



Démonstration élémentaire de l'équivalence d'un courant plan infiniment petit, et d'un petit aimant de même puissance

G. Léon

► To cite this version:

G. Léon. Démonstration élémentaire de l'équivalence d'un courant plan infiniment petit, et d'un petit aimant de même puissance. J. Phys. Theor. Appl., 1889, 8 (1), pp.184-186. 10.1051/jphystap:018890080018400 . jpa-00238940

HAL Id: jpa-00238940

<https://hal.science/jpa-00238940>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE L'ÉQUIVALENCE D'UN COURANT PLAN
INFINIMENT PETIT, ET D'UN PETIT AIMANT DE MÊME PUISSANCE;**

PAR M. G. LÉON.

On peut, dans l'exposition des principes de l'électromagnétisme, suivre deux marches différentes :

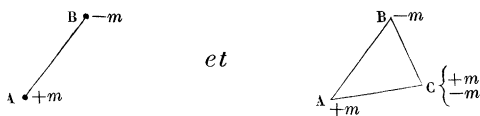
1° Ou bien, comme l'a fait Maxwell, partir de l'équivalence des aimants et des courants supposée vérifiée par l'expérience et en déduire la loi de Laplace ;

2° Ou bien partir de cette loi pour démontrer l'équivalence des aimants et des courants.

C'est cette seconde marche qu'on suit généralement en France : malheureusement la démonstration du théorème qui nous occupe est purement analytique (Note de M. Cornu dans le *Traité de Maxwell*, t. II, p. 172). Voici une démonstration absolument géométrique, qui, par sa simplicité, pourra peut-être paraître de nature à figurer dans un Cours élémentaire.

Je m'appuierai sur les deux lemmes suivants :

LEMME I. — *On peut composer les moments magnétiques comme des forces en Statique ; en effet, les systèmes*

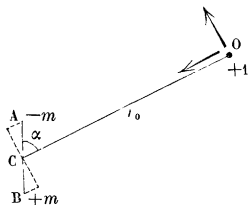


sont évidemment équivalents.

LEMME II. — *Un polyèdre fermé est en équilibre sous l'influence d'un fluide parfait qu'il renferme et, par conséquent, on peut remplacer les pressions sur toutes les faces, moins une, de ce polyèdre, par leur résultante, la pression sur cette dernière face.*

Je vais maintenant chercher successivement l'action d'un petit aimant sur un pôle d'aimant, et l'action d'un petit courant sur ce même pôle (de masse égale à l'unité). L'équivalence ressortira immédiatement de ces considérations.

Action d'un petit aimant sur un pôle magnétique de masse égale à l'unité. — Soit μ le moment magnétique de l'aimant AB, et supposons que AB fasse un angle α avec la droite OC ou r_0 , qui joint le centre de l'aimant au pôle magnétique.



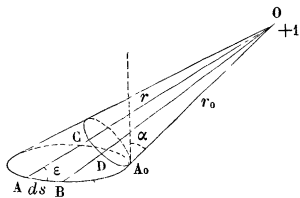
D'après le lemme I, on peut décomposer AB en deux aimants : l'un parallèle à r_0 , de valeur $\mu \cos \alpha$, l'autre perpendiculaire à r_0 , de valeur $\mu \sin \alpha$.

Le premier donne une force dirigée suivant r_0 , $\frac{2\mu \cos \alpha}{r_0^3}$.

Le second donne une force perpendiculaire à r_0 , $\frac{\mu \sin \alpha}{r_0^3}$.

Je ne donne pas la démonstration détaillée, qui est faite dans tous les cours, lorsqu'on expose la méthode de Gauss.

Action d'un petit courant fermé sur un pôle magnétique de masse égale à l'unité. — J'appelle α l'angle formé par la normale au plan du courant avec la droite OA_0 , et r_0 cette droite OA_0 la plus courte distance de O au circuit ; σ la surface de circuit ; i l'intensité du courant qui le parcourt ; σ' la surface découpée dans le cône $O\sigma$ par un plan perpendiculaire à OA_0 en O.



D'après le théorème de Laplace, l'action du petit élément AB ou ds sur O est normale au plan ($O ds$) et égale à

$$\frac{i ds \sin \epsilon}{r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{ir ds \sin \epsilon}{r^3};$$

ce qui peut s'écrire en négligeant les infiniment petits du troisième ordre

$$\frac{i r ds \sin \varepsilon}{r_0^3} \left(1 - 3 \frac{dr}{r_0} \right)$$

ou encore

$$i \frac{r ds \sin \varepsilon}{r_0^3} - 3 \frac{dr ds \sin \varepsilon}{r_0^3} i.$$

Mais $r ds \sin \varepsilon$ est le double de l'aire du triangle OAB, $dr ds \sin \varepsilon$ est l'aire du trapèze ABCD (en négligeant toujours les infiniment petits d'ordre supérieur au second), et l'action du petit courant sur le pôle d'aimant peut être comparée à celle d'un fluide parfait, dont la pression serait $\frac{i}{r_0^3}$ par unité de surface.

Appliquons maintenant le lemme II ; les pressions $\frac{i}{r_0^3} r ds \sin \varepsilon$ se composent en une pression normale à σ et égale à $\frac{i \sigma}{r_0^3}$.

Les pressions $-3 \frac{dr ds \sin \varepsilon}{r_0^3}$ se composent en deux pressions : l'une normale à σ et égale à $-\frac{3i}{r_0^3} \sigma$, l'autre perpendiculaire à σ' et égale à $+\frac{3i}{r_0^3} \sigma'$, ou comme $\sigma' = \sigma \sin \alpha$ égale à $+\frac{3i}{r_0^3} \sigma \sin \alpha$.

On a donc finalement :

$$1^\circ \text{ Normalement à } \sigma \dots\dots\dots - \frac{i}{r_0^3} \sigma$$

$$2^\circ \text{ Normalement à } \sigma' \dots\dots\dots + \frac{3i}{r_0^3} \sigma \sin \alpha$$

ou encore :

$$1^\circ \text{ Suivant } OA_0 \dots\dots\dots \frac{2i\sigma}{r_0^3} \sin \alpha$$

$$2^\circ \text{ Perpendiculairement à } OA_0 \dots\dots - \frac{i\sigma \cos \alpha}{r_0^3}$$

Nous avons toujours compté comme positives les pressions dirigées vers l'extérieur des polyèdres ; en tenant compte de cette hypothèse, on voit que le petit aimant et le petit courant fermé exercent même action sur un pôle d'aimant, pourvu que le petit aimant soit perpendiculaire au plan du courant et qu'on ait

$$\mu = i\sigma.$$

C. Q. F. D.