



Sur la théorie des bandes de Talbot

M. Carimey

► To cite this version:

M. Carimey. Sur la théorie des bandes de Talbot. J. Phys. Theor. Appl., 1888, 7 (1), pp.60-69.
10.1051/jphystap:01888007006001 . jpa-00238917

HAL Id: jpa-00238917

<https://hal.science/jpa-00238917>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LA THÉORIE DES BANDES DE TALBOT ;

PAR M. CARIMEY.

Quand on observe un spectre virtuel continu, en recouvrant la moitié de la pupille par une lame mince transparente, d'épaisseur convenable, le spectre paraît sillonné de bandes transversales alternativement brillantes et obscures, qu'on appelle *bandes de Talbot*, du nom du physicien anglais qui les a découvertes. Talbot ne tenta pas de donner une explication complète de ce phénomène, il se borna à attribuer d'une manière générale la production des bandes à l'interférence de deux moitiés du faisceau lumineux, dont l'une avait subi un retard par son passage à travers la lame. Un an après cette remarque de Talbot, en 1838, Brewster signala une particularité curieuse du phénomène : il constata que les bandes n'apparaissent que si la lame transparente retarde la moitié du faisceau qui est située du côté de l'arête du prisme. Si l'on retarde l'autre moitié, les bandes n'apparaissent pas, quels que soient l'épaisseur de la lame et le pouvoir dispersif du prisme. Cette dissymétrie ne permet pas d'accepter l'explication de Talbot :

Brewster se croit obligé, pour rendre compte de la production des bandes, d'attribuer à la lumière une nouvelle propriété, *new polarity*.

Airy rejeta l'explication de Brewster; il fit voir que les bandes de Talbot sont produites par la diffraction de la lumière sur les bords de la pupille.

M. Félix Bernard, en 1864, a montré que, au lieu de recouvrir la moitié de la pupille par une lame mince, on peut faire passer le faisceau, en un point quelconque de son trajet, à travers une fente rectangulaire dont une moitié est recouverte par la lame transparente.

Nous allons supposer, pour faire la théorie du phénomène, que cette fente se trouve placée avant le prisme : c'est la disposition expérimentale habituellement employée. Le problème est donc le suivant :

Un faisceau de lumière parallèle sortant d'un collimateur est limité par une fente rectangulaire dont une moitié est recouverte par une lame transparente; on reçoit ensuite le faisceau sur un prisme, puis sur une lentille achromatique L il s'agit de déterminer et d'expliquer les apparences qu'on observe dans le plan focal de la lentille.

On peut regarder l'ouverture rectangulaire comme deux fentes juxtaposées, dont l'une, *celle de droite* par exemple, par rapport à l'observateur situé dans le plan focal, est recouverte par la lame. Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que la source lumineuse soit monochromatique; le prisme ne fera que changer la direction commune des rayons lumineux, et dans le plan focal de la lentille L, on aura une image de la fente, qui ne sera pas une image géométrique, mais une *image de diffraction*. Le calcul de l'intensité de cette image se fait sans difficulté : il est analogue à celui qu'on fait dans le cas d'une seule fente; il a été effectué par Airy; M. Joubert a présenté le même calcul d'une manière différente et très simple ⁽¹⁾.

(¹) *Journal de Physique*, 1^{re} série, t. IV, p. 267; 1873.

On trouve que, si l'intensité de la lumière incidente est égale à l'unité, l'intensité dans une direction qui fait un angle θ avec la direction des rayons géométriques émergeant du prisme est donnée par la formule

$$(1) \quad I = 4l^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}\right)^2} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} [l \sin \theta - (n-1)e],$$

où l est la demi-largeur de la fente, n l'indice de la lame, et e son épaisseur.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$x = \frac{2\pi l \sin \theta}{\lambda} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda};$$

la formule (1) deviendra

$$(2) \quad I = 4l^2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\delta}{2}\right).$$

