Sur l'intensité absolue de la pesanteur

Defforges

SUR L'INTENSITÉ ABSOLUE DE LA PESANTEUR;

PAR M. LE COMMANDANT DEFFORGES.

I. — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

La formule bien connue

$$(1) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

s'applique à un pendule idéal, formé d'un point matériel pesant, relié, par un fil sans poids, rigide et inextensible, à un point absolument fixe autour duquel il exécute, dans un milieu sans résistance, des oscillations planes infiniment petites.

Aucune de ces conditions n'est réalisable dans la pratique des observations qui ont pour but la mesure de g par le pendule.

Le point matériel est remplacé par une masse pesante de dimensions finies. La liaison de cette masse à la suspension se fait à l'aide d'un fil ou d'une verge pesants, non absolument rigides et inextensibles. L'axe idéal de suspension est remplacé par un ressort flexible dont l'élasticité n'est jamais nulle et qui prend, en se courbant, une forme compliquée, ou par un couteau qui roule avec frottement sur un plan, changeant ainsi, à chaque instant, le centre instantané de rotation du système. Les oscillations ont lieu dans un milieu résistant qui est l'air ambiant et enfin le support lui-même, auquel est fixé le ressort ou sur lequel roule le couteau, est mis en mouvement par le pendule et oscille avec lui.

Chacune de ces modifications des conditions théoriques de la formule a, sur l'oscillation d'un pendule matériel, une action troublante qui en modifie le régime et la durée [1].

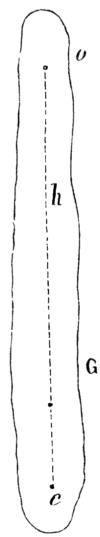
---

[1] Une analyse générale et très complète des actions des *forces troublantes* sur la durée et l'amplitude des oscillations du pendule a été insérée, par M. l'ingénieur Cellérier, dans les *Archives des Sciences physiques et naturelles* publiées à Genève, octobre 1875.

1° Le pendule étant de dimensions finies, au lieu d'être réduit à un point, la valeur de l qu'il faut introduire dans la formule (1), c'est-à-dire la longueur du pendule idéal synchrone, selon l'expression usitée, dépend de la distance h du centre de gravité G du pendule matériel à son axe de suspension O et de la constante k^2 de son moment d'inertie (*fig.* 1)

$$l = h + \frac{k^2}{h}.$$

Fig. 1.



Le point C, pris sur la ligne OG, tel que

$$GC = h' = \frac{k^2}{h},$$

s'appelle le centre d'oscillation correspondant à l'axe de suspension O.

Il suit de là

$$h = \frac{k^2}{h'},$$

c'est-à-dire le centre d'oscillation et l'axe de suspension sont réciproques; et

$$l = h + h',$$

c'est-à-dire la longueur du pendule idéal synchrone est égale à la distance qui sépare l'axe de suspension et le centre d'oscillation correspondant.

La difficulté est de déterminer le point C dans un corps de forme quelconque et d'homogénéité imparfaite. C'est pour cela que Bouguer et, après lui, Borda, Biot et Bessel, se sont efforcés de se rapprocher autant que possible du pendule idéal en faisant osciller une masse de platine de forme géométrique suspendue à un fil métallique extrêmement fin.

De Prony a le premier proposé, dans un Mémoire inédit présenté le 11 vendémiaire an IX (3 octobre 1800) [1] à l'Académie des Sciences, de disposer sur le corps oscillant, outre le couteau de suspension, un second couteau passant par le centre d'oscillation et de faire apparaître ainsi matériellement et le centre d'oscillation et la longueur du pendule synchrone. Il n'a malheureusement jamais réalisé son pendule, ni fait aucune expérience. C'est Kater (1818) qui, le premier, construisit un pendule, dit *convertible,* muni de deux couteaux tellement placés que l'arête de l'un d'eux renfermât le centre d'oscillation correspondant à l'axe de suspension représenté par l'arête de l'autre. Un poids curseur permettait de modifier le moment d'inertie du pendule jusqu'à ce que les durées d'oscillation autour des deux couteaux fussent égales; T étant la durée commune et λ la distance entre les deux arêtes, on a la relation

$$g = \frac{\pi^2 \lambda}{T^2}.$$

Bohnenberger avait proposé, en 1811 (*Astronomie,* Tubingen), un pendule muni de deux couteaux réciproques, mais dépourvu de moyen de réglage, faisant remarquer que l'erreur, commise forcément par le constructeur dans la position du centre d'oscillation, peut être éliminée par une combinaison convenable des résultats de l'observation.

