Pouvoir rotatoire et double réfraction

M. Monnory

▶ **To cite this version:**

M. Monnory. Pouvoir rotatoire et double réfraction. J. Phys. Theor. Appl., 1890, 9 (1), pp.277-287. 10.1051/jphystap:018900090027701 . jpa-00239098

HAL Id: jpa-00239098
https://hal.science/jpa-00239098

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

POUVOIR ROTATOIRE ET DOUBLE RÉFRACTION;

PAR M. MONNORY.

La théorie des effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction a été établie par M. Gouy (1).

Je me propose d'appliquer cette théorie à l'étude de la transformation d'une vibration rectiligne traversant normalement une lame biréfringente douée de pouvoir rotatoire. Le cas le plus simple, le seul que j'examinerai, est celui où la vibration incidente est parallèle ou perpendiculaire à la section principale de la lame. La vibration émergente est en général elliptique; elle sera définie par l'angle α de son grand axe avec la direction de la vibration incidente et par le rapport K de ses deux axes.

Cette question a déjà été étudiée par M. Wiener (2) qui a obtenu par des considérations géométriques l'expression de $\operatorname{tang} 2\alpha$. On peut, en employant la méthode analytique habituelle, établir cette expression, ainsi que celle du rapport des axes et faire la discussion complète.

Soit une vibration incidente parallèle à la section principale de la lame, et rapportée à deux axes coordonnés rectangulaires, l'axe des x étant parallèle à la section principale. Cette vibration a pour équation, en supposant, pour simplifier, son amplitude égale à l'unité,

$$x = \sin 2\pi \frac{t}{\theta}.$$

On peut la décomposer en deux vibrations privilégiées ayant

(1) GOUY, *Journal de Physique*, 2e série, t. IV, p. 149 et suiv.; 1885.
(2) WIENER, *Wiedemann's Annalen*, 1888, et *Journal de Physique*, 1889.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphystap:018900090027701

pour équations (¹)

$$(I)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{1+k^2}\sin 2\pi\dfrac{t}{\theta}, \\ y = \dfrac{k}{1+k^2}\cos 2\pi\dfrac{t}{\theta}; \end{cases}$$

$$(II)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{k^2}{1+k^2}\sin 2\pi\dfrac{t}{\theta}, \\ y = -\dfrac{k}{1+k^2}\cos 2\pi\dfrac{t}{\theta}, \end{cases}$$

la quantité k étant assujettie, dans tous les cas possibles, à être plus petite que l'unité en valeur absolue.

Ces deux vibrations se propagent sans altération, mais avec des vitesses différentes, et prennent par leur passage à travers la lame une différence de marche δ, comptée en vibrations ou en ondes. En reportant, pour simplifier, l'origine des temps au moment où la vibration (II) arrive sur la face postérieure de la lame, on a pour équations des vibrations privilégiées émergentes

$$(I')\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{1+k^2}\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{\theta}+\delta\right), \\ y_1 = \dfrac{k}{1+k^2}\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{\theta}+\delta\right), \end{cases}$$

$$(II')\qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{k^2}{1+k^2}\sin 2\pi\dfrac{t}{\theta}, \\ y_2 = -\dfrac{k}{1+k^2}\cos 2\pi\dfrac{t}{\theta}. \end{cases}$$

Elles se recomposent en une vibration elliptique dont les coordonnées X, Y satisfont aux relations

$$(III)\qquad \begin{cases} X = x_1 + x_2, \\ Y = y_1 + y_2. \end{cases}$$

En éliminant x_1, x_2, y_1, y_2 et $\dfrac{t}{\theta}$ entre les six dernières équations, on trouve pour équation de la vibration émergente

$$(1)\qquad \begin{cases} [k(1-\cos 2\pi\delta)X + \sin 2\pi\delta\, Y]^2 \\ \quad + [(k^2+\cos 2\pi\delta)Y + k\sin 2\pi\delta\, X]^2 = \left[\dfrac{k(1+k^2)(1-\cos 2\pi\delta)}{1+k^2}\right]^2. \end{cases}$$

(¹) Gouy, *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. IV, p. 157.

