Sur la représentation géométrique des quantités que l'on considère dans la théorie mécanique de la chaleur

G.-R. Dahlander

SUR LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES QUANTITÉS QUE L'ON CONSIDÈRE DANS LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR;

Par M. G.-R. DAHLANDER.

Dans quelques Notes publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Stockholm,* j'ai démontré, par des méthodes indirectes, que des quantités, que l'on considère dans la Théorie mécanique de la chaleur, ont entre elles des relations géométriques très simples. J'ai réussi depuis à déduire ces relations des équations fondamentales de la Thermodynamique. Je vais exposer mes recherches à ce sujet : elles pourront peut-être offrir quelque intérêt comme applications de la méthode introduite par Clapeyron.

Nous exprimerons dans ce qui va suivre une quantité de chaleur par le travail mécanique correspondant. Les chaleurs spécifiques d'un corps seront exprimées de la même manière.

Les équations fondamentales différentielles de la Thermodynamique deviennent donc

$$dq = x\,dv + y\,dp, \tag{1^a}$$
$$dq = C\,dT + h\,dp, \tag{1^b}$$
$$dq = c\,dT + l\,dv, \tag{1^c}$$

où v, p, T sont le volume, la pression et la température absolue; C, c la chaleur spécifique sous pression constante et sous volume constant; x, y, l, h sont fonctions de v, p, T et peuvent aussi être considérés comme des chaleurs spécifiques.

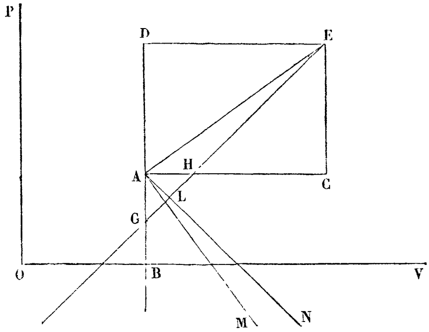
Toutes ces quantités ont entre elles la liaison donnée par la

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphystap:018890080032301

fig. 1. Le point indicateur A de l'état du corps correspond à $v = OB$, $p = AB$. AM est la tangente à la courbe adiabatique et ALN la tangente à la courbe isothermique. La distance $AL = T$. Menons par A les droites AD et AC parallèles aux axes coordonnés Op et Ov, la droite AE perpendiculaire à AM et par L la droite EG perpendiculaire à ALN. Les droites AE et GE se coupent au point E. Construisons le rectangle ABEG. On a maintenant

$$\begin{aligned} C &= EG, \\ c &= EH, \\ x &= AC, \\ y &= AD, \\ l &= AH, \\ h &= -AG. \end{aligned}$$

Fig. 1.



En effet, par une transformation adiabatique infiniment petite, on tire de l'équation (1^a)

$$x\,dv + y\,dp = 0$$

ou

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{x}{y}.$$

Mais, si l'on considère que AM est la tangente à la courbe adiabatique et par conséquent AE la normale, nous avons

$$\operatorname{tang} AEC = \frac{x}{y} = \frac{AC}{AD}.$$

AC et AD sont donc proportionnelles à x et à y. Mais ces droites expriment aussi les valeurs absolues de ces quantités, car, le travail mécanique représentant la quantité de chaleur, AE est la force qui, dirigée suivant la normale à la courbe adiabatique par le point indicateur, produit ce travail, quand le point se transporte le long d'une courbe quelconque. Les composantes de la force parallèles aux axes coordonnés sont x et y et leurs travaux élémentaires $x\,dv$ et $y\,dp$.

Si l'on suppose que le point indicateur se déplace sur la courbe isothermique qui a AN pour tangente en A, on doit avoir par (1^a) et (1^b)

$$x\,dv + y\,dp = h\,dp$$

ou

$$\frac{dp}{dv} = \frac{x}{h-y}.$$

La droite EHG étant la perpendiculaire à la tangente AN, on en conclut

$$\operatorname{tang} \mathrm{AGH} = \frac{x}{y-h} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DG}} = \frac{x}{y+\mathrm{AG}},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{AG} = -h.$$

Si la température T est constante, les équations (1^a) et (1^c) donnent

$$x\,dv + y\,dp = l\,dv$$

ou

$$\frac{dp}{dv} = \frac{l-x}{y},$$

et aussi

$$\operatorname{tang} \mathrm{AGH} = \operatorname{tang} \mathrm{HEC} = \frac{x-l}{y} = \frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{EC}} = \frac{x-\mathrm{AH}}{y}.$$

On doit donc avoir

$$\mathrm{AH} = l.$$

Pour démontrer que C et c ont entre elles la liaison géométrique indiquée, nous considérerons les équations connues

$$\mathrm{C} - c = \mathrm{T}\frac{dv}{d\mathrm{T}}\frac{dp}{d\mathrm{T}}, \tag{2}$$

$$l = \mathrm{T}\frac{dp}{d\mathrm{T}}, \tag{3}$$

$$h = -\mathrm{T}\frac{dv}{d\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) donnent

$$C - c = -\frac{hl}{T}. \tag{5}$$

Les valeurs de AG et AH dernièrement trouvées et la valeur $AL = T$ rendent

$$C - c = \frac{AG.AH}{AL} = GH.$$

La droite GH représente donc la différence entre la chaleur spécifique sous pression constante et la chaleur spécifique sous volume constant. On a aussi

$$x = C\frac{dT}{dv}, \tag{6}$$

$$y = c\,\frac{dT}{dp}. \tag{7}$$

T étant une fonction de v et p, on a

$$dT = \frac{dT}{dv}dv + \frac{dT}{dp}dp,$$

et, par une transformation isothermique et considérant les équations (6) et (7), on trouve

