Sur l'action d'un champ uniforme sur un corps magnétique

L. Kusminski-Ledochowski

SUR L'ACTION D'UN CHAMP UNIFORME SUR UN CORPS MAGNÉTIQUE;

Par M. L. KUSMINSKI-LEDOCHOWSKI.

Lorsqu'un corps magnétique, dont le coefficient d'aimantation est constant, se trouve placé dans un champ uniforme, le moment magnétique produit par induction est proportionnel à l'intensité du champ. Le facteur par lequel doit être multipliée cette intensité pour donner le moment est une fonction de la forme géométrique du corps qui en général est indépendante du coefficient d'aimantation. Sauf dans des cas particuliers, l'axe du moment induit ne coïncide pas avec la direction du champ.

Ceci posé, nous ferons quelques remarques relativement à l'action d'un champ uniforme sur un corps magnétique.

Rapportons le corps à trois axes rectangulaires, et soient α, β, γ les angles que la direction du champ fait avec les axes; μ', μ'', μ''' les moments composants qui correspondent aux composantes $H\cos\alpha$, $H\cos\beta$, $H\cos\gamma$ du champ; soient enfin $a'b'c'$, $a''b''c''$, $a'''b'''c'''$ les angles que les axes de ces moments font avec les axes des coordonnées. La valeur du moment magnétique M sera

$$\begin{aligned} M^2 = \; & (\mu'\cos a' + \mu''\cos a'' + \mu'''\cos a''')^2 \\ & + (\mu'\cos b' + \mu''\cos b'' + \mu'''\cos b''')^2 \\ & + (\mu'\cos c' + \mu''\cos c'' + \mu'''\cos c''')^2 \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} M^2 = \mu'^2 + \mu''^2 + \mu'''^2 + 2\mu'\mu''\cos(\mu', \mu'') \\ + 2\mu''\mu'''\cos(\mu''\mu''') + 2\mu'''\mu'\cos(\mu'''\mu'), \end{aligned}$$

en remplaçant

$$\cos a'\cos a'' + \cos b'\cos b'' + \cos c'\cos c''$$

par

$$\cos(\mu'\mu''), \quad \ldots,$$

où $\cos(\mu', \mu'')$ désigne le cosinus de l'angle que l'axe du moment μ' fait à celui du moment μ''.

D'après notre hypothèse, nous pouvons représenter chacun des moments M, μ', μ'', μ''' par un produit dont le premier facteur, différent pour chacun d'eux, dépend de la forme du corps, le second étant l'intensité du champ.

Posons

$$M = AH, \qquad \mu' = A' H \cos\alpha, \qquad \mu'' = A'' H \cos\beta, \qquad \mu''' = A''' H \cos\gamma;$$

il vient

$$\begin{aligned} A^2 = A'^2 \cos^2\alpha + A''^2 \cos^2\beta + A'''^2 \cos^2\gamma + 2 A' A'' \cos(\mu' \mu'') \cos\alpha \cos\beta \\ + 2 A'' A''' \cos\beta \cos\gamma \cos(\mu'' \mu''') + 2 A''' A' \cos(\mu''' \mu') \cos\gamma \cos\alpha. \end{aligned}$$

Les valeurs $\cos(\mu' \mu'')$, $\cos(\mu'' \mu''')$, $\cos(\mu''' \mu')$ sont indépendantes de la direction du champ. Par conséquent A et seulement A changera avec les valeurs des angles α, β, γ.

Par un point pris à volonté dans l'espace, traçons une droite parallèle à la direction du champ, et portons sur cette droite une longueur égale à la valeur inverse du moment. En faisant la même chose pour toutes les directions, les extrémités de ces longueurs seront sur la surface d'un ellipsoïde dont l'équation est

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 = A'^2 x^2 + A''^2 y^2 + A'''^2 z^2 + 2 A' A'' \cos(\mu' \mu'') xy \\ + 2 A'' A''' \cos(\mu'' \mu''') yz + 2 A''' A' \cos(\mu''' \mu') zx. \end{aligned} \right.$$

Nous nommerons cet ellipsoïde l'ellipsoïde des moments induits. Il jouit de la propriété suivante : le rayon vecteur mené du centre représente la valeur inverse du moment produit sur le corps considéré par l'induction d'une force magnétisante égale à un, dirigée suivant le rayon vecteur.

Le moment magnétique d'un corps quelconque dû à l'influence d'un champ uniforme jouit donc de toutes les propriétés manifestées par ces rayons vecteurs. Pour une certaine direction du champ, le moment magnétique sera un maximum ; pour une direction perpendiculaire à celle-ci, le moment sera un minimum, etc. Il est bien entendu qu'en général les axes de ces moments ne seront pas perpendiculaires l'un à l'autre; mais il y a des cas où cela aura lieu.

