Déformations électriques des diélectriques solides isotropes

P. Sacerdote

DÉFORMATIONS ÉLECTRIQUES DES DIÉLECTRIQUES SOLIDES ISOTROPES (1);

Par M. P. SACERDOTE.

On sait depuis longtemps que, lorsqu'un diélectrique solide devient le siège d'un champ électrique, il se déforme; exemple : par la charge, la capacité interne et le volume extérieur d'une bouteille de Leyde augmentent; un condensateur cylindrique s'allonge, etc. Ces phénomènes ont été étudiés expérimentalement par divers physiciens : Fontana, Volpicelli, Govi, Duter, Righi, Quincke, Korteweg et Julius, Cantone. D'autres ont essayé d'en prévoir les lois par la théorie : Moutier, Korteweg, Lorberg, Kirchhoff, Röntgen, Vaschy, Curie, Duhem (2). Mais les résultats expérimentaux étaient en contradiction les uns avec les autres sur certains points; il en était de même des résultats théoriques, et, en outre, ceux-ci ne s'accordaient pas complètement avec les premiers. Je me suis proposé :

1° D'établir les *formules de déformation des diélectriques des condensateurs*, en me basant uniquement sur les principes fondamentaux de la conservation de l'énergie et de l'électricité; — d'en dégager les *lois*, — et d'en déduire les *causes* de ces phénomènes;

2° En passant ensuite en revue les divers essais de théorie précédemment faits, je montrerai que toutes les divergences qu'ils présentaient entre eux n'étaient dues qu'à des erreurs et qu'une fois celles-ci rectifiées on retombe toujours sur des résultats en accord avec ma théorie;

3° Enfin la critique des travaux expérimentaux nous indiquera pourquoi ils n'ont pas toujours confirmé les prévisions théoriques.

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE.

Dans ce qui suit, je ferai constamment intervenir les *variations qu'éprouve la constante diélectrique d'un solide primitivement isotrope lorsqu'on le déforme mécaniquement.*

Cette question n'a presque pas été étudiée jusqu'à présent; je vais

(1) Extrait d'un mémoire plus étendu qui paraîtra prochainement.
(2) Voir la bibliographie qui est à la fin du mémoire complet.

donc tout d'abord donner à ce sujet quelques définitions et établir quelques relations fondamentales.

Découpons dans notre solide isotrope une lame plane rectangulaire à faces parallèles et prenons-la comme diélectrique d'un condensateur plan dont les lignes de force seront perpendiculaires aux faces de la lame : soient x la direction de ces lignes de force, y et z celles des côtés du rectangle. Si nous soumettons la lame à une traction infiniment petite (dq par unité de surface) dans l'une des directions y ou z, elle se déformera et sa constante diélectrique deviendra :

$$(\mathrm{K} + d_1\mathrm{K}).$$

$\frac{1}{\mathrm{K}}\frac{d_1\mathrm{K}}{dq} = k_1$ sera par définition : le *coefficient de variation de la constante diélectrique par une traction perpendiculaire aux lignes de force;* on déduit de là :

$$d_1\mathrm{K} = k_1\,(\mathrm{K}dq).$$

Si, de même, nous soumettons la lame à une traction infiniment petite dq suivant la direction x des lignes de force, la constante diélectrique deviendra $(\mathrm{K} + d_2\mathrm{K})$ et $\frac{1}{\mathrm{K}}\frac{d_2\mathrm{K}}{dq} = k_2$ sera le *coefficient de variation de la constante diélectrique par traction parallèle aux lignes de force;* d'où :

$$d_2\mathrm{K} = k_2\,(\mathrm{K}dq).$$

Nous admettrons que :

1° La *variation de la constante diélectrique change de signe*, comme la déformation, si l'on exerce des *pressions au lieu de tractions;*

2° En outre, comme il s'agit de déformations très petites : la *variation de la constante diélectrique par plusieurs tractions simultanées est la somme de celles que produirait chacune de ces tractions agissant séparément.*

Ceci posé, il serait facile d'établir les propositions suivantes :

I. *Si une lame de forme et d'épaisseur quelconques est soumise sur toute sa surface à une traction normale et uniforme, la variation de la constante diélectrique est* $(2k_1 + k_2)\mathrm{K}dq$; nous désignerons souvent $k = 2k_1 + k_2$ sous le nom de *coefficient de variation de la constante diélectrique par traction superficielle, uniforme.*

II. *Étant donnée une lame diélectrique sphérique infiniment mince*, les lignes de force dirigées suivant les rayons, *la constante diélec-*

trique varie de $\pm \frac{R}{e} k_1 K dp$ *lorsqu'on soumet cette lame à une pression uniforme dp s'exerçant sur la face interne ou externe seulement* (R et e désignent le rayon et l'épaisseur de la lame).

I. — Théorie.

Soit une lame diélectrique dont les faces S_1, S_2 (*fig.* 1) ont été couvertes d'une couche conductrice (infiniment mince) de manière à former un condensateur fermé; désignons par :

U_1, le volume de la cavité interne;

U_2, le volume extérieur du diélectrique;

$U = U_2 - U_1$, le volume de la matière diélectrique.

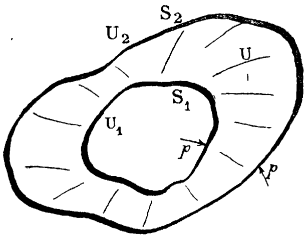

Fig. 1.

Je me propose de trouver les variations (ΔU), (ΔU_1), (ΔU_2), quand on charge le condensateur à une différence de potentiel V.

Variation de volume de la matière diélectrique (ΔU). — Imaginons qu'il s'exerce sur S_1 et S_2 une *pression* p, et maintenons la *température constante;* l'état du système sera fonction de deux variables pV; pour une transformation dp, dV, il faudra fournir un travail $d\mathfrak{T}$ donné par :

$$d\mathfrak{T} = V dM - p dU,$$

M désignant la charge électrique du condensateur.

$M = CV$, si C représente la capacité électrique;

dM est une différentielle exacte d'après le principe de la conservation de l'électricité. On peut donc écrire :

$$d\mathfrak{T} = V\left(\frac{\partial M}{\partial V} dV + \frac{\partial M}{\partial p} dp\right) - p\left(\frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial p} dp\right)$$
$$= \left(V \frac{\partial M}{\partial V} - p \frac{\partial U}{\partial V}\right) dV + \left(V \frac{\partial M}{\partial p} - p \frac{\partial U}{\partial p}\right) dp.$$

Or $d\mathfrak{S}$ doit être une différentielle exacte, puisque la température reste constante :

$$V\frac{\partial^2 M}{\partial V \partial p}-\frac{\partial U}{\partial V}-p\frac{\partial^2 U}{\partial V\partial p}=\frac{\partial M}{\partial p}+V\frac{\partial^2 M}{\partial V\partial p}-p\frac{\partial^2 U}{\partial p\partial V};$$

d'où :

$$\frac{\partial U}{\partial V}=-\frac{\partial M}{\partial p}=-V\frac{\partial C}{\partial p}.$$

La variation de la capacité par la pression $\frac{\partial C}{\partial p}$ est faible, on peut donc négliger ses propres variations avec V, c'est-à-dire regarder $\frac{\partial C}{\partial p}$ comme indépendant de V ; en intégrant, on a alors :

$$(1) \qquad \Delta U=\left(-\frac{\partial C}{\partial p}\right)\frac{V^2}{2} \qquad \text{ou} \qquad \Delta U=\left(-\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial p}\right)W,$$

en désignant par W l'énergie dite électrique du condensateur.

Cette formule est vraie, quelle que soit la valeur de p ; elle nous donnera encore la déformation pour $p = o$, c'est-à-dire dans le cas du condensateur libre qui est celui que nous voulons étudier.