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{\frac{dT}{dv}}{\frac{dT}{dp}} = -\frac{x}{y}\frac{c}{C};$$

$$\frac{C}{c} = \frac{x}{y\operatorname{tang}HEC} = \frac{AC}{HC} = \frac{EG}{EH},$$

$$C - c : c = GH : EH.$$

Mais nous avons trouvé $C - c = GH$; par conséquent, on a

$$c = EH, \qquad C = EG.$$

La représentation géométrique s'applique aussi pour déterminer la quantité de chaleur employée au travail intérieur lorsqu'un corps éprouve une transformation élémentaire. On a, en effet, pour le travail intérieur u,

$$du = \frac{du}{dT}dT + \frac{du}{dp}dp, \tag{8}$$

$$du = \frac{du}{dT}dT + \frac{du}{dv}dv, \tag{9}$$

ou

$$(8^a) \qquad du = C'\,dT + h'\,dp,$$

$$(9^a) \qquad du = c'\,dT + l'\,dv,$$

si C', c', h' et l' sont des fonctions analogues à C, c, h et l. Par conséquent, C' et c' signifient la chaleur spécifique interne sous pression constante et sous volume constant.

On a aussi

$$(10) \qquad dq = du + p\,dv.$$

En comparant les équations (9^a) et (10) entre elles et avec l'équation (1^c), on trouve

$$c\,dT + l\,dv = c'\,dT + (l' + p)\,dv.$$

On en conclut immédiatement

$$(11) \qquad c' = c,$$

$$(12) \qquad l' = l - p.$$

Les équations (8^a) et (10) donnent

$$dq = C\,dT + h'\,dp + p\,dv,$$

et, après avoir remplacé dv par

$$dv = \frac{dv}{dp}\,dp + \frac{dv}{dT}\,dT,$$

on trouve

$$dq = \left(C' + p\,\frac{dv}{dT}\right)dT + \left(h' + p\,\frac{dv}{dp}\right)dp.$$

En comparant cette équation avec (1^b), on obtient

$$(13) \qquad C - C' = p\,\frac{dv}{dT},$$

$$(14) \qquad h - h' = p\,\frac{dv}{dp};$$

ou, en considérant l'équation (4),

$$(13^a) \qquad C - C' = -\frac{ph}{T}.$$

La substitution de la valeur

$$\frac{dv}{dp} = \frac{h - y}{x}$$

dans l'équation (14) donne

$$(15)\qquad h - h' = \frac{p(h-y)}{x}.$$

Par la comparaison des deux équations (5) et (13^a), on obtient

$$(16)\qquad \frac{C-c}{C-C'} = \frac{l}{p}.$$

Si l'on remplace dans l'expression (8^a) dp par

$$\frac{dp}{dT}\,dT + \frac{dp}{dv}\,dv$$

et que l'on identifie la valeur de du ainsi obtenue avec celle que donne l'équation (9^a), on trouve

$$(17)\qquad c' - C' = \frac{dp}{dT}\,h',$$

$$(18)\qquad l - p = l' = \frac{dp}{dv}\,h'.$$

Les deux équations (1^b) et (1^a) donnent

$$(C-c)\,dT = l\,dv - h\,dp.$$

Si le volume v est constant, on a donc

$$(19)\qquad C - c = -\frac{dp}{dT}\,h$$

et, après division par l'équation (17),

$$(20)\qquad \frac{C'-c'}{C-c} = \frac{h'}{h}.$$

On déduit des équations (1^a) et (10)

$$(21)\qquad du = (x-p)\,dv + y\,dp = x'\,dv + y'\,dp,$$

où x' et y' peuvent être regardés comme les composantes d'une force dans le plan vp, parallèles aux axes coordonnés Ov et Op. La force est toujours normale à la ligne isodynamique. Le travail de cette force est le travail intérieur. On a

$$(22^a)\qquad x' = x - p,$$

$$(22^b)\qquad y' = y.$$

Les équations (21) et (9^a) donnent

$$(y' - b')\,dp = C'\,dT - x'\,dv$$

et, supposant p constant,

$$\frac{C'}{x'} = \frac{dv}{dT}.$$

En considérant les équations (13) et (22^a), on trouve maintenant

$$\frac{p}{x'} = \frac{C - C'}{C'}$$

et

(23) $$\frac{x'}{x} = \frac{C'}{C}.$$

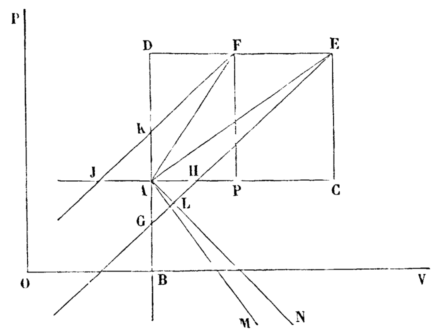
Par la relation (13^a) on obtient aussi

(24) $$x' = -\frac{C'T}{h};$$

la *fig.* 2 donne la représentation géométrique pour le travail intérieur. Soient

$$EF = p, \qquad AP = x', \qquad AD = y';$$

Fig. 2.



AF représente la force dont les composantes sont x' et y'. Menons par F la droite FKJ parallèle à ELG, c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente AN de la courbe isothermique. On a donc

$$c' = \mathrm{FJ};$$

$$\mathrm{C}' = \frac{\mathrm{C}x'}{x} = \frac{\mathrm{EG.AP}}{\mathrm{AC}} = \mathrm{FK};$$

$$l' = l - p = \mathrm{AH} - \mathrm{EF} = -\mathrm{JA};$$

$$h' = \frac{\mathrm{C}' - c'}{\mathrm{C} - c}\, h = \frac{\mathrm{JK.AG}}{\mathrm{GH}} = \mathrm{AK}.$$