Corrections relatives aux extrémités des tubes dans la méthode de Poiseuille

M. Couette

CORRECTIONS RELATIVES AUX EXTRÉMITÉS DES TUBES DANS LA MÉTHODE DE POISEUILLE;

PAR M. M. COUETTE.

Le coefficient de frottement intérieur ε d'un liquide coulant, suivant le premier régime, dans un tube circulaire indéfini de rayon R, avec un débit q et une différence de charge C entre deux sections droites distantes de l, est donné par la formule

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4 C}{8 l q}. \tag{1}$$

Mais, si le tube est limité à la longueur l, et qu'alors C soit la différence de charge entre les réservoirs d'amont et d'aval, cette formule doit être modifiée par deux termes correctifs.

Le premier est la dépense de charge qui se fait, à l'entrée du tube, pour communiquer au liquide sa vitesse d'écoulement. L'application du théorème des forces vives m'a permis (1) d'en calculer la valeur, qui est $\frac{\rho q^2}{\pi^2 R^4}$, c'est-à-dire double de celle que l'on trouve pour une vitesse en mince paroi.

Le second est relatif aux frottements qui se produisent au voisinage des extrémités du tube, surtout de l'entrée, tant au dehors que dans la région intérieure, où le mouvement n'est pas encore le même que dans un tube indéfini. J'ai montré qu'il pouvait être représenté par un allongement fictif Λ du tube, probablement de l'ordre de grandeur de quelques diamètres, mais dont je n'ai pu assigner *a priori* la valeur.

En conséquence, la formule (1) doit être remplacée par la suivante (2) :

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4\left(C - \frac{\rho q^2}{\pi^2 R^4}\right)}{8(l + \Lambda) q}. \tag{2}$$

---

(1) Thèse de doctorat, p. 66; 1890.

(2) La formule de M. E. Hagenbach (*Pogg. Ann.*, t. CIX, 1860), souvent employée en Allemagne, diffère de la nôtre : 1° en ce que $\frac{\rho q^2}{\pi^2 R^4}$ y est multiplié par $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, 2° par l'absence de Λ.

En désignant par ε_1 et ε_2 les deux valeurs approchées que l'on obtient en négligeant les deux corrections ou seulement la seconde, nous poserons

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi R^4 C}{8 l q}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\pi R^4 \left(C - \frac{\rho q^2}{\pi^2 R^4}\right)}{8 l q},$$

et nous aurons par suite les relations

$$(3) \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \frac{\rho q}{8 \pi l},$$

$$(4) \qquad \varepsilon = \varepsilon_2 \frac{l}{l + \Lambda}.$$

Dans la première série des expériences de Poiseuille [1], les corrections se sont trouvées négligeables, à cause de la petitesse du débit q et de la grandeur du rapport $\frac{l}{R}$. Mais, dans la seconde série, elles ont une influence notable, qui fait croître rapidement ε_1 en même temps que q dans un même tube. Au contraire, ε_2 ne croît que très lentement. Par exemple [2], pendant que

ε_1 varie de 0,0138 à 0,0186,
ε_2 varie de 0,0136 à 0,0139.

Cela montre : 1° l'importance et l'exactitude de la correction de force vive; 2° la constance approximative de Λ relativement aux variations de q.

Les valeurs de ε_2 données, pour les plus faibles débits, par deux tubes de même rayon et de longueurs différentes ($l = 1^{cm},575$ et $l' = 0^{cm},6775$) sont notablement différentes

$$\varepsilon_2 = 0{,}01329, \qquad \varepsilon'_2 = 0{,}01363,$$

ce qui prouve que Λ n'est pas nul. Donc, en ralentissant l'écoulement, sans augmenter la longueur du tube, on peut rendre négligeable la dépense de charge à l'entrée, mais on ne rend pas négligeable l'allongement fictif.

Mais, quand on diminue la longueur d'un tube sans modifier l'orifice d'entrée, il semble évident que l'on n'altère pas Λ; et

(1) *Mémoires des savants étrangers*, t. IX.
(2) *Loc. cit.* Tableaux II et IV de la deuxième série, p. 465-467.

alors l'application de la formule (4) aux deux longueurs successives, fournit deux équations

$$\varepsilon = \varepsilon_2 \frac{l}{l + \Lambda} = \varepsilon'_2 \frac{l'}{l' + \Lambda},$$

qui déterminent les deux inconnues ε et Λ. On trouve ainsi, pour l'exemple cité,

$$\Lambda = 0^{\text{cm}},041,$$

c'est-à-dire à peu près le triple du diamètre ($0^{\text{cm}},014$) des tubes, et

$$\varepsilon = 0,01303,$$

nombre qui diffère de moins de $\frac{1}{200}$ de celui (0,01309) que donne la première série de Poiseuille.