Occupons-nous maintenant du terme $\left(-\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial p}\right)$; la capacité électrique est proportionnelle à une fonction linéaire des dimensions géométriques et à la constante diélectrique **K** ; quand la pression p change de dp, le diélectrique reste semblable à lui-même et isotrope ; le coefficient de diminution linéaire est $\frac{\gamma}{3}$, en désignant par γ le coefficient de compressibilité cubique de la matière diélectrique ; quant au coefficient de variation de la constante diélectrique, nous avons vu dans l'étude préliminaire qu'il était $(-k)$; donc :

$$\left(-\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial p}\right)=-\frac{\gamma}{3}-k\,;$$

d'où :

$$(1') \qquad \Delta U=\left(\frac{\gamma}{3}+k\right)W.$$

Remarque. — On pourrait faire un raisonnement identique dans le cas où, au lieu d'un condensateur fermé quelconque, il s'agirait d'un condensateur *plan* ou *cylindrique* et plus généralement d'un condensateur constitué par une lame diélectrique quelconque métallisée sur ses deux faces; les formules (1), (1′) s'appliquent donc à tous les cas.

Cas particulier où le diélectrique est une lame plane ou une lame mince de forme quelconque. — La formule (1′) peut alors être encore transformée, car $C = \frac{SK}{4\pi e}$, S désignant la surface de la lame, et e son épaisseur; on a alors :

$$(1'') \qquad \Delta U = \left(\frac{\Upsilon}{3} + k\right) \frac{K}{8\pi} S \frac{V^2}{e} \qquad \text{et comme } U = Se$$

$$(1''') \qquad \frac{\Delta U}{U} = \left(\frac{\Upsilon}{3} + k\right) \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2} = \left(\frac{\Upsilon}{3} + k\right) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

Je reviendrai plus loin sur les lois indiquées par ces formules.

Variation de volume de la cavité interne (ΔU_1). — Imaginons le diélectrique soumis à une *pression p_1 s'exerçant seulement sur la face interne* S_1 ; un raisonnement identique au précédent donnera :

$$(2) \qquad \Delta U_1 = \left(\frac{\partial C}{\partial p_1}\right) \frac{V^2}{2}.$$

Variation de volume extérieur (ΔU_2). — Imaginons le diélectrique soumis à une *pression p_2 s'exerçant seulement sur la surface externe* S_2 ; le même raisonnement donnera :

$$(3) \qquad \Delta U_2 = \left(-\frac{\partial C}{\partial p_2}\right) \frac{V^2}{2}.$$

Mais, dans ces deux derniers cas, la pression ne s'exerçant que sur la face interne ou sur la face externe, à la variation dp correspondra pour les diélectriques une déformation complexe qui ne le laissera ni semblable à lui-même, ni isotrope; nous ne pouvons donc plus transformer les égalités (2), (3), comme nous l'avons fait pour (1); mais, dans le cas particulier du *condensateur sphérique* (et aussi *plan* ou *cylindrique*), on pourra pousser le calcul à fond et *obtenir les lois qui régissent les déformations* (ΔU_1), (ΔU_2), tout aussi bien que celles (1″) auxquelles obéit la *variation de volume de la matière diélectrique;* c'est ce que nous allons faire maintenant.

APPLICATION AU CAS DU CONDENSATEUR SPHÉRIQUE INFINIMENT MINCE.

Soit R le rayon; et e l'épaisseur supposée très petite par rapport à R.

Variation de volume de la cavité interne. — La formule obtenue dans le cas général était :

$$(2) \qquad \Delta U_1 = \left(\frac{\partial C}{\partial p_1}\right)\frac{V^2}{2}; \qquad \text{mais ici} \qquad C = \frac{KR^2}{e}$$

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial p_1} = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial p_1} + \frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial p_1} - \frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial p_1};$$

or, d'après l'étude préliminaire faite plus haut :

$$\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial p_1} = \frac{R}{e}k_1,$$

et d'après les formules qui donnent la déformation élastique de la sphère mince([1]), on a :

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial p_1} = a(1-\sigma)\frac{R}{2e}, \qquad \frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial p_1} = -a\sigma\frac{R}{e};$$

donc :

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial p_1} = \frac{R}{e}k_1 + 2a(1-\sigma)\frac{R}{2e} + a\sigma\frac{R}{e} = \frac{R}{e}(a+k_1);$$

la formule (2) devient alors, en remplaçant C et $\frac{\partial C}{\partial p_1}$ par leurs valeurs :

$$(4) \qquad \Delta U_1 = 3(a+k_1)\frac{K}{8\pi}U_1\frac{V^2}{e^2},$$

formule qui peut s'écrire :

$$(4') \qquad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3(a+k_1)\frac{K}{8\pi}H^2.$$