C'est une ellipse de la forme

$$aX^2 + bXY + cY^2 = d.$$

L'angle α d'un des axes de l'ellipse avec l'axe des x et le rapport K des axes de l'ellipse ont pour expressions

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{b}{a-c},$$

$$K^2 = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$$

et, en remplaçant a, b et c par leurs valeurs en fonction de k et de δ,

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{\dfrac{2k}{1-k^2}\,\dfrac{1+k^2}{1-k^2}\sin 2\pi\delta}{1+\left(\dfrac{2k}{1-k^2}\right)^2\cos 2\pi\delta}, \tag{2}$$

$$K^2 = \frac{1-\sqrt{\left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2}\right)^4+\left(\dfrac{2k}{1+k^2}\right)^2\left[1+\left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2(2-\cos 3\pi\delta)\cos 2\pi\delta\right]}}{1+\sqrt{\left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2}\right)^4+\left(\dfrac{2k}{1+k^2}\right)^2\left[1+\left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2(2-\cos 2\pi\delta)\cos 2\pi\delta\right]}}. \tag{3}$$

Soit φ la différence de marche, comptée en vibrations, que produirait la double réfraction seule entre deux vibrations rectilignes respectivement parallèles à chacun des axes de coordonnées, et soit ω l'angle dont le pouvoir rotatoire seul ferait tourner le plan de polarisation d'une vibration rectiligne, on peut examiner quatre cas suivant les signes de ω et de φ. Dans chacun des cas, on déterminera facilement le sens de la giration de chaque vibration privilégiée. Il suffira de remarquer (1) que la vibration privilégiée, dont le grand axe est parallèle à celui qui prendrait l'avance en vertu de la double réfraction seule, a une giration de même sens que le pouvoir rotatoire du milieu. C'est aussi cette vibration qui se propage le plus vite. Supposons, par exemple, ω négatif, c'est-à-dire le pouvoir rotatoire dextrorsum et φ positif, c'est-à-dire l'axe des x prenant l'avance en vertu de la double réfraction seule, les vibrations (I) et (II) seront représentées par la *fig.* 1 ci-contre. Les quantités k et δ seront toutes deux positives. D'ailleurs δ aura

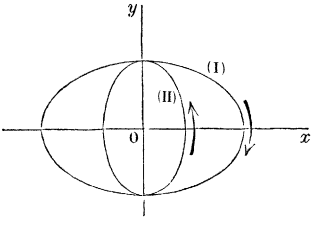
(1) Gouy, *Journal de Physique*, 2e série, t. IV, p. 158, renvoi.

toujours le signe de φ. En faisant un raisonnement analogue pour *tous* les cas, on peut dresser relativement aux signes de δ et de k le Tableau suivant :

$$\omega < 0 \begin{cases} \varphi > 0 \begin{cases} \delta > 0, \\ k > 0, \end{cases} \\ \varphi < 0 \begin{cases} \delta < 0, \\ k < 0, \end{cases} \end{cases}$$

$$\omega > 0 \begin{cases} \varphi > 0 \begin{cases} \delta > 0, \\ k < 0, \end{cases} \\ \varphi < 0 \begin{cases} \delta < 0, \\ k > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Fig. 1



Les quantités δ et k ont pour expressions, l'épaisseur de la lame étant prise pour unité (1),

$$k = \pm \frac{\pi\varphi}{\omega} \pm \sqrt{1 + \frac{\pi^2\varphi^2}{\omega^2}},$$

$$\delta = -\frac{\omega}{2\pi}\frac{1+k^2}{k} = \pm\sqrt{\varphi^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2}}.$$

On en tire, en se reportant pour les signes au Tableau ci-dessus, les relations suivantes applicables à tous les cas :

$$\frac{2k}{1-k^2} = -\frac{\omega}{\pi\varphi},$$

$$\frac{2k}{1+k^2} = -\frac{\omega}{\pi\delta},$$

$$\frac{1+k^2}{1-k^2} = \frac{\delta}{\varphi}.$$

(1) Gouy, *Journal de Physique*, 2e série, t. IV, p. 155 et 158.

Ces valeurs introduites dans les équations (2) et (3) donnent facilement

$$\tan g\, 2\alpha = \frac{\pi\omega\delta \sin 2\pi\delta}{\pi^2\varphi^2 + \omega^2 \cos 2\pi\delta}, \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} K^2 &= \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi^2\varphi^2\omega^2}{(\pi^2\varphi^2+\omega^2)^2}\sin^2\sqrt{\pi^2\varphi^2+\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\pi^2\varphi^2\omega^2}{(\pi^2\varphi^2+\omega^2)^2}\sin^2\sqrt{\pi^2\varphi^2+\omega^2}}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{\pi^2\delta^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\pi^2\delta^2}\right)\sin^2\pi\delta}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{\pi^2\delta^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\pi^2\delta^2}\right)\sin^2\pi\delta}}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

DISCUSSION.

