Sur la condition de stabilité du mouvement d'un système oscillant soumis à une liaison synchronique pendulaire

A. Cornu

SUR LA CONDITION DE STABILITÉ DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME OSCILLANT SOUMIS A UNE LIAISON SYNCHRONIQUE PENDULAIRE;

PAR M. A. CORNU.

Dans l'établissement de certains dispositifs de haute précision usités en Physique ou en Astronomie, on est conduit au problème suivant :

Rendre les oscillations d'un système mobile donné (balancier, lame vibrante, galvanomètre, etc.) *exactement synchroniques avec un mouvement périodique également donné (battements d'une horloge, d'un relai,* etc.).

Le système oscillant à *synchroniser* est, en général, un solide invariable soumis à l'action :

1° D'une force principale proportionnelle à l'écart;

2° D'une force perturbatrice proportionnelle à la vitesse;

3° D'une force additionnelle, constituant la *liaison synchronique,* dont l'intensité est périodique et que, pour simplifier, nous supposerons indépendante de la position du système.

L'équation différentielle du mouvement est

$$\mu \frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + r\theta = \mathrm{F}, \tag{1}$$

θ représentant l'écart angulaire du système; μ le moment d'inertie; q et r les moments des deux premières forces correspondant à l'unité de vitesse angulaire et d'écart; F le moment de la liaison synchronique fonction du temps seulement.

L'intégrale générale de cