



HAL
open science

Application de la méthode graphique à la mesure de la vitesse d'écoulement de liquides visqueux par un orifice en mince paroi

Th. Vautier

► **To cite this version:**

Th. Vautier. Application de la méthode graphique à la mesure de la vitesse d'écoulement de liquides visqueux par un orifice en mince paroi. *J. Phys. Theor. Appl.*, 1889, 8 (1), pp.396-411. 10.1051/jphystap:018890080039601 . jpa-00238989

HAL Id: jpa-00238989

<https://hal.science/jpa-00238989>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

APPLICATION DE LA MÉTHODE GRAPHIQUE ⁽¹⁾ A LA MESURE DE LA VITESSE D'ÉCOULEMENT DE LIQUIDES VISQUEUX PAR UN ORIFICE EN MINCE PAROI;

PAR M. TH. VAUTIER.

Les liquides employés sont des sirops de glucose plus ou moins concentrés, que je désignerai par des numéros d'ordre.

(¹) Voir p. 301 de ce Volume.

1° *Expériences préliminaires.* — Pour caractériser la viscosité des différentes solutions de glucose, j'ai déterminé leur coefficient de frottement intérieur par rapport à celui de l'eau, à l'aide de la méthode de Poiseuille.

Soient

T la durée de l'écoulement d'un volume de glucose à travers un tube de petit diamètre ;

t la durée d'écoulement d'un même volume d'eau dans les mêmes conditions (1).

$\frac{T}{t} = \eta$ est la quantité que j'ai mesurée et que j'appelle *viscosité* dans ce qui suit, par abréviation.

Pour chaque glucose la viscosité a été mesurée à trois températures comprises entre 11° et 27° ; les trois valeurs correspondantes ont été reliées par une formule d'interpolation. Lors des expériences suivantes, en mince paroi, il suffira donc de prendre la température du liquide pour pouvoir calculer sa viscosité.

2° *Vitesse d'écoulement des glucoses par un orifice en mince paroi.* — Pour mesurer cette vitesse, j'ai employé la méthode graphique et les appareils précédemment décrits (2). Rien n'a été changé : les glucoses ont été simplement substitués à l'eau dans le

(1) On ne peut comparer directement la durée d'écoulement des glucoses les plus visqueux à celle de l'eau, dans un même tube, parce que l'eau s'écoule trop vite dans les tubes assez larges (diam. = 1^{mm},6) qu'il faut employer dans ce cas. Mais on prend comme intermédiaire un glucose de viscosité moyenne $\eta = \frac{T}{t}$; on détermine directement T et t au moyen d'un premier tube (diamètre < 0^{mm},7) qui convient à la fois pour ce glucose et pour l'eau. Ensuite on fait écouler dans un second tube plus large (diamètre = 1^{mm},6) un même volume dans les mêmes conditions de pression et températures :

1° Le même glucose $\eta = \frac{T'}{t'}$; T' durée que l'on mesure.

2° Le glucose très visqueux $\eta_1 = \frac{T''}{t''}$. On note la durée T''.

On a, par suite,

$$\frac{\eta_1}{\eta} = \frac{T''}{T'}, \quad \eta_1 = \frac{TT''}{tT'}.$$

(2) Ce Volume, p. 305 et 306, fig. 4 et 5.

vase muni de l'orifice de 5^{mm}, 76 de diamètre (1). Les mesures ont été prises sur les photographies, et les résultats calculés, comme on l'a vu, pour l'écoulement de l'eau. Je réunis, dans le Tableau général suivant, les vitesses d'écoulement des jets de glucose à des distances croissantes de l'orifice (2).

(1) On fait pour chaque glucose un liquide de même densité pour former les petites bulles qui passent dans le jet : un mélange de nitrobenzine et de chloroforme convient.

(2) Les vitesses à l'orifice et les nombres marqués d'un astérisque sont déduits des courbes, comme il sera dit plus loin.

Tableau général.