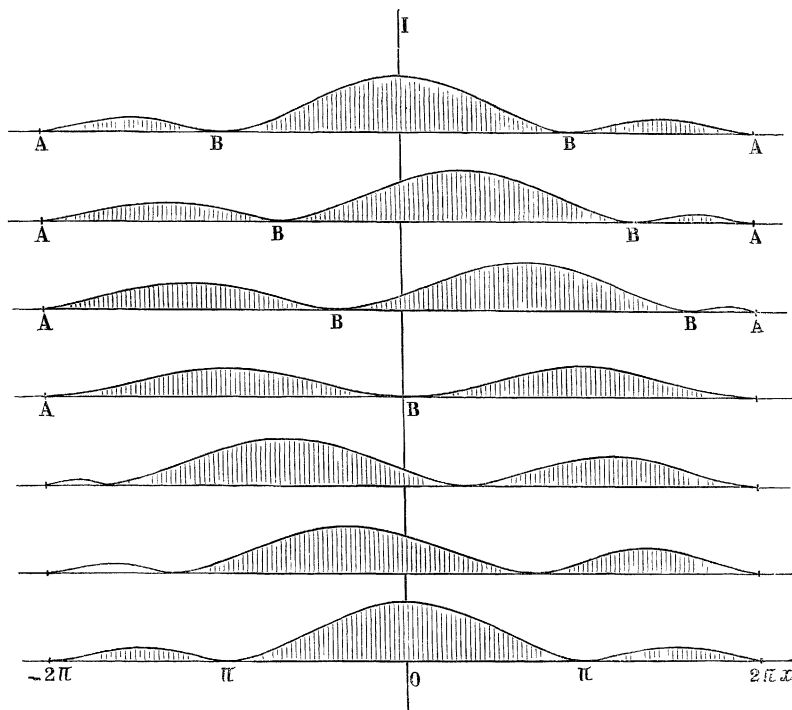
Si l'on opère en lumière monochromatique, comme nous l'avons supposé, la discussion de I ne présente aucune difficulté. Airy a construit des courbes dont les ordonnées représentent les valeurs de I en prenant x comme abscisse, et cela pour des valeurs de δ de $\frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{3}$. Voici ces courbes (*fig. 1*).

On les a bornées à $x = 2\pi$ et à $x = -2\pi$; car, en dehors de ces valeurs, l'intensité I devient sensiblement nulle. Les minima nuls A, A, ... correspondent au premier facteur; les autres minima nuls, B, B, ... proviennent du second facteur; on voit qu'ils se déplacent quand δ varie. En définitive, si la source lumineuse est linéaire, on aura pour image de cette source dans le plan focal de la lentille L, non pas une ligne brillante, mais une sorte de traînée lumineuse présentant des bandes obscures, dont la position dépendra de la lame retardatrice; c'est à cette traînée lumineuse que Airy a donné le nom d'*image de diffraction*.

Supposons maintenant que la source soit blanche, au lieu d'être monochromatique; chacune des radiations simples, dont la superposition constitue cette source, donnera à travers la fente

une image de diffraction; toutes ces images, observées sans le secours d'un prisme, resteraient superposées, et l'on aurait une image blanche, bordée de quelques franges de diffraction. Un prisme, placé sur le trajet du faisceau, aura pour effet de séparer toutes ces images; les images *géométriques*, produites par les

Fig. 1.



diverses radiations simples, au lieu de rester superposées, seront juxtaposées; les images de diffraction seront bien encore superposées en partie, mais alors on conçoit la possibilité d'avoir un spectre cannelé: il suffira qu'il existe entre le retard dû à la lame et la dispersion du prisme une relation telle que les minima de ces diverses images coïncident.

En général, pour avoir l'éclairement en un point déterminé, il faudra faire la somme des éclairements dus à chacune des images de diffraction qui se superposent en ce point.

Soit donc (*fig. 2*) xx' une droite du plan focal située dans le spectre, et perpendiculaire à la direction commune de la source et de l'arête réfringente du prisme; nous nous proposons d'évaluer l'éclairement d'un point quelconque a de cette ligne.

Un autre point quelconque b de cette ligne sera l'image géométrique d'une certaine radiation ou, ce qui revient au même, le centre de l'image de diffraction de cette radiation; l'intensité

Fig. 2.



lumineuse du point de cette image qui se trouve en a aura pour valeur, en appelant x la distance ab comptée à partir de a positivement dans le sens ax et négativement dans le sens ax'

$$I = 4l^2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cos^2 \left(-\frac{x}{2} - \frac{\delta}{2} \right),$$

δ étant le retard correspondant à la radiation donnée.