Remarque. — En désignant par (L) la longueur d'une ligne quelconque tracée sur la sphère ou bien encore celle du rayon, on aura :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{3}\frac{\Delta U_1}{U_1},$$

ou

$$(4'') \qquad \frac{\Delta L}{L} = (a+k_1)\frac{K}{8\pi}H^2.$$

Variation du volume extérieur (ΔU_2). — Elle est égale à la variation de volume (ΔU_1) de la cavité, car le diélectrique est supposé infiniment mince.

([1]) Voir à ce sujet : Sacerdote, *Sur les déformations élastiques des vases minces* (*J. de Phys.*, p. 516) (1898) : je rappelle que, dans ces formules, a désigne le coefficient d'allongement longitudinal ou l'inverse du module d'élasticité de Young ; et σ, le coefficient de Poisson.

Il est également intéressant de calculer la :

Variation d'épaisseur de la lame diélectrique. — Le volume de la matière diélectrique étant $U = 4\pi R^2 e$, on a :

$$\frac{\Delta U}{U} = 2\left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta e}{e}\right); \quad \text{mais} \quad U_1 = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad \text{donc} \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$$

et par suite :

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta U}{U} - \frac{2}{3}\frac{\Delta U_1}{U_1};$$

en remplaçant $\left(\frac{\Delta U}{U}\right)$ et $\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)$ par leurs valeurs tirées de ($1'''$) et ($4'$), on a :

$$\frac{\Delta e}{e} = \left(\frac{\gamma}{3} + k - 2k_1 - 2a\right)\frac{K}{8\pi}H^2;$$

mais on a vu dans l'étude préliminaire que $k = 2k_1 + k_2$, et on sait, de plus, que $\gamma = 3a(1 - 2\sigma)$, donc :

$$\left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -\left[a(1 + 2\sigma) - k_2\right]\frac{K}{8\pi}H^2. \tag{5}$$

CAS DU CONDENSATEUR SPHÉRIQUE D'ÉPAISSEUR QUELCONQUE.

Soient R_1 et R_2 les deux rayons; e, l'épaisseur du diélectrique $e = R_2 - R_1$; la capacité électrique est :

$$C = \frac{KR_1R_2}{e}.$$

Variations du volume de la cavité (ΔU_1) *et du volume extérieur* (ΔU_2). — Nous allons montrer qu'on peut déduire ces déformations de la sphère épaisse des formules obtenues pour la sphère infiniment mince ; le calcul, quoique encore assez difficile, sera cependant plus commode que celui auquel on serait conduit en essayant d'appliquer à ce cas les formules générales (2), (3) obtenues pour (ΔU_1) (ΔU_2).

Soit V le potentiel auquel on porte l'armature interne, tandis que l'externe est au sol ; à une distance r du centre, le potentiel est :

$$v = \frac{V}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right), \quad \text{en posant :} \quad \varepsilon = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}.$$

Considérons (*fig.* 2) une tranche sphérique infiniment mince, A, comprise, avant la déformation, entre les rayons r et $(r + dr)$, et après celle-ci entre les rayons $(r + \rho)$ et $(r + dr + \rho + d\rho)$, ρ étant une fonction de r.

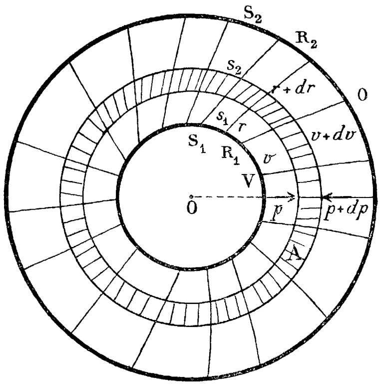

FIG. 2.