---

(1) Ce Mémoire, que j'ai eu la bonne fortune de retrouver, grâce à l'obligeance de M. le Directeur et de M. le bibliothécaire de l'École des Ponts et Chaussées, dans les papiers de Prony conservés à ladite École, sera publié, par les soins de M. Wolf, dans le tome des *Mémoires de la Société de Physique* relatif au pendule.

On aura, si le centre d'oscillation ne coïncide pas avec l'arête du second couteau,

$$k^2 = hh' \pm \mu^2,$$

$$\frac{k^2}{h} = h' \pm \frac{\mu^2}{h},$$

$$\frac{k^2}{h'} = h \pm \frac{\mu^2}{h'},$$

et, par conséquent, autour du premier couteau,

$$T^2 = \frac{\pi^2}{g}\left(h + h' \pm \frac{\mu^2}{h}\right);$$

autour du second couteau,

$$T'^2 = \frac{\pi^2}{g}\left(h + h' \pm \frac{\mu^2}{h'}\right),$$

d'où

$$\tau^2 = \frac{hT^2 - h'T'^2}{h - h'} = \frac{\pi^2}{g}(h + h') = \frac{\pi^2}{g}\lambda.$$

Afin de faciliter le langage, nous appellerons la quantité τ la *durée d'oscillation théorique du pendule.*

Afin que la formule ne se présente pas sous une forme illusoire, il est nécessaire que $h - h'$ ne soit pas nul, c'est-à-dire que le centre de gravité ne soit pas au milieu de la longueur.

Ce principe fécond, qui est le principe même de la réversion, a été appliqué, pour la première fois, dans le pendule symétrique à axes réciproques, proposé par Bessel en 1849 ([1]) et construit beaucoup plus tard par Repsold, de Hambourg.

2° La suspension à ressort, à cause de l'incertitude du point autour duquel s'effectue la rotation et à cause de la déformation du ressort, ne peut être employée que dans des mesures différentielles, telles que les mesures de Bessel à Berlin et à Königsberg ([2]).

L'analyse de l'influence de l'élasticité et de la courbure du ressort de suspension sur l'oscillation constitue un problème très délicat et dont la solution reste encore incertaine. Ce mode de

---

([1]) *Construction eines symetrisch geformten Pendels mit reciproken Axen.*
([2]) *Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels.*

suspension n'a été d'ailleurs que très rarement employé dans les expériences relatives à la mesure de g (1).

La suspension à couteau, pour être meilleure, n'en présente pas moins des difficultés sérieuses. Le pendule, dans son mouvement oscillatoire, au lieu de tourner autour d'un point fixe, change incessamment de centre instantané de rotation. En effet, le couteau, quelque bien travaillé qu'il soit, se termine par une arête de dimensions transversales finies, quoique très petites. Cette arête, vue au microscope, a l'apparence d'un grossier cylindre à base quelconque. Ce cylindre roule sur le plan de suspension avec frottement. Il en résulte que le centre instantané de rotation se déplace sur la développée de la courbe base du cylindre (2). L'effet du frottement est nul sur la durée; il ne fait que diminuer l'amplitude. Il n'en est pas de même de la variation de position du centre instantané de rotation.

L'équation des forces vives, pour un pendule matériel oscillant dans le vide autour d'un point fixe, est

$$\text{const.} = \mathrm{M}(h^2 + k^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\mathrm{M}gh\cos\theta.$$

Si le pendule, au lieu de tourner autour d'un point fixe, roule sur un cylindre à base circulaire, le travail de la pesanteur, au lieu d'être $\mathrm{M}gh(\cos\theta - \cos\alpha_0)$, devient (*fig.* 2), en négligeant EF,

$$\mathrm{M}g(h+\rho)(\cos\theta - \cos\alpha_0),$$

et l'équation des forces vives est

$$\text{const.} = \mathrm{M}(h^2 + k^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\mathrm{M}g(h+\rho)\cos\theta,$$

ρ étant le rayon de la section droite du cylindre de l'arête.

On a, dès lors,

$$\mathrm{T}^2 = \frac{\pi^2}{g}\,\frac{h^2+k^2}{h+\rho} = \frac{\pi^2}{g}\left(h + \frac{k^2}{h}\right)\left(1 - \frac{\rho}{h} + \frac{\rho^2}{h^2} - \ldots\right);$$

---

(1) *Voir* Pucci et Pisati, *Sulla lunghezza del pendolo a secondi*. Roma, 1883.

(2) Il est fait abstraction ici de la déformation du couteau et du plan de suspension pendant le mouvement. Nous en reparlerons plus tard, à propos de notre méthode différentielle.