La quantité de lumière tombant en a et provenant des images de diffraction, dont les centres sont compris dans une bande de largeur dx comprenant le point b , est proportionnelle au nombre de ces images, et par suite à dx ; elle sera donc égale, à un facteur constant près, à $I dx$, et l'éclairement total au point a aura pour valeur

$$J = \int_{-\alpha}^{+\alpha} I dx,$$

2α étant la largeur sensible d'une des images de diffraction. L'expression de I contient deux variables, x et δ : ces deux variables ne sont pas indépendantes; il s'agit d'exprimer δ en fonction de x . Quand on passe d'un point du spectre à un autre, la variation de x et celle de δ dépendent de celle de λ ; nous avons déjà fait remarquer qu'à une très petite distance x , de part et d'autre, du centre de chaque image de diffraction, l'intensité de cette image

est sensiblement nulle, à cause du facteur $\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ qui décroît très

rapidement quand x croît; Esselbach en a conclu que, dans un si petit intervalle, on peut admettre que les variations de x et de δ sont proportionnelles à celle de λ , et par suite proportionnelles entre elles; si donc, quand on passe du point a au point b , l'abscisse passe de la valeur zéro à la valeur x , et que δ_0 devienne δ , on aura, d'après l'hypothèse d'Esselbach,

$$\delta - \delta_0 = Cx \quad \text{ou} \quad \delta = \delta_0 + Cx,$$

C étant une constante, en portant cette valeur de δ dans l'expression trouvée pour I , on a

$$I = 4l^2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cos^2 \left(-\frac{x}{2} - \frac{\delta_0}{2} - \frac{Cx}{2} \right)$$

ou

$$I = 4l^2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cos^2 \left[\frac{x}{2} (1 + C) + \frac{\delta_0}{2} \right];$$

la quantité totale de lumière au point a sera donc

$$J = 4l^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cos^2 \left[\frac{x}{2} (1 + C) + \frac{\delta_0}{2} \right] dx.$$

Cette intégrale est impossible à calculer rigoureusement; Esselbach a tourné la difficulté d'une manière ingénieuse: il fait remarquer que l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} I dx$$

peut se calculer sans difficulté; il a remplacé les limites $-\alpha$ et $+\alpha$ par $-\infty$ et $+\infty$: cette modification n'altère pas sensiblement la valeur de l'intégrale, puisque les éléments différentiels que l'on ajoute sont sensiblement nuls, I étant très voisin de zéro pour $x > \alpha$. Reste donc à calculer cette dernière intégrale.

On a

$$\cos^2 \left[\frac{x}{2} (1 + C) + \frac{\delta_0}{2} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \delta_0 \cos x (1 + C) - \frac{1}{2} \sin \delta_0 \sin x (1 + C).$$

Posant $\frac{x}{2} = z$ et substituant dans J, il vient

$$\begin{aligned} J = 4l^2 & \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz \right. \\ & + \cos \delta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos 2z (1 + C) dz \\ & \left. - \sin \delta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \sin 2z (1 + C) dz \right]. \end{aligned}$$

La première intégrale est égale à π , la troisième est nulle; car, pour des valeurs égales et de signes contraires de la variable, l'élément différentiel a des valeurs égales et de signes contraires; pour calculer la deuxième ou

$$M = \cos \delta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos 2z (1 + C) dz,$$

je transforme l'élément différentiel de la manière suivante,

$$\frac{\sin^2 z \cos 2z (1 + C)}{z^2} = \left[-\sin^2 z (1 + C) + \frac{1}{2} \sin^2 z (2 + C) + \frac{1}{2} \sin^2 C z \right] \frac{1}{z^2}.$$

Portant cette valeur dans l'intégrale M, on voit qu'elle est la somme de trois intégrales qu'il est facile d'évaluer au moyen de la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pm k z)}{z^2} dz = \mp k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \mp k \pi,$$

qu'on obtient en posant $\pm k z = u$, k étant > 0 .

Il y a quatre cas à considérer suivant les signes des coefficients de z sous le symbole sinus :

- 1° $C \geq 0$;
- 2° $0 > C \geq -1$;
- 3° $-1 > C \geq -2$;
- 4° $-2 > C$.