Numéro du cliché. I.	Numéro des glucoses. II.	Température. III.	Viscosité par rapport à l'eau, η . IV.	Hauteur du liquide au-dessus de l'orifice H. V.	Vitesse à l'orifice. VI.	Vitesses trouvées				
						à VII.	à VIII.	à IX.	à X.	à XI.
26...	2	23,6	567	m 0,277	m 1,638	m 1,698*	m 1,754	m 1,811	m 1,859	m 1,859
28...	»	»	»	m 0,198	m 1,327	m 1,400*	m 1,461	m 1,519	m 1,582	m 1,582
29...	»	»	»	m 0,101	m 0,854	m 0,959*	m 1,043	m 1,137	m 1,219	m 1,219
21...	»	23,3	581	m 0,273	m 1,605	m 1,666*	m 1,714	m 1,787	m 1,818	m 1,818
23...	»	»	»	m 0,080	m 0,690	m 0,815*	m 0,944	m 1,035	m 1,135	m 1,135
12...	3	22,0	966	m 0,106	m »	m »	m 0,868	m 0,972	m »	m »
10...	»	»	»	m 0,091	m »	m »	m 0,829	m 0,939	m »	m »
51...	2	18,0	929	m 0,267	m 1,278	m 1,356	m 1,417	m 1,477	m 1,549	m 1,604
55...	»	»	»	m 0,243	m 1,180	m 1,271	m 1,347	m 1,394	m 1,475	m 1,538
58...	»	»	»	m 0,1035	m 0,600	m 0,717	m 0,841	m 0,943	m 1,046	m 1,129
34...	4	23,6	1083	m 0,246	m 1,050	m 1,132	m 1,231	m 1,302	m 1,370	m 1,446
36...	»	»	»	m 0,199	m 0,875	m 0,987	m 1,079	m 1,165	m 1,247	m 1,319
38...	»	»	»	m 0,104	m 0,520	m 0,669	m 0,793	m 0,897	m 1,002	m 1,091
31...	»	23,2	1122	m 0,188	m 0,842	m »	m 1,033	m 1,120	m »	m »

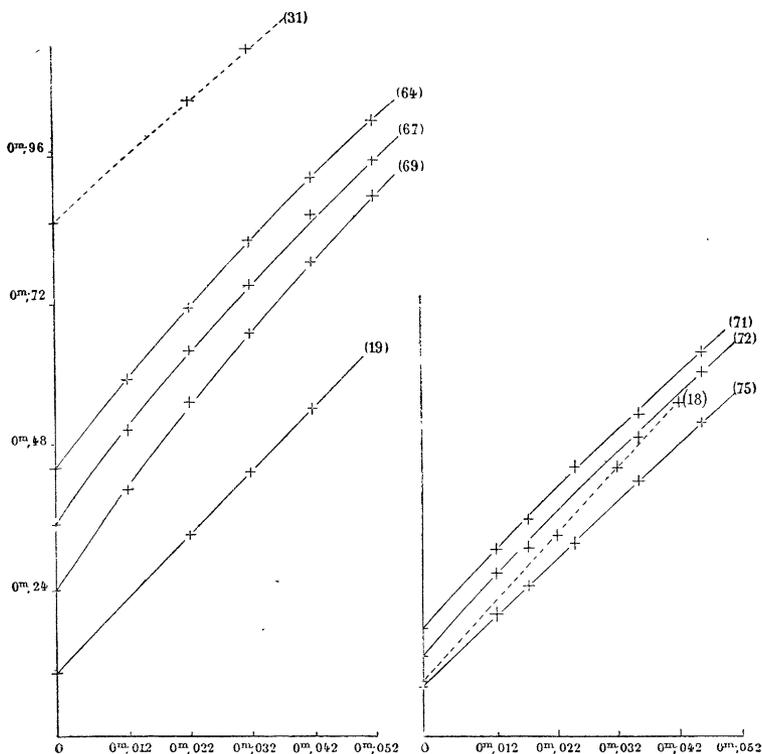
Tableau général (suite.)