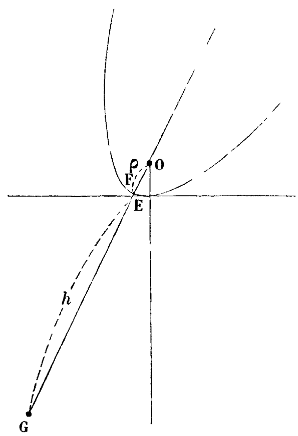
d'où

$$l = \left(h + \frac{k^2}{h}\right)\left(1 - \frac{\rho}{h}\right),$$

en supposant ρ très petit.

Si le rayon de courbure est variable, à cause de sa peti-

Fig. 2.



tesse, on pourra remplacer ρ dans la formule par la quantité moyenne (*fig.* 3)

$$\rho_{\alpha_0} = \frac{\int_{-\alpha_0}^{\beta_0} \rho\, dx}{\alpha_0 + \beta_0},$$

ou, en négligeant un infiniment petit du second ordre,

$$\rho_{\alpha_0} = \frac{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \rho\, dx}{2\alpha_0},$$

qui est le rayon de courbure moyen du cylindre de l'arête, dans la portion de l'arête utilisée pendant une oscillation.

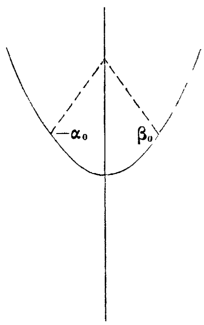
Pour $(n+1)$ oscillations, commençant à l'amplitude α_0 et finissant à l'amplitude α_n, on devra introduire dans la formule, à la place de ρ, l'expression

$$\rho_{\alpha_0 \alpha_n} = \frac{1}{n+1}(\rho_{\alpha_0} + \rho_{\alpha_1} + \ldots + \rho_{\alpha_n});$$

ce qui revient à dire que la correction due à la courbure du couteau est variable, qu'elle varie avec l'amplitude de l'oscillation et que, pour une série d'oscillations donnée, elle dépend de l'amplitude initiale et de l'amplitude finale de la série.

On voit combien il serait difficile de tenir compte directement de cette cause d'erreur. Borda ne s'en est pas préoccupé. Et cependant, le rayon de courbure moyen d'une arête de couteau peut devenir très grand relativement, sans que l'arête cesse de présenter une très bonne apparence. Il est moyennement de 50 microns et peut atteindre facilement 200 microns et plus.

Fig. 3.



Avec le pendule de Kater, les deux couteaux étant fixes et n'ayant pas nécessairement même rayon de courbure, quand on a réalisé l'égalité des deux durées, on a

$$T^2 = \frac{\pi^2}{g}\left(h + \frac{k^2}{h}\right)\left(1 - \frac{\rho}{h}\right),$$

$$T'^2 = \frac{\pi^2}{g}\left(h' + \frac{k^2}{h'}\right)\left(1 - \frac{\rho'}{h'}\right);$$

d'où, puisque $T^2 = T'^2$,

$$k^2 = hh'\left[1 + \frac{h+h'}{h-h'}\,\frac{h\rho' - h'\rho}{hh'}\right].$$

Le centre d'oscillation réciproque de l'arête de chacun des couteaux n'est donc pas exactement sur l'arête de l'autre couteau et la distance de ces deux arêtes n'est pas exactement égale à la longueur du pendule synchrone. La courbure finie des deux couteaux rend donc le réglage illusoire ou au moins incomplet.

Avec le pendule réversible de Bohnenberger, on a, autour du premier couteau, dans les limites d'amplitude α_0, α_n,

$$T_1^2 = \frac{\pi^2}{g}\left(h + \frac{k^2}{h} \pm \frac{\mu^2}{h}\right)\left(1 - \frac{\rho\alpha_0\alpha_n}{h}\right);$$

autour du second couteau, dans les limites d'amplitude α'_0, α'_n,

$$T_1'^2 = \frac{\pi^2}{g}\left(h' + \frac{k^2}{h'} \pm \frac{\mu^2}{h'}\right)\left(1 - \frac{\rho'\alpha'_0\alpha'_n}{h'}\right)$$

et

$$\tau_1^2 = \frac{hT_1^2 - h'T_1'^2}{h - h'} = \frac{\pi^2}{g}\lambda\left(1 + \frac{\rho'\alpha'_0\alpha'_n - \rho\alpha_0\alpha_n}{h - h'}\right).$$

La durée théorique correspondant à la distance mesurée λ des arêtes des couteaux est erronée, à cause de la différence des rayons de courbure moyens.