Cette tranche A se déforme :

1° Parce qu'elle est soumise sur ses deux faces s_1 et s_2 à des pressions p et $(p + dp)$ provenant de l'action du diélectrique soit intérieur, soit extérieur à A (p est aussi une fonction de r) ;

2° Parce qu'il existe une différence de potentiel dv entre ses deux faces :

$$dv = -\frac{V}{\varepsilon r^2}\,dr.$$

La déformation due à la première cause est donnée immédiatement par les formules de déformation élastique de la sphère mince [1] :

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)_1 = -a(1-2\sigma)\,p - a\,\frac{1-\sigma}{2}\,r\,\frac{dp}{dr},$$
$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_1 = -a(1-2\sigma)\,p + a\sigma r\,\frac{dp}{dr}.$$

Quant à celle due à la différence de potentiel, elle est fournie par les formules de déformation électrique du condensateur sphérique

(1) Voir *J. de Phys.*, *loc. cit.*

infiniment mince, établies un peu plus haut :

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)_2 = (a + k_1)\,\frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{\varepsilon^2 r^4}.$$

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_2 = -\,[a(1 + 2\sigma) - k_2]\,\frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{\varepsilon^2 r^4}.$$

La déformation totale s'obtiendra en additionnant, ce qui donne :

$$(\alpha)\quad \frac{\rho}{r} = -\,a\,\frac{1-\sigma}{2}\,r\,\frac{dp}{dr} - a(1 - 2\sigma)\,p + (a + k_1)\,\frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{r^4},$$

$$(\beta)\quad \frac{d\rho}{dr} = a\sigma r\,\frac{dp}{dr} - a(1 - 2\sigma)\,p - [a(1 + 2\sigma) - k_2]\,\frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{r^4};$$

de l'égalité (α) tirons par différentiation $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)$ et égalons la valeur obtenue à celle que donne (β); nous arrivons à l'équation différentielle :

$$a\,\frac{1-\sigma}{2}\,r\,\frac{d^2p}{dr^2} + 2a(1-\sigma)\,\frac{dp}{dr} + \frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{\varepsilon^2}\,[2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2]\,\frac{1}{r^5} = 0,$$

dont la solution est :

$$p = -\,\frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{\varepsilon^2}\left[1 + \frac{3k_1 + k_2}{2a(1-\sigma)}\right]\frac{1}{r^4} + \frac{A}{r^3} + B,$$

A et B étant deux constantes que l'on détermine par les conditions limites $p = 0$ pour $r = R_1$ et pour $r = R_2$; on déduit de là :

$$(\gamma)\quad \frac{dp}{dr} = \frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{\varepsilon^2}\left[1 + \frac{3k_1 + k_2}{2a(1-\sigma)}\right]\left(4 - 3\,\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}\,\frac{r}{R_1R_2}\right)\frac{1}{r^5}.$$

Ce que nous voulons obtenir, ce sont les valeurs de $\left(\frac{\rho}{r}\right)$ pour $r = R_1$ et $r = R_2$ $\left(\text{nous les désignerons par } \frac{\Delta R_1}{R_1} \text{ et } \frac{\Delta R_2}{R_2}\right)$; pour les avoir, il suffit maintenant de faire successivement dans l'équation (α) :

$r = R_1$, $p = 0$, $\frac{dp}{dr}$ = la valeur donnée par (γ) pour $r = R_1$,

$r = R_2$, $p = 0$, $\frac{dp}{dr}$ — — $r = R_2$.

On obtient après calculs :

$$(6)\quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2}\left[a + k_1 - [2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2]\left(1 - \frac{3}{4R_2}\,\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}\right)\right]\frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{e^2},$$

$$(7)\quad \frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}\left[a + k_1 - [2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2]\left(1 - \frac{3}{4R_1}\,\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}\right)\right]\frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{e^2}.$$

En outre, comme $e = R_2 - R_1$, on a $\Delta e = \Delta R_2 - \Delta R_1$, ce qui donne après calculs :

$$(8) \quad \frac{\Delta e}{e} = \left[[a(1 - 2\sigma) + 2k_1 + k_2] \frac{R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2}{R_1R_2} \right.$$
$$\left. - [2a(1 - \sigma) + 3k_1 + k_2] \frac{3}{4} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3} \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2} \right] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2}.$$