Numéro du cliché. I.	Numéro des glucoses. II.	Température. III.	Viscosité par rapport à l'eau, η . IV.	Hauteur du liquide au-dessus de l'orifice H. V.	Vitesse à l'orifice. VI.	Vitesses trouvées						
						VII.	VIII.	IX.	X.	XI.		
64...	4	13,95	2801	0,219	0,442	m	à	à	à	à		
67...	»	14,15				0,584	0,699	m	0,808	0,912	m	1,008
69...	»	14,35				0,501	0,631	m	0,736	0,851	m	0,942
18...	8	23,7	7214	0,094	0,238	0,405	0,542	0,658	0,771	0,880		
49...	»	23,2				0,222*	0,327	0,437	0,542	0,650*	»	»
43...	»	21,8	9017	0,114	0,104	0,230*	0,329	0,431	0,536	»		
40...	7	18,2	13217	0,126	»	»	0,341	0,420	0,520	»		
41...	»	»	»	0,300	0,134	0,236*	0,320	0,408	0,505	0,578		
43...	»	»	»	0,220	0,101	0,201	0,287	0,367	0,479	0,554		
45...	»	»	»	0,108	0,044	0,151*	0,236	0,329	0,414	0,505*		
48...	»	17,7	14176	0,292	0,120	0,224	0,311	0,395	0,477	0,567		
	»	»	»	0,217	0,089	0,190	0,271	0,357	0,447	0,532		
71...	5	14,53	9790	0,302	0,175	à	à	à	à	à		
72...	»					0,304	0,355	0,436	0,527	0,627		
75...	»					0,264	0,309	0,393	0,490	0,590		
	»	14,71	9587	0,143	0,082	0,197	0,244	0,314	0,417	0,515		
						0,0119.	0,0171.	0,0248.	0,0351.	0,0454.		

Représentation graphique des vitesses du jet à différentes distances de l'orifice, pour un même liquide sous une même hauteur (fig. 1 et 2). — Chaque expérience peut être représentée

Fig. 1.

Fig. 2.



par une courbe en prenant pour ordonnées les vitesses trouvées à différentes distances, $0^m, 0123$, $0^m, 0226$, . . . , de l'orifice, et pour abscisses ces distances ⁽¹⁾. Quelques-unes de ces lignes sont tracées sur les fig. 1 et 2; elles sont presque des droites ⁽²⁾. On a

⁽¹⁾ Le numéro placé à la droite de chaque ligne est celui du cliché correspondant (*Tableau général*, I^o colonne).

⁽²⁾ Si l'on considère directement les vitesses inscrites sur une même ligne du *Tableau général* qui correspondent à des sections du jet distantes entre elles de $0^m, 0103$, on trouve que la différence de deux vitesses consécutives est à peu près constante.

prolongé chaque ligne de manière à connaître pour chaque liquide la vitesse à l'orifice (Tableau général, col. VI) que l'on ne peut déterminer expérimentalement, car l'image des bulles n'est visible qu'à 7^{mm} de l'orifice, quelquefois même à 17^{mm}; les nombres de la col. VII du Tableau général sont marqués d'un astérisque lorsqu'ils sont déduits des courbes : tous les autres résultent de mesures directes.