Le second membre de l'équation (4) donne en grandeur et en signe la valeur de $\tan g\, 2\alpha$; cette valeur reste la même si l'on change δ en $-\delta$. Le signe de δ est d'ailleurs toujours le même que celui de φ. Par suite, *l'action de la lame est indépendante du signe de la double réfraction.* Il suffit, pour faire la discussion, d'attribuer un signe à ω. On considérera dans ce qui suit ω comme positif; on examinera successivement deux cas :

1° Celui d'une lame produisant naturellement les effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction et dont l'épaisseur seule est variable;

2° Celui d'une lame d'épaisseur donnée dont on fait varier le pouvoir rotatoire et le pouvoir biréfringent, comme dans les expériences de M. Chauvin (1) ou dans celles de M. Wedding (2).

Premier cas. — Les quantités ω, φ, δ sont alors proportionnelles à l'épaisseur, les rapports $\frac{\omega\varphi}{\omega}$, $\frac{\pi\delta}{\omega}$ et la quantité k sont constants. En se reportant aux équations (2) et (5), on voit que α et K sont des fonctions périodiques de δ dont la période est égale à

(1) Chauvin, *Thèse de doctorat* et *Journal de Physique*, 2e série, t. IX, p. 1 et suiv.; 1890.

(2) W. Wedding, *Wiedemann's Annalen*, 1888, et *Journal de Physique*, 1889.

l'unité; il suffit donc de considérer des épaisseurs croissantes faisant varier δ de 0 à 1.

La dérivée de $\operatorname{tang} 2\alpha$ s'annule pour la valeur

$$\cos 2\pi\delta_m = \frac{\omega^2}{\pi^2\varphi^2};$$

les maxima ou minima de α ont alors pour expression

$$\operatorname{tang} 2\alpha_m = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2\varphi^2}{\omega^2} - 1}}; \tag{6}$$

ils ne peuvent exister que si l'on a

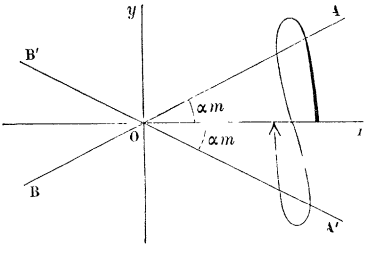
$$\frac{\omega}{\pi\varphi} < 1.$$

La dérivée de K s'annule avec l'expression $\sin^3\pi\delta\cos\pi\delta$, c'est-à-dire pour $\delta = 1$ qui correspond au minimum zéro, et pour $\delta = \frac{1}{2}$ qui correspond au maximum

$$K_m = \frac{\omega}{\pi\varphi}.$$

On est ainsi conduit à examiner trois hypothèses.

Fig. 2.



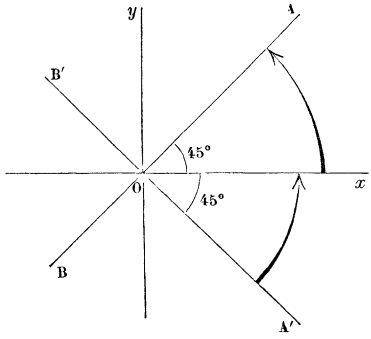
Pour $\frac{\omega}{\pi\varphi} < 1$ l'angle α présente un maximum et un minimum donnés par l'équation (6) et dont la valeur absolue est plus petite que 45°. Lorsque δ croît de zéro à $\frac{1}{2}$, le grand axe de la vibration émergente tourne d'abord dans le sens de la polarisation rotatoire jusqu'à une position limite AB (*fig.* 2) qu'il atteint pour la valeur δ_m et qui fait avec l'axe des x l'angle α_m. Puis *le grand axe de l'ellipse tourne en sens inverse de la polarisation rotatoire,*

pour reprendre la direction Ox qu'il atteint pour $\delta = \frac{1}{2}$. Le rapport des axes augmente constamment depuis zéro jusqu'à la valeur maximum $\frac{\omega}{\pi\varphi}$. Lorsque δ varie de $\frac{1}{2}$ à 1, l'ellipse prend des positions symétriques par rapport à l'axe des x.

Pour $\frac{\omega}{\pi\varphi} = 1$, on a

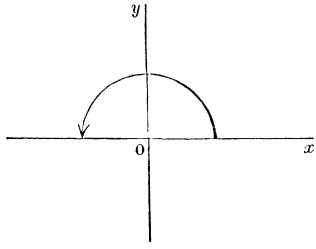
$$\operatorname{tang} 2\alpha = \operatorname{tang} \pi\delta.$$

Fig. 3.