Bessel a fait remarquer le premier qu'en échangeant les couteaux on aurait, dans les mêmes limites d'amplitude,

$$\tau_1^2 = \frac{hT_1^2 - h'T_1'^2}{h - h'} = \frac{\pi^2}{g}h\left(1 + \frac{\rho'\alpha_0\alpha_n - \rho\alpha_0\alpha_n}{h - h'}\right)$$

et

$$\tau_2^2 = \frac{hT_2^2 - h'T_2'^2}{h - h'} = \frac{\pi^2}{g}\lambda\left(1 - \frac{\rho'\alpha_0\alpha_n - \rho\alpha_0\alpha_n}{h - h'}\right),$$

et que la moyenne

$$\frac{\pi^2}{g}\lambda = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{2}$$

est indépendante des rayons de courbure des couteaux, à la condition expresse que toutes les observations soient faites dans les mêmes limites d'amplitude.

3° Le pendule oscille dans l'air. Or l'air agit sur lui de trois manières différentes : par sa résistance, par la perte de poids qu'il fait subir à tous les corps, par sa viscosité et son adhérence à la surface du corps oscillant.

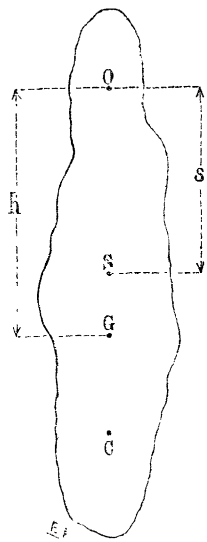
Le pendule en mouvement, choquant les particules de l'air voisines, subit une perte de force vive qui, si la résistance de l'air est supposée proportionnelle au carré de la vitesse, n'agit que sur l'amplitude et n'influence pas la durée (1).

(1) Si la résistance de l'air est supposée proportionnelle à la vitesse, son in-

Le pendule, plongé dans l'air, y perd une partie de son poids égale au poids de l'air déplacé. C'est comme si le pendule était soumis, à la fois, à la pesanteur qui agit au centre de gravité et à une force antagoniste égale et de signe contraire à l'action de la pesanteur sur le fluide déplacé, mais appliquée au centre de figure du corps oscillant,

M' étant la masse du fluide déplacé,
s la distance du centre de figure à l'axe de suspension,
M la masse du pendule.

Fig. 4.



Si dg est la variation apparente de la pesanteur produite par la perte de poids,

$$\frac{h+\frac{k^2}{h}}{l} = \frac{g-dg}{g} = \frac{Mh-M's}{Mh}.$$

La longueur du pendule synchrone devient, de ce fait,

$$l = \left(h+\frac{k^2}{h}\right)\left(1+\frac{M's}{Mh}\right).$$

---

fluence sur la durée est négligeable, à la condition que les oscillations soient très petites et que la résistance de l'air soit une très petite force par rapport au poids du pendule.

Cette correction fut faite la première fois par Bouguer; après lui par Borda, Biot et Kater. Bessel démontra qu'elle est insuffisante. Les expériences de du Buat avaient mis hors de doute, dès 1786 (¹), que lorsqu'un corps se meut dans un fluide il entraîne avec lui une partie du fluide qui adhère à sa surface et communique aux couches environnantes des vitesses variables qui vont en s'éteignant à mesure qu'on s'éloigne du corps en mouvement. C'est ainsi qu'un navire soulève et entraîne une sorte de proue liquide qui s'écoule le long de ses flancs avec une vitesse relative de signe contraire, mais inférieure à la vitesse propre du navire. C'est ainsi qu'il se forme à l'arrière du même navire un remous et un sillage. Les mêmes phénomènes se produisent pendant le mouvement d'un pendule dans l'air. Une certaine masse m' du fluide ambiant est animée de vitesses variables aux différents points de la masse, vitesses que nous pouvons toujours supposer proportionnelles à la vitesse du pendule, d'ailleurs très faible. La force vive du système se trouve dès lors accrue d'une quantité

$$\int dm' c^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = m' \mathrm{C}^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \text{ (²)},$$

et l'équation des forces vives devient

$$\text{const.} = \mathrm{M}\left(h^2 + k^2 + \frac{m'}{\mathrm{M}}\mathrm{C}^2\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2g\mathrm{M}h\cos\theta = 0.$$

La longueur du pendule synchrone est alors

$$l = h + \frac{k^2}{h} + \frac{m'c^2}{\mathrm{M}h} = h + \frac{k^2 + \dfrac{m'\mathrm{C}^2}{\mathrm{M}}}{h} = \left(h + \frac{k^2}{h}\right)\left(1 + \frac{m'c^2}{\mathrm{M}h^2}\right).$$