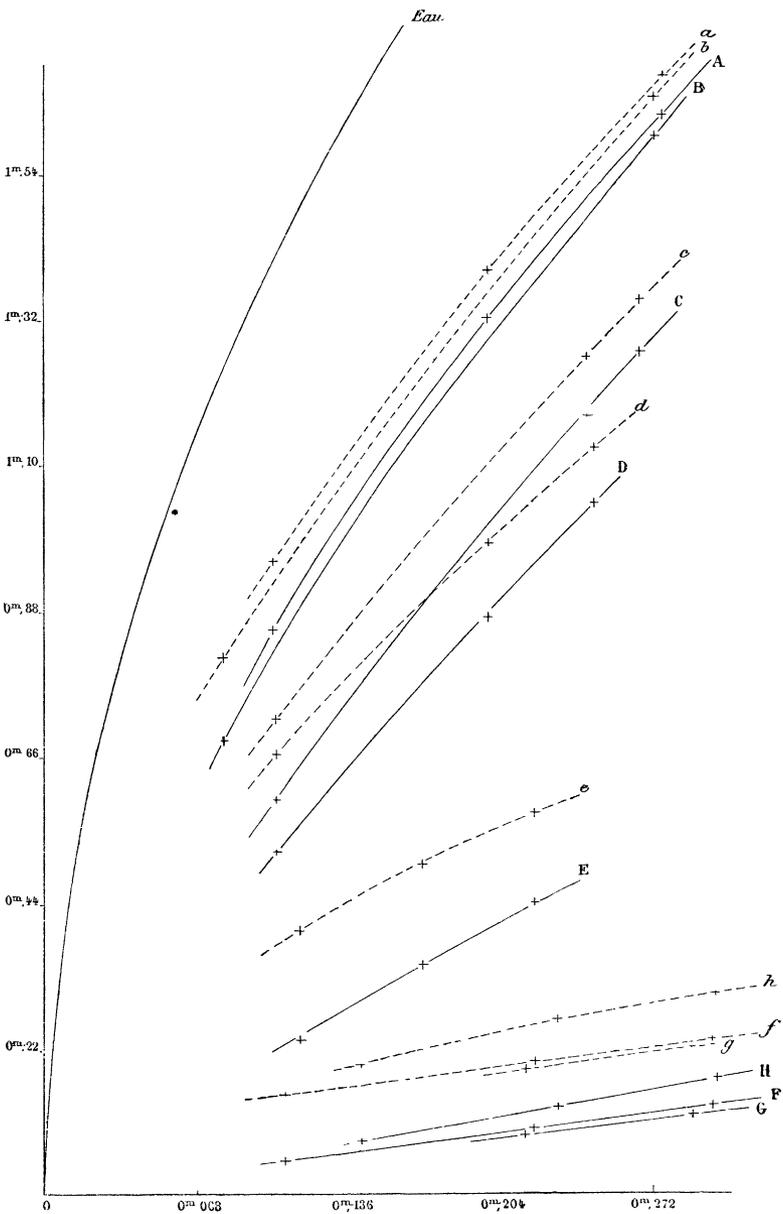
Vitesse d'écoulement d'un liquide de viscosité donnée, sous différentes hauteurs (fig. 3). — On a pris comme abscisses les hauteurs H de liquide dans le vase, et comme ordonnées les vitesses à l'orifice (traits pleins) et à 0^m,0123 de l'orifice (traits ponctués, nombres des col. VI et VII du Tableau). On a tracé aussi la courbe représentant, d'après Torricelli, l'écoulement de l'eau à l'orifice dans les mêmes conditions.

Les courbes relatives aux glucoses s'écartent visiblement de celle qui représente la loi de Torricelli. Pour des viscosités croissantes, elles tendent à devenir des droites : notamment celles qui représentent la vitesse à l'orifice des glucoses de viscosité supérieure à 2800; pour ces liquides la vitesse est sensiblement proportionnelle à la hauteur. On peut calculer la valeur du rapport $m = \frac{V}{H}$, en extrayant du Tableau général (col. VI) les vitesses à l'orifice des glucoses pour lesquels $n \geq 2800$, ainsi que les hauteurs correspondantes : on trouve ainsi que m est à peu près constante et inversement proportionnelle au coefficient de frottement intérieur (à $\frac{1}{20}$ près environ).

Vitesse d'écoulement de liquides de différentes viscosités, sous une même hauteur. — Chaque courbe (fig. 4) est construite en prenant pour abscisses les viscosités des glucoses et pour ordonnées les vitesses à l'orifice relatives à une même hauteur H pour trois valeurs H = 0^m,104; H = 0^m,198; H = 0^m,275; valeurs dont on s'est le plus souvent rapproché dans le cours des expériences; les vitesses sont déduites des courbes (fig. 3, traits pleins) qui indiquent la variation de la vitesse avec la hauteur.

On obtient ainsi trois courbes de même allure : on remarque sur chacune d'elles que, pour des viscosités η croissant de 0 à 1500

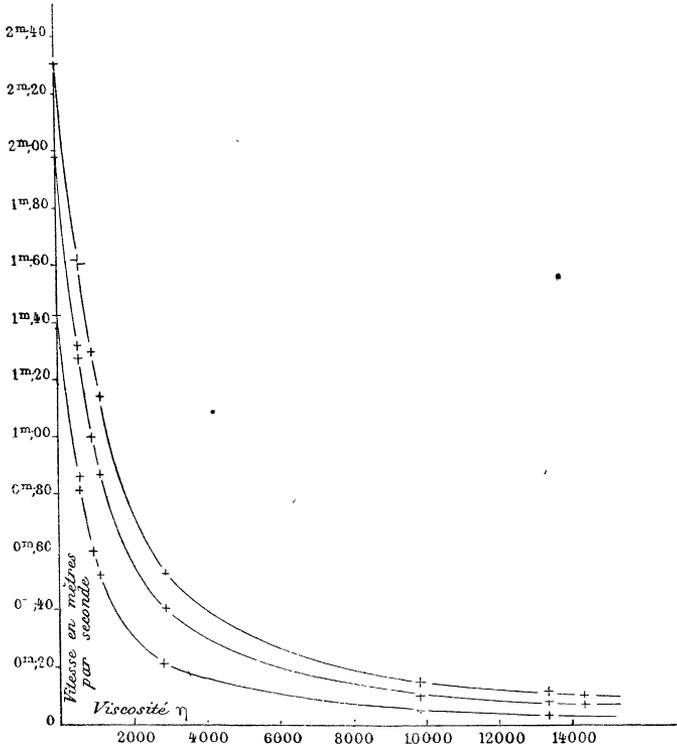
Fig. 3.