Dans le cas où la sphère est *assez mince* pour qu'on puisse *négliger les puissances de* $\frac{e}{R_1}$ *supérieures à la première*, ces formules deviennent :

$$(6') \quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = \left\{ a + k_1 + \frac{e}{R_1} \left[a(1 + \sigma) + \frac{k_1 - k_2}{2} \right] \right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2},$$

$$(7') \quad \frac{\Delta R_2}{R_2} = \left\{ a + k_1 - \frac{e}{R_1} \left[a(1 + \sigma) + \frac{k_1 - k_2}{2} \right] \right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2},$$

$$(8') \quad \frac{\Delta e}{e} = - [a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2}.$$

Enfin, en *négligeant* $\frac{e}{R_1}$, on retrouve bien les formules (4″) et (5) relatives à la sphère infiniment mince.

Remarque. — Rappelons que l'on a en outre (6′ *bis*) $\frac{\Delta U_1}{U_1} = 3 \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} \right)$ et (7′ *bis*) $\frac{\Delta U_2}{U_2} = 3 \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} \right)$.

CAS DU CONDENSATEUR CYLINDRIQUE.

En suivant une marche analogue à celle que nous venons d'employer pour les condensateurs sphériques, on établirait (1) d'abord les formules de déformation du condensateur cylindrique infiniment mince ; puis on en déduirait celles relatives au condensateur cylindrique, d'épaisseur quelconque.

Pour abréger, nous donnerons seulement les formules dans le cas où le cylindre est *mince*, c'est-à-dire où les puissances de $\frac{e}{R}$, supérieures à la première, sont négligeables :

R_1, R_2 désignent les deux rayons ; e, l'épaisseur du diélectrique

(1) Voir le mémoire complet.

$e = R_2 - R_1$; l, la longueur du tube :

$$(9) \quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = \left\{a + k_1 + \frac{e}{2R_1}\left[2a(1+\sigma) + k_1 - k_2\right]\right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2},$$

$$(10) \quad \frac{\Delta R_2}{R_2} = \left\{a + k_1 - \frac{e}{2R_1}\left[2a(1+\sigma) + k_1 - k_2\right]\right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2},$$

$$(11) \quad \frac{\Delta l}{l} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2},$$

$$(12) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \left\{3(a + k_1) + \frac{e}{R_1}\left[2a(1+\sigma) + k_1 - k_2\right]\right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2},$$

$$(13) \quad \frac{\Delta U_2}{U_2} = \left\{3(a + k_1) - \frac{e}{R_1}\left[2a(1+\sigma) + k_1 - k_2\right]\right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2};$$

$$(14) \quad \frac{\Delta e}{e} = -\left[a(1 + 2\sigma) - k_2\right] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2}.$$

Si le condensateur est *infiniment mince* $\left(\frac{e}{R} \text{ négligeable}\right)$, ces formules se réduisent à :

$$(15) \quad \frac{\Delta R}{R} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2,$$

$$(16) \quad \frac{\Delta l}{l} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2,$$

$$(17) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3(a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2,$$

$$(18) \quad \frac{\Delta e}{e} = -\left[a(1 + 2\sigma) - k_2\right] \frac{K}{8\pi} H^2.$$

Ces formules se rapportent au cas où le condensateur cylindrique serait de longueur infinie ; mais je montre que, sous certaines réserves, elles sont *encore applicables* aux cas suivants, qui sont ceux réalisés dans les expériences :

1° Le condensateur est formé d'un tube diélectrique cylindrique *métallisé sur une partie seulement de sa longueur;*

2° Le condensateur est formé d'une partie cylindrique *fermée à ses deux extrémités par des calottes*, hémisphériques par exemple.

CAS DU CONDENSATEUR PLAN.