S'il y a deux directions perpendiculaires l'une à l'autre, et telles qu'un champ parallèle à l'une quelconque de ces directions produise un moment, dont l'axe coïncide avec cette direction, il y a une troisième direction jouissant de la même propriété et qui est perpendiculaire au plan des deux premières. Prenons ces directions pour axes; l'équation de l'ellipsoïde des moments deviendra

$$(1a) \qquad 1 = A'^2 x^2 + A''^2 y^2 + A'''^2 z^2.$$

Dans ce cas, l'axe du moment maximum et celui du moment minimum sont dirigés suivant deux de ces directions.

Il est aisé de voir que deux corps qui admettent le même ellipsoïde des moments prendront dans un champ uniforme des moments proportionnels, quelle que soit la direction du champ. Nous appellerons de tels corps des *corps équivalents*. Nous nous proposons de résoudre le problème suivant : Trouver un ellipsoïde dont l'ellipsoïde des moments induits représentés par les équations (1) ou (1_a) soit égal à celui d'un corps quelconque. Il s'agira de déterminer la grandeur et la direction des axes d'après ces conditions.

Si le corps est tel qu'on puisse lui appliquer la formule (1_a), il est donc nécessaire de connaître les valeurs des coefficients A', A'', A'''. La détermination théorique de ces coefficients présente de grandes difficultés ; en général, elle n'est possible que par l'expérience.

Pour un cube, par exemple, les coefficients A', A'', A''' sont égaux, (1_a) deviendra

$$1 = A^2(x^2 + y^2 + z^2);$$

c'est l'équation d'une sphère.

Il suit de là que le moment magnétique d'un cube dû à un champ uniforme est indépendant de sa position dans le champ et l'axe du moment coïncide avec la direction de la force magnétisante.

Un cylindre circulaire et un prisme quadratique ont des ellipsoïdes de révolution pour ellipsoïdes des moments induits. Si l'on choisit la grandeur des axes de sorte qu'ils soient proportionnels aux dimensions du cylindre ou du prisme et que le volume de l'ellipsoïde soit égal à celui de ces corps, on trouve une assez bonne concordance des moments observés et calculés, sauf dans le cas peu important pour la pratique où les diamètres des cylindres sont très petits.

M. de Waltenhofen a fait un grand nombre d'expériences relatives aux moments magnétiques induits dans un cylindre [1]. Il

---

[1] En dernier lieu en 1887 (*Wiedemann's Annalen*, t. XXXII).

emploie la formule

$$M = K\,ni\sqrt{l^3 d},$$

où n est le nombre des spires du solénoïde, i l'intensité du courant en ampères, l la longueur et d l'épaisseur communes du cylindre et du solénoïde, K une constante qui doit être trouvée par l'expérience. Cependant les observations montrent que le coefficient K n'est pas constant, mais qu'il est une fonction des dimensions du cylindre. Nous montrerons d'ailleurs que, contrairement à l'opinion de M. Waltenhofen, la formule n'est applicable qu'à un cylindre circulaire et à un prisme quadratique, et non à un cylindre elliptique ou à un parallélépipède.

On peut aussi bien substituer un ellipsoïde à un cylindre elliptique qu'à un cylindre circulaire, pourvu que le champ magnétique soit uniforme ou presque uniforme. On sait d'ailleurs qu'à peu près tout l'intérieur d'un solénoïde présente un champ uniforme. D'après ce qui précède, on peut établir la formule suivante

$$M = \frac{ni\pi}{40}\,\frac{(l^2 - d^2)\,\varepsilon}{\frac{1}{2}\log\text{nat}\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon},$$

où $\varepsilon^2 = \dfrac{l^2 - d^2}{l^2}$.

Pour un prisme quadratique, la formule sera

$$M = \frac{ni\pi}{40}\,\frac{(l^2 - a^2)\,\varepsilon}{\frac{1}{2}\log\text{nat}\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 1}.$$

Le Tableau suivant démontrera l'exactitude de la formule relative au cylindre :

I (en ampères)	3,0	4,0	4,97	5,65
Moment observé	$2,12.10^6$	3,00	3,69	4,11
Moment calculé	2,18	2,92	3,63	4,12

Le cylindre employé avait une longueur de 52^{cm} et un diamètre de $23^{cm},4$; le nombre des spires du solénoïde était 2628.

L'ellipsoïde équivalent à un prisme sera, en général, un ellipsoïde à trois axes. Si les axes de cet ellipsoïde sont proportionnels aux arêtes du parallélépipède, et que le volume de l'un de ces corps soit égal à celui de l'autre, il faut que les résultats de l'observation coïncident avec les valeurs calculées aussi bien que dans le cas précédent. C'est pourquoi il n'est pas possible de calculer le moment magnétique d'un cylindre elliptique ou circulaire, d'un prisme quadratique ou d'un parallélépipède avec une seule et même formule. La formule de M. Waltenhofen ne peut donner des résultats conformes à l'observation aussitôt que le cylindre a une ellipse, ou le prisme un rectangle pour base.