LÉGENDE. — A, α , d'après les n^{os} 26, 28, 29. — B, β , d'après les n^{os} 21, 23. — C, c , d'après les n^{os} 51, 55, 58. — D, d , d'après les n^{os} 34, 36, 38. — E, e , d'après les n^{os} 64, 67, 69. — F, f , d'après les n^{os} 40, 41, 43. — G, g , d'après les n^{os} 45, 48. — H, h , d'après les n^{os} 71, 72, 75.

environ, la vitesse décroît rapidement; pour des viscosités plus fortes, et notamment à partir de $\eta > 2800$, on a vu plus haut que la vitesse est sensiblement proportionnelle à la hauteur, $V = mH$, m étant à peu près constante et inversement proportionnelle à la viscosité; donc sur une même courbe, c'est-à-dire pour des li-

Fig. 4.



quides s'écoulant sous une même hauteur H , on a dans les mêmes limites $V\eta = \text{const.}$; la vitesse varie en raison inverse de la viscosité. La partie de la courbe relative à ces liquides ($\eta > 2800$) se rapproche notablement d'un arc d'hyperbole rapporté à ses asymptotes, comme on le voit sur la figure.

Perte de charge relative à l'écoulement de liquides visqueux par un orifice en mince paroi. -- Lorsqu'un liquide de visco-

sité négligeable et de densité δ s'écoule sous une hauteur H , le travail total, relatif à l'écoulement de vitesse V' qui débite un volume U , a pour expression

$$H \delta U = \frac{1}{2} \frac{U \delta}{g} V'^2.$$

La hauteur $H = \frac{V'^2}{2g}$ communie au jet la vitesse $V' = \sqrt{2gH}$: c'est le théorème de Bernoulli.

Mais, si le liquide est visqueux ⁽¹⁾, le même travail total $H \delta U$ est employé à fournir le travail \mathfrak{C} dû au frottement interne et à communiquer à l'écoulement une force vive égale à $\frac{1}{2} \frac{U \delta}{g} V^2$, la vitesse V étant plus petite que V' . On a donc

$$H \delta U = \mathfrak{C} + \frac{1}{2} \frac{U \delta}{g} V^2.$$

Posons $\frac{V^2}{2g} = h$; h est la hauteur qui suffirait à donner au jet la vitesse V si le liquide n'était pas visqueux. On aura ainsi, pour expression du travail interne \mathfrak{C} ,

$$(1) \quad \mathfrak{C} = (H - h) \delta U.$$

L'effet de la viscosité se manifeste par une perte de charge $(H - h)\delta$ qui se déduit aisément des résultats de nos mesures : on trouve, dans le Tableau général, qu'un liquide de viscosité τ_1 , de densité δ , s'écoule sous une hauteur H avec une vitesse à l'orifice V_0 qui fait connaître $h = \frac{V_0^2}{2g}$. On a calculé ainsi la valeur numérique de $(H - h)\delta$ pour chaque expérience ⁽²⁾, et l'on a inscrit dans le Tableau suivant la valeur du rapport $\frac{(H - h)\delta}{V_0} = K$ de la perte de charge à la vitesse correspondante, ainsi que la valeur du rapport $\frac{K}{\tau_1}$:

(1) Nous supposons, pour plus de simplicité, que la densité du liquide reste la même; $H \delta$ représente alors la même pression pour le liquide, qu'il soit visqueux ou non.

(2) Excepté pour les nos 18 et 19, relatifs à des expériences faites dans des conditions particulières. Voir *Ann. de Chim. et de Phys.*, 6^e série, t. XV, p. 466.