Les calculs sont alors particulièrement simples dans ce cas [1] et conduisent aux formules suivantes, en désignant par L la longueur

[1] Voir SACERDOTE, *Déformation électrique des diélectriques* (*C. R. de l'Acad. des Sciences*, t. CXXVI, p. 1019; 1898).

de toute ligne perpendiculaire à la direction du champ, et par e l'épaisseur du diélectrique dans la direction de ce champ :

$$(19)\qquad \frac{\Delta L}{L} = (a + k_1)\,\frac{K}{8\pi}\,H^2,$$

$$(20)\qquad \frac{\Delta e}{e} = -\,[a(1 + 2\sigma) - k_2]\,\frac{K}{8\pi}\,H^2.$$

RÉSUMÉ. — ÉNONCÉS DES LOIS.

Les formules précédemment établies montrent que pour les *condensateurs infiniment minces* (au moins pour ceux de forme sphérique et cylindrique) et pour le *condensateur plan*, en désignant d'une façon générale par :

L, *la longueur d'une ligne quelconque perpendiculaire aux lignes de force ;*

e, *l'épaisseur du diélectrique dans la direction de ces lignes de force*, on a :

$$(\mathrm{I})\ \frac{\Delta L}{L} = (a + k_1)\,\frac{K}{8\pi}\,H^2 \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{I}')\ \Delta L = (a + k_1)\,\frac{K}{8\pi}\,L\,\frac{V^2}{e^2};$$

$$(\mathrm{II})\ \frac{\Delta e}{e} = -[a(1+\sigma) - k_2]\,\frac{K}{8\pi}\,H^2 \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{II}')\ \Delta e = -[a(1+2\sigma) - k_2]\,\frac{K}{8\pi}\,\frac{V^2}{e}.$$

Et *maintenant qu'il est établi* (formule I) que la *dilatation est la même dans toutes les directions perpendiculaires aux lignes de force*, et la même quelle que soit la *forme* ou la *grandeur* du condensateur, il *devient évident* qu'en désignant par U_1 *le volume d'une cavité* et *par* U *le volume de la matière diélectrique*, on a:

$$(\mathrm{III})\ \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3\left(\frac{\Delta L}{L}\right) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{IV})\ \frac{\Delta U}{U} = 2\left(\frac{\Delta L}{L}\right) + \left(\frac{\Delta e}{e}\right),$$

ou en tenant compte des relations vues plus haut:

$$(\mathrm{III}')\ \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3(a + k_1)\,\frac{K}{8\pi}\,H^2 \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{III}'')\ \Delta U_1 = 3(a + k_1)\,\frac{K}{8\pi}\,U_1\,\frac{V^2}{e^2},$$

$$(\mathrm{IV}')\ \frac{\Delta U}{U} = \left(\frac{\Upsilon}{3} + k\right)\frac{K}{8\pi}\,H^2 \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{IV}'')\ \Delta U = \left(\frac{\Upsilon}{3} + k\right)\frac{K}{8\pi}\,S\,\frac{V^2}{e}.$$

formules qui sont, du reste, bien celles trouvées directement.

Nous pouvons traduire les formules précédentes sous forme de lois : soit en les prenant sous leur forme (I), (II), (III'), (IV') : *Lois des déformations unitaires*, — soit en prenant les formules équivalentes (I'), (II'), (III''), (IV'') : *Lois des déformations.*

LOIS DES DÉFORMATIONS UNITAIRES.

Toutes les déformations unitaires que subit le diélectrique sont proportionnelles au carré de l'intensité du champ électrique ou encore proportionnelles au carré du potentiel et à l'inverse du carré de l'épaisseur du diélectrique, — les coefficients qui dépendent uniquement de la nature du diélectrique étant:

$(a + k_1) \frac{K}{8\pi}$ pour les variations de longueur perpendiculairement aux lignes de force et, par suite, $3(a + k_1) \frac{K}{8\pi}$ pour les variations de volume des cavités;

$-[a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi}$ pour les variations de longueur dans la direction des lignes de force; $\left(\frac{\gamma}{3} + k\right) \frac{K}{8\pi}$ pour les variations de volume de la matière diélectrique; par conséquent, ni la *forme*, ni la *grandeur du condensateur n'ont aucune influence.*

LOIS DES DÉFORMATIONS.