En faisant le calcul dans ces quatre cas, on trouve facilement :

1° $C \geq 0$: l'intégrale M est nulle, et

$$J = 4 l^2 \pi;$$

2° $0 > C \geq -1$: l'intégrale M est égale à $-C\pi$, et

$$J = 4 l^2 \pi (1 - C \cos \delta_0);$$

3° $-1 > C \geq -2$: l'intégrale est égale à $\pi(2 + C)$, et

$$J = 4 l^2 \pi [1 + (2 + C) \cos \delta_0];$$

4° $-2 > C$: l'intégrale est nulle, et

$$J = 4 l^2 \pi.$$

Dans le premier cas et dans le quatrième, l'éclairement est indépendant de la position du point considéré, puisque J ne dépend pas de δ_0 ; donc le spectre sera continu : *on ne verra pas de bandes*.

Dans les deux autres cas, J dépend de δ_0 et, par suite, de la position du point α dans le spectre; cette position peut, en effet, être définie par la valeur du retard δ_0 correspondant à la radiation qui a son image géométrique en α ; donner δ_0 revient, comme on l'a déjà dit, à donner λ , et un point du spectre ne peut pas être mieux défini que par sa longueur d'onde. Dans ces deux cas donc le spectre présentera des bandes sombres pour les points où

$$\cos \delta_0 = -1,$$

et des bandes brillantes pour ceux où

$$\cos \delta_0 = +1.$$

Les bandes sombres seront tout à fait obscures si $C = -1$; c'est le cas le plus favorable pour les observer. Les bandes brillantes sont donc définies par

$$\delta_0 = 2k\pi = \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda},$$

d'où

$$(3) \quad (n-1)e = k\lambda,$$

k étant un entier quelconque. Ces bandes brillantes seraient donc

sensiblement équidistantes dans un spectre de réseau ; mais il n'en est pas tout à fait ainsi dans un spectre de prisme. Nous avons, en effet, supposé C constant : ceci n'a lieu que dans une petite partie du spectre ; dans cet intervalle seulement, on peut assimiler le spectre prismatique au spectre d'un réseau et, par suite, appliquer la formule (3).

La plus ou moins grande netteté du phénomène dépend de la valeur de C , et les bandes n'existent que si C est négatif. Or C est le rapport entre la variation de δ et celle de x quand on passe d'un point du spectre à un autre ; on en conclut immédiatement que δ doit décroître quand x croît. Dans le cas où nous avons fait le calcul, la lame retardatrice étant placée à la droite de l'observateur, x croît vers la droite ; c'est donc de ce côté que devra être placé le rouge du spectre pour avoir les bandes, puisque δ croît du rouge au violet.

En faisant le calcul dans les autres cas, on arrive toujours au même résultat : la lame retardatrice doit être placée sur le trajet des rayons qui passent le plus près de l'arête du prisme pour obtenir les bandes.

Telle est l'explication qu'on peut donner du phénomène des bandes de Talbot, et de la dissymétrie en apparence si singulière qu'il présente.

Nous allons indiquer en quelques mots comment on peut se servir de ce phénomène pour obtenir une relation entre les indices d'une substance par rapport à deux raies du spectre, les longueurs d'onde correspondantes, l'épaisseur de la lame employée et le nombre des franges comprises entre les deux raies ; nous avons trouvé plus haut la relation

$$(n-1)e = k\lambda;$$

en appliquant cette formule à deux raies λ_1 et λ_2 , on a

$$(n_1-1)e = k\lambda_1,$$

$$(n_2-1)e = (k+p)\lambda_2,$$

p étant le nombre de franges compris entre les deux raies de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 ; l'élimination de k donne

$$p = e \left(\frac{n_2-1}{\lambda_2} - \frac{n_1-1}{\lambda_1} \right).$$

Cette formule peut servir à calculer e (¹).

Si l'on a une colonne gazeuse de longueur e , et qu'on la comprime de manière que son indice passe de la valeur n à la valeur n' , on verra, pendant la compression, les franges se déplacer; s'il passe p franges sous le réticule de la lunette du spectroscopé, pointée sur une raie déterminée du spectre, on aura la relation

$$p\lambda = (n' - n)e,$$

qui fournit la variation de l'indice. Pour de plus amples renseignements sur les dispositifs expérimentaux, on pourra consulter le travail de M. Mascart sur les indices des gaz, paru dans les *Annales de l'École Normale* de 1877.