Numéro du cliché.	Hauteur du liquide au-dessus de l'orifice	Vitesse à l'orifice	$\frac{(\Pi-h)\delta}{V_1} = K.$	Valeur moyenne de K.	$\frac{K}{\eta}$ 0,000	Viscosité. η .	Densité. δ .
	H. m	V. m					
26...	0,277	1,638	0,1156	0,1120	1975	567	1,351
28...	0,198	1,327	0,1102				
29...	0,101	0,854	0,1103				
21...	0,273	1,605	0,1194	0,1142	1965	581	»
23...	0,080	0,690	0,1090				
51...	0,267	1,278	0,1960	0,1952	2101	929	1,354
35...	0,243	1,180	0,1974				
38...	0,1035	0,600	0,1921				
34...	0,246	1,050	0,2469	0,2448	2260	1083	1,366
36...	0,199	0,875	0,2497				
38...	0,104	0,520	0,2377				
31...	0,188	0,842	0,2464	0,2464	2196	1122	»
64...	0,219	0,442	0,6485				
67...	0,169	0,352	0,6334	0,6407	2287	2801	1,371
69...	0,114	0,238	0,6401				
71...	0,302	0,1752	2,389	2,408	2486	9688	1,393
72...	0,231	0,1326	2,417				
75...	0,143	0,082	2,418				
40...	0,300	0,134	4,1292	3,205	2425	13217	1,402
41...	0,220	0,101	3,0467				
43...	0,108	0,044	3,4392	3,4075	2404	14176	»
45...	0,292	0,120	3,4026				
48...	0,217	0,089	3,4125				

On peut déduire de ces nombres les conclusions suivantes :

1° Pour un liquide de viscosité donnée, la perte de charge est à peu près proportionnelle à la vitesse du jet à l'orifice; K est en effet constant à $\frac{1}{23}$ près en moyenne.

2° La perte de charge K (pour une vitesse égale à l'unité) croît un peu plus vite que la viscosité; les nombres de la sixième colonne montrent que, la viscosité variant de 560 à 14000 (soit de 1 à 25), le rapport $\frac{K}{\eta}$ croît lentement et d'une manière continue.

Pour déterminer analytiquement le travail interne \bar{c} de frottement, il faudrait savoir suivant quelle loi les vitesses sont distribuées à l'intérieur du liquide qui s'écoule. Cette loi n'étant pas

connue, j'ai cherché à quel résultat on arrive en supposant que la distribution des vitesses à l'intérieur du vase reste semblable à elle-même, alors que la hauteur H et la viscosité η du liquide varient.

On sait que la force de frottement f entre deux filets liquides contigus est proportionnelle à la différence dv de vitesse qui existe entre eux : $f = m dv$, m étant une constante proportionnelle à la viscosité du liquide. Supposons que deux filets déterminés aient une différence de vitesse dv toujours proportionnelle à la vitesse V du jet, et qu'ils fournissent à l'écoulement une fraction constante du débit U , c'est-à-dire qu'on ait $dv = aV$, $du = bU$, a et b étant des constantes dont la valeur ne dépend que de la situation des deux filets considérés. Le travail du frottement sur ces filets sera

$$f du = m dv du = mabVU,$$

et le travail total \mathfrak{C} relatif à l'écoulement de vitesse V qui débite un volume U

$$\mathfrak{C} = \Sigma f du = mVU \Sigma ab,$$

$$\mathfrak{C} = KVU,$$

K étant une constante proportionnelle au coefficient de frottement intérieur du liquide; on a donc, d'après (1),