Première loi. — *Toute ligne perpendiculaire aux lignes de force* éprouve une *variation de longueur proportionnelle* à sa *longueur*, au *carré du potentiel* et à l'*inverse du carré de l'épaisseur du diélectrique.*

Deuxième loi. — L'*épaisseur du diélectrique* (dans la direction du champ) varie *proportionnellement au carré du potentiel et* à l'*inverse de cette épaisseur.*

Troisième loi. — Les *cavités éprouvent des variations de volume* proportionnelles à leur *volume*, au *carré du potentiel*, et à l'*inverse du carré de l'épaisseur du diélectrique.*

Quatrième loi. — La *matière diélectrique* éprouve une *variation de volume proportionnelle à la surface du condensateur*, au *carré du potentiel* et à *l'inverse de l'épaisseur du diélectrique*, autrement dit *proportionnelle à l'énergie dite électrique* du condensateur.

Cas général. — Si nous passons maintenant au cas où le condensateur, au lieu d'être *infiniment mince*, est seulement *mince*, ou plus généralement d'*épaisseur quelconque*, nous voyons immédiatement par l'inspection des formules que :

Aucune des lois précédentes ne subsiste, sauf celle relative à la proportionnalité entre la grandeur des déformations et le carré du potentiel: en particulier, les *différentes lignes perpendiculaires aux lignes de force* appartenant soit à un même condensateur (ex. : lignes circulaires et génératrices d'un cylindre), soit à des condensateurs de formes différentes, *subissent des dilatations unitaires inégales;* — et aussi la *relation* $\frac{\Delta U_1}{U_1} = 3\frac{\Delta L}{L}$ *n'est plus exacte* (sauf si U_1 et L se rapportent à un *même* condensateur de forme *sphérique*) ; etc.

COMPLÉMENT A LA THÉORIE PRÉCÉDENTE. — CAS OU LES ARMATURES SONT INDÉPENDANTES DU DIÉLECTRIQUE.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les *armatures du condensateur subissaient les mêmes déformations que les surfaces diélectriques en contact;* — c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque les armatures sont formées par la métallisation de la surface du diélectrique lui-même (argenture, feuilles d'étain collées, etc.) ou par des liquides.

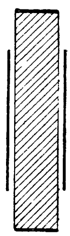

FIG. 3.

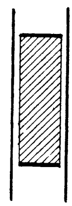

FIG. 4.

Mais il est intéressant de se rendre compte de ce que deviennent les formules dans le cas, *moins usuel*, où les *armatures sont indépendantes du diélectrique*, c'est-à-dire dans les cas où il existe entre les armatures et le diélectrique solide un intervalle d'air ou de vide, la surface et la distance des armatures restant alors invariables, malgré la déformation du diélectrique. Cette étude nous entraînerait trop loin ici (1) ; en voici seulement le résultat dans le cas d'une *lame diélectrique plane séparée des armatures par un intervalle d'air infiniment mince*.

(1) Voir le mémoire complet.

Si la *lame déborde les armatures* (*fig.* 3), on obtient :

$$\frac{\Delta L}{L} = [- a\sigma (K - 1) + k_1] \frac{K}{8\pi} H^2,$$

$$\frac{\Delta e}{e} = [a (K - 1) + k_2] \frac{K}{8\pi} H^2.$$

Si la *lame est comprise entre les armatures* (*fig.* 4), on a :

$$\frac{\Delta L}{L} = \left[a (1 - \sigma) \frac{K - 1}{K} - a\sigma (K - 1) + k_1\right] \frac{K}{8\pi} H^2,$$

$$\frac{\Delta e}{e} = \left[- 2a\sigma \frac{K - 1}{K} + a (K - 1) + k_2\right] \frac{K}{8\pi} H^2.$$

En rapprochant ces formules de (I), (II), obtenues plus haut, on arrive à cette conclusion qui nous conduira dans un prochain article à une conséquence importante :

Dans le cas où les *armatures sont indépendantes du diélectrique*, les *termes des coefficients qui contiennent les coefficients élastiques* (a, σ) sont *complètement différents*, comme grandeur et même comme signe, *de ceux obtenus dans le cas où il y a contact entre les armatures et les diélectriques ; — au contraire, les termes en* (k_1, k_2, k) *restent toujours les mêmes.*

(*A suivre.*)