Lorsque δ varie de zéro à $\frac{1}{2}$, le grand axe de l'ellipse tourne dans le sens de la polarisation circulaire d'un angle de 45°, jusqu'à la position OA (*fig.* 3), et le rapport des axes augmente constamment

Fig. 4.



de 0 à 1 ; pour $\delta = \frac{1}{2}$ la vibration est circulaire. Puis δ continuant à croître, le grand axe passe brusquement de la position AB à la position symétrique A'B', et l'ellipse prend des positions symétriques par rapport à l'axe des x.

Enfin, pour $\frac{\omega}{\pi\varphi} > 1$ il n'y a ni maximum ni minimum pour α.

Lorsque δ croît de o à $\frac{1}{2}$, le grand axe de l'ellipse tourne dans le sens de la polarisation circulaire d'un angle de 90° et le rapport des axes augmente constamment de o à $\frac{\pi\varphi}{\omega}$. Lorsque δ varie de o à 1, l'ellipse continue à tourner dans le même sens en prenant des positions symétriques par rapport à l'axe des x (1).

Second cas. — *Vibration circulaire.* — Lorsqu'une vibration elliptique est fonction de deux variables, les valeurs des variables les plus instructives sont celles qui rendent la vibration circulaire. L'expression du rapport des axes peut s'écrire

$$K = \frac{1 - \sqrt{1 - A}}{1 + \sqrt{1 - A}},$$

en posant

$$A = \frac{4\pi^2\varphi^2\omega^2}{(\pi^2\varphi^2 + \omega^2)^2} \sin^4\pi\sqrt{\varphi^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2}}.$$

Pour que la vibration devienne circulaire, il faut que A soit égal à l'unité. Chacun des deux facteurs qui composent l'expression de A a pour maximum l'unité. Le premier facteur atteint cette valeur lorsqu'on a

$$\omega = \pi\varphi,$$

et le second facteur lorsque

$$\varphi^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2} = \frac{(2n+1)^2}{4},$$

n étant un nombre entier quelconque.

La vibration deviendra donc circulaire pour les valeurs de φ et de ω satisfaisant aux relations

$$\varphi^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2} = \frac{(2n+1)^2}{8}.$$

Ce sont ces mêmes valeurs qui rendent, ainsi qu'on devait s'y attendre, l'expression de $\operatorname{tang} 2\alpha$ indéterminée.

Rotations nulles. — Lorsque $\sin 2\pi\delta$ est nul, il en est de même

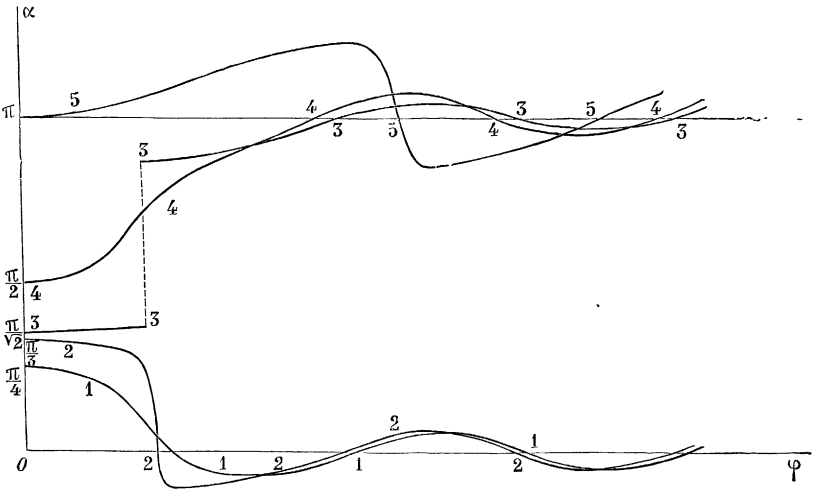
(1) M. Wiener a obtenu l'expression de $\operatorname{tang} 2\alpha$ et la plupart des résultats de cette discussion au moyen d'une construction géométrique.

de tang 2α. On a alors

$$\varphi^2 = \frac{n^2}{4} - \frac{\omega^2}{\pi^2}, \tag{7}$$

n étant un nombre entier quelconque.

Fig. 5.



Vibrations rectilignes. — Elles ont lieu pour $A = 0$. On a alors

$$\varphi^2 = n^2 - \frac{\omega^2}{\pi^2}.$$

Représentation des résultats. — On peut représenter les rotations par des courbes en portant les valeurs de φ en abscisses et en ordonnées les valeurs de α correspondantes pour une même valeur de ω. On fait ensuite varier ω.

Pour $\varphi = 0$, on a $\alpha = \omega$; la dérivée de tang 2α par rapport à φ a alors pour expression

$$2\omega + \sin 2\omega \cos 2\omega - 2 \sin 2\omega.$$

Elle s'annule pour la valeur

$$\omega_1 = 61^\circ 16' 59'';$$

elle est négative pour $\omega < \omega_1$ et positive pour $\omega > \omega_1$.

