet, une distance polaire critique $\rho + \delta = \pi$, qui correspond d'ailleurs à l'incidence rasante sur le miroir.

La connaissance de la valeur K' permet de calculer la durée qui s'écoule entre les époques t_1 et t_2 , entre lesquelles l'image du champ a tourné de 180° . Soient Y'_1 la valeur de l'angle Y' à l'époque t_1 , où l'équateur solaire, par exemple, est normal à la fente du spectroscope, et $Y'_2 = Y'_1 + \pi$ la valeur Y'_1 augmentée de 180° à l'époque t_2 . On aura les deux conditions :

$$\tan \frac{1}{2} Y'_1 = -K \tan \pi t_1, \quad \cotang \frac{1}{2} Y'_2 = K' \tan \pi t_2.$$

Multipliant membre à membre, il vient finalement :

$$\tan \pi t_1 \tan \pi t_2 = -\frac{1}{K^2}.$$

Le signe — montre que les deux époques t_1 et t_2 (supposées aussi

rapprochées que possible) sont de signe contraire, ce qui signifie que les deux positions correspondantes de l'astre sont situées de part et d'autre du plan de référence (ici, du plan méridien); il faut excepter les cas limites où $t = 0$ et $t = \frac{1}{2}$. Soit $\theta = t_2 - t_1$ la différence des deux époques; si l'on se donne t_1 , on calculera t_2 . L'intérêt est surtout de connaître les deux époques pour lesquelles cette différence est minimum.

Écrivons donc $d\theta = 0$, c'est-à-dire $dt_2 - dt_1 = 0$, et différencions la relation qui lie t_1 à t_2 ; il vient, tous calculs faits,

$$\sin \pi (t_2 + t_1) \cos \pi (t_2 - t_1) = 0.$$

C'est la solution $t_2 - t_1 = 0$ qui donne le minimum cherché; l'autre, $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$, donne le maximum de 12 heures, qui n'a pas d'intérêt.

Les deux époques cherchées, symétriques par rapport à $t = 0$, sont mesurées par des durées égales et de signe contraire; substituant, pour avoir leur valeur absolue,

$$\tan \pi t = \frac{1}{K'}.$$

En donnant à K' les valeurs croissantes depuis $K' = 1$ (rotation uniforme), qui donne $t = \frac{1}{4}$ de jour ou 6 heures et $t_2 - t_1 = 12$ heures, on trouve que l'intervalle $\theta = t_2 - t_1$ se resserre de plus en plus. Appliquant le calcul à la détermination de cette différence θ aux trois époques les plus intéressantes relatives au soleil, on obtient :

Solstice d'été.....	⁰ 7 ^h 54
Equinoxe	5 30
Solstice d'hiver.....	2 43

résultats qui démontrent la possibilité de voir tourner l'équateur de 180° en beaucoup moins de 12 heures.

D'ailleurs, la rotation n'a pas besoin d'être exactement de 180° pour montrer successivement les deux effets inverses du balancement des raies, car la vitesse absolue des parallèles solaires ne diminue que de $\frac{1}{10}$ jusqu'à $\pm 23^\circ$ de latitude héliocentrique, de sorte

qu'un déplacement de $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ suffit à montrer le double phénomène dans toute sa netteté.

Il resterait à déterminer les orientations du faisceau réfléchi les plus favorables à l'observation; mais ce problème est assez complexe et mérite d'être traité à part.

Ce qui précède suffit à montrer que, même dans les particularités des instruments qui, au premier abord, paraissent des imperfections fâcheuses, on trouve des ressources utilisables pour d'autres genres d'expériences. L'étude approfondie des appareils, dans leurs propriétés géométriques, apporte, le plus souvent, quelque particularité susceptible de rendre des services inattendus.