$$(H - h)\delta = KV.$$

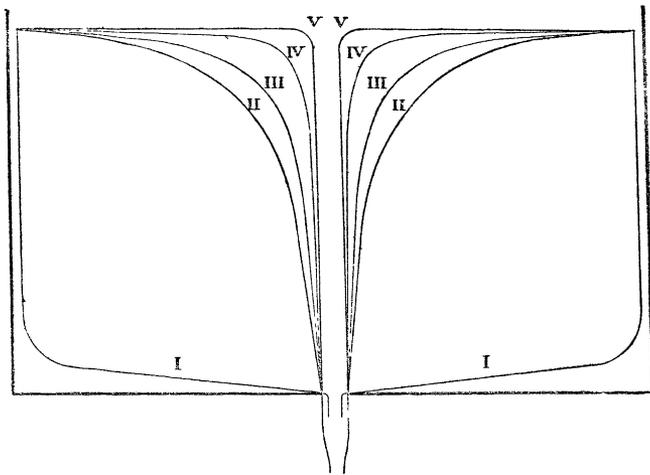
Ainsi, en supposant que l'écoulement reste semblable à lui-même, K doit être constant et, notamment, proportionnel à la viscosité η ; d'autre part, l'expérience montre, par les résultats du dernier Tableau, que cette quantité, sans être constante, varie toutefois assez peu lorsque la viscosité augmente notablement (de 500 à 14 000). Il semble donc que la distribution des vitesses, sans rester semblable à elle-même, se modifie graduellement, mais avec lenteur pour des liquides de viscosités très différentes.

Forme des filets liquides. — Dans le même ordre d'idées, je représente (fig. 5) les trajectoires (1) que suit une bulle située à environ 0^m,10 au-dessus du fond du vase et près de sa surface latérale, pour arriver à l'orifice :

(1) Trajectoires approximatives, dessinées d'après l'observation directe du chemin parcouru par des bulles formées de chloroforme et nitrobenzine, qui flottent dans le glucose.

I. Dans le cas de l'eau. II. Pour un liquide de viscosité 3000. III. Pour un liquide de viscosité 24000. IV. Pour une pâte céramique. V. Pour un bloc de plomb. Ces deux derniers résultats sont dus à M. Tresca et extraits de l'un de ses Mémoires (1).

Fig. 5.



On voit immédiatement que, pour les solutions visqueuses, les filets ont des formes intermédiaires entre celles des substances très fluides, et celles des corps solides. En outre, quand la viscosité varie de 3000 à 24000, les différences entre les trajectoires des liquides correspondants deviennent de plus en plus petites, c'est-à-dire que la distribution des filets tend à différer de moins en moins, conclusion à laquelle nous avait déjà conduit le calcul des pertes de charge.

Mesures de dépense. — J'ai déterminé le volume de liquide écoulé par seconde, pour des glucoses dont la viscosité est comprise entre 500 et 24000 fois celle de l'eau. Les liquides sont contenus dans un vase cylindrique de 30^{cm} de diamètre, muni d'un orifice de 5^{mm},76 de diamètre (2).

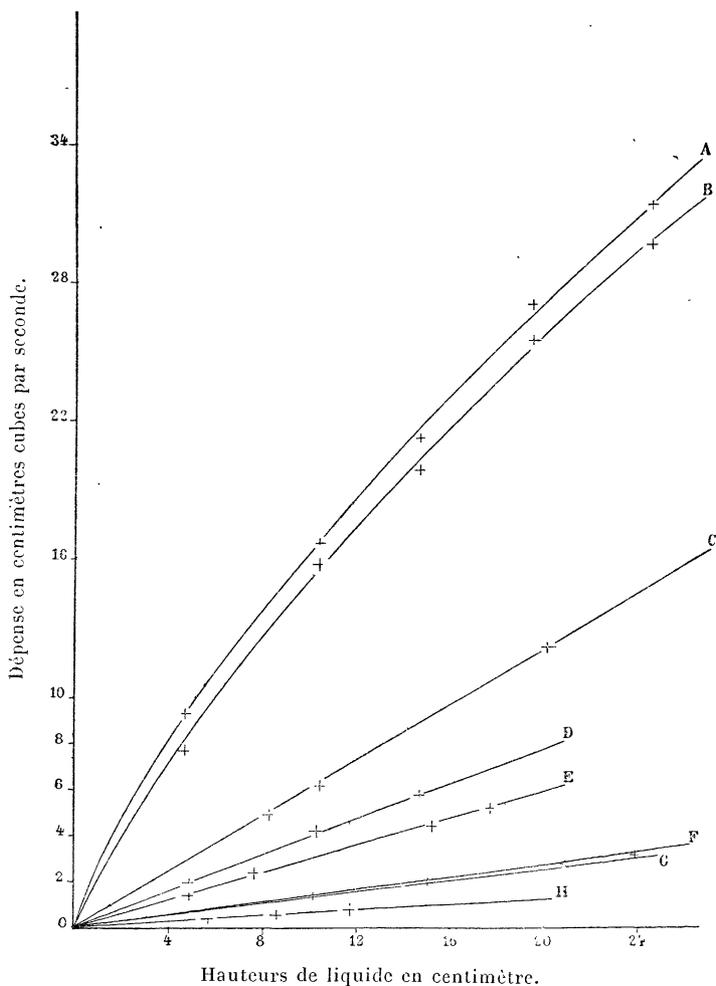
(1) *Savants étrangers*, t. XX, p. 282, pl. I et XIII.