Considérons une valeur de ω inférieure à ω_1, par exemple

$$\omega = \frac{\pi}{4}.$$

La variation de α est représentée (*fig.* 5) par la courbe 1 (1). Lorsque φ augmente, α diminue d'abord jusqu'à 0; en même temps, le rapport des axes commence par croître, puis la courbe oscille asymptotiquement de part et d'autre de l'axe des x. La rotation s'annule lorsqu'on a

$$\varphi^2 = \frac{n^2}{4} - \frac{1}{16}.$$

Pour les valeurs paires de n, la vibration redevient rectiligne. Les valeurs impaires de n rendent maximum le second facteur de l'expression de A et, par suite, donnent au rapport des axes une valeur *voisine* du maximum. M. Chauvin a vérifié le premier de ces résultats et sensiblement le second pour un cristal de spath placé dans un champ magnétique (2).

Lorsque ω augmente $\left(\text{courbe } 2;\ \omega = \frac{\pi}{3}\right)$, la transformation de l'ellipse est analogue; la rotation, d'abord plus lente, s'accélère ensuite (en même temps que le rapport des axes augmente), puis diminue très rapidement jusqu'à zéro; la courbe coupe l'axe des x pour des valeurs de φ plus petites que pour les courbes précédentes.

Pour les valeurs de ω comprises entre ω_1 et $\frac{\pi}{\sqrt{8}}$, α commence par augmenter, puis diminue très rapidement jusqu'à zéro et varie ensuite comme précédemment.

Pour $\omega = \frac{\pi}{\sqrt{8}}$ (courbe 3), α croît d'abord lentement, pendant que le rapport des axes augmente *très vite;* lorsque φ atteint la valeur $\frac{1}{\sqrt{8}}$, la vibration est circulaire. *En passant par la forme circulaire, le grand axe tourne brusquement de* $\frac{\pi}{2}$. La rotation

(1) L'échelle adoptée est telle que $\varphi = 1$ est représenté par la même longueur que $\omega = \pi$.

(2) Chauvin, Thèse de doctorat, *Journal de Physique,* 2e série, t. IX, p. 25 et 26; 1890.

est nulle pour les valeurs de φ données par la relation (7), n étant un nombre entier plus grand que l'unité; n étant pair, la vibration est de plus rectiligne; n étant impair, le rapport des axes est voisin d'un maximum.

Lorsque ω est compris entre $\frac{\pi}{\sqrt{8}}$ et $\frac{3\pi}{\sqrt{8}}$ (courbes 4 et 5; $\omega = \frac{\pi}{2}$ et $\omega = \pi$), α, après avoir augmenté, gagne la valeur π pendant que le rapport des axes augmente jusqu'à un maximum, puis diminue jusqu'à zéro. La courbe oscille ensuite asymptotiquement de part et d'autre de π, et la discussion s'achève comme précédemment.

Pour $\omega = \frac{3\pi}{\sqrt{8}}$, les variations sont semblables à celles qui correspondent à $\omega = \frac{\pi}{\sqrt{8}}$; la rotation croît d'abord lentement pendant que le rapport des axes augmente très rapidement. Pour $\varphi = \frac{3\pi}{\sqrt{8}}$ la vibration devient circulaire, la rotation croît brusquement de $\frac{\pi}{2}$; puis elle augmente lentement avec φ et atteint la valeur 2π; elle oscille ensuite asymptotiquement de part et d'autre de cette valeur.

On peut ainsi étendre la discussion à toutes les valeurs de ω. Les courbes qui correspondent aux valeurs de ω données par $\omega = \frac{(2n+1)\pi}{\sqrt{8}}$ affectent la même allure. La vibration devient circulaire pour $\varphi = \frac{2n+1}{\sqrt{8}}$ et tourne brusquement de $\frac{\pi}{2}$; puis α gagne la valeur $(n+1)\pi$ (pendant que le rapport des axes diminue jusqu'à zéro), puis oscille asymptotiquement autour de cette valeur. Lorsque ω a une valeur quelconque comprise entre $\frac{(2n+1)\pi}{\sqrt{8}}$ et $\frac{(2n+3)\pi}{\sqrt{8}}$, α croît d'abord, gagne la valeur $(n+1)\pi$, autour de laquelle il oscille ensuite. La rotation est nulle pour les valeurs de φ données par l'équation (7) où n est un nombre entier; lorsque n est pair, la vibration est de plus rectiligne; lorsque n est impair, la vibration est elliptique, et le rapport des axes est voisin d'une valeur maximum.