L'effet est le même que si l'on augmentait de la quantité $\frac{m'\mathrm{C}^2}{\mathrm{M}}$ la constante k^2 du moment d'inertie, ce que Bessel exprimait en disant que le pendule se meut dans l'air comme il se mouvrait dans le vide, en supposant attachée à son centre de gravité une molécule d'air dont la masse dépend de la forme du corps, de l'état de la surface, de l'état de la densité et de la pression du

(¹) Du Buat, *Principes d'Hydraulique.*

(²) Le coefficient c est évidemment différent pour chaque molécule.

fluide environnant et enfin de la vitesse du corps oscillant, c'est-à-dire de l'amplitude de l'oscillation.

On réunit habituellement les deux termes provenant de la poussée et de l'entraînement de l'air en posant

$$n = \frac{m' C^2}{M' hs}.$$

Alors

$$l = \left(h + \frac{k^2}{h}\right)\left[1 + \frac{M' s}{M h}(1+n)\right].$$

C'est ce coefficient n que Poisson a tenté de déterminer par la théorie (il a trouvé $n = \frac{3}{2}$), que Bessel et Baily ont mesuré expérimentalement dans quelques cas définis. Ce coefficient est très variable et peut atteindre une valeur très élevée. Baily cite un cas où il est égal à 7.

Dans la pratique des observations de pendule, on réunit habituellement dans un même terme l'effet total de l'air et l'on écrit

$$l = \left(h + \frac{k^2}{h}\right)\left(1 + \frac{\gamma \alpha_0 \alpha_n}{h}\right).$$

Il est évident que le calcul de la fonction γ, qui dépend de quantités si diverses, est impossible. Il faut ou la déterminer expérimentalement, comme l'a fait Bessel, en faisant osciller dans le milieu considéré deux pendules extérieurement identiques, mais de poids aussi différents que possible, ou l'éliminer par la méthode d'observation.

Bouguer, Borda, Biot et Kater ne se sont pas préoccupés de l'entraînement de l'air. Les résultats de leurs mesures présentent donc, de ce chef, une incertitude analogue à celle qui provient des rayons de courbure négligés des couteaux et que nous avons signalée plus haut.

Quand il s'agit du pendule réversible, on fait encore entrer dans la quantité γ le défaut de coïncidence du centre d'oscillation correspondant à l'un des couteaux, considéré comme axe de suspension, avec l'arête du second couteau.

Bessel a proposé le premier d'éliminer γ par le principe de la réversion. On a, autour du premier couteau,

$$T^2 = \frac{\pi^2}{g}\left(h + \frac{k^2}{h}\right)\left(1 + \frac{\gamma \alpha_0 \alpha_n}{h}\right),$$

autour du second couteau

$$T'^2 = \frac{\pi^2}{g}\left(h' + \frac{k^2}{h'}\right)\left(1 + \frac{\gamma'_{\alpha'_0\alpha'_n}}{h'}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{hT^2 - h'T'^2}{h - h'} = \frac{\pi^2}{g}\left(h + \frac{k^2}{h}\right)\left(1 + \frac{\gamma_{\alpha_0\alpha_n} - \gamma'_{\alpha'_0\alpha'_n}}{h - h'}\right).$$

Si $\gamma_{\alpha_0\alpha_n} = \gamma'_{\alpha'_0\alpha'_n}$, le second terme du second membre est nul.

Il faut et il suffit, pour réaliser l'élimination, que le pendule soit symétrique dans sa forme extérieure et que les observations aient lieu sur les deux couteaux entre les mêmes limites d'amplitude.

Ainsi donc, en résumant, les travaux et les idées accumulées de de Prony, de du Buat, de Bohnenberger, de Kater et enfin de Bessel avaient, dès 1849, conduit à la conception d'un pendule matériel, muni de deux couteaux échangeables, dont les arêtes sont à très peu près des axes réciproques. Un tel pendule élimine, par la réversion, l'erreur de la position du centre d'oscillation, par la symétrie de la forme, l'effet total du milieu ambiant, par l'échange des couteaux, l'influence de la courbure de leurs arêtes; sous la réserve expresse, malheureusement trop souvent méconnue par les observateurs, que les oscillations autour des deux couteaux, c'est-à-dire dans les deux positions du pendule, avant comme après l'échange desdits couteaux, soient effectuées dans les mêmes limites d'amplitude.

Ce pendule, proposé et calculé par Bessel, ne fut exécuté qu'après sa mort, par Repsold de Hambourg. (*A suivre.*)