(2) Pour le détail des mesures, voir *Annales de Chimie et de Physique*, 6^e série, t. XV, p. 468.

Résultats. — 1° Dès que la viscosité des glucoses dépasse 2000,

Fig. 6.

Variation de la dépense avec les hauteurs de liquide.

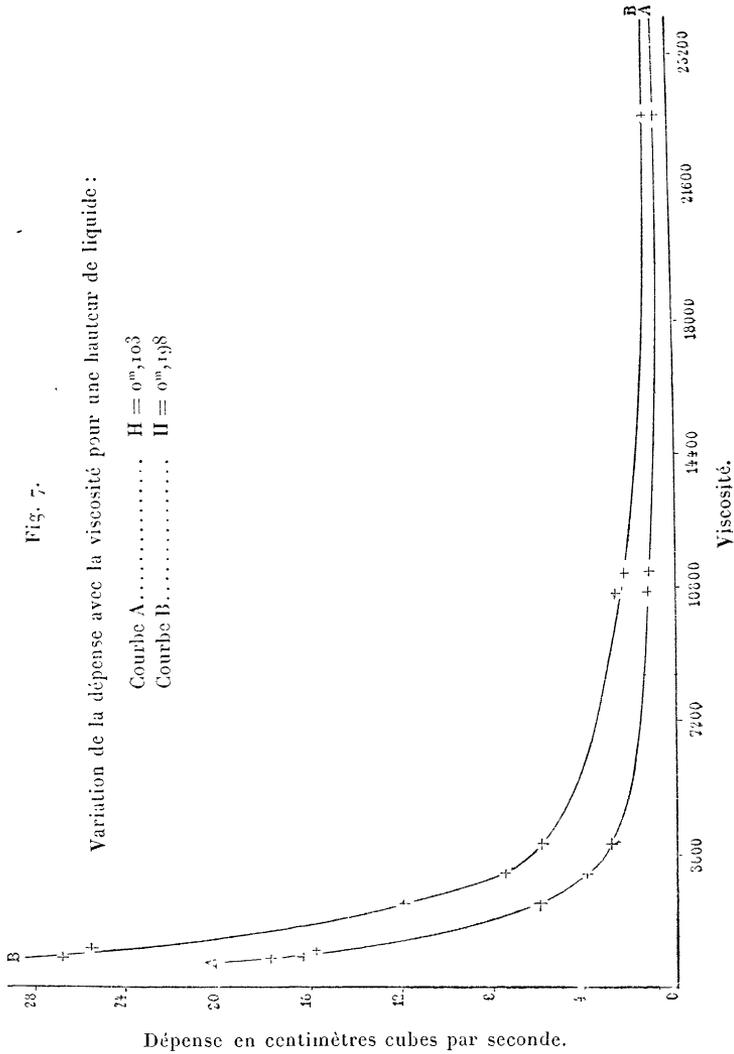


Légende. — Viscosité des liquides A, B, C,

A . . . 637	D . . . 2 316 à 2 755	G . . . 11 940
B . . . 807 à 783	E . . . 3 823	H . . . 23 180
C . . . 2168	F . . . 10 580	

la dépense Q est à peu près proportionnelle à la hauteur H du

liquide qui s'écoule (à $\frac{1}{30}$ près). Même conclusion pour un orifice de 4^{mm} de diamètre.



2° Si l'on désigne par m, m', \dots les valeurs du rapport $\frac{Q}{H}$ pour des liquides de viscosité η, η', \dots , supérieurs à 2000, on a,

mais seulement à $\frac{1}{9}$ près,

$$m\tau = m'\tau' = \dots$$

Les courbes ci-jointes (*fig.* 6 et 7) représentent l'ensemble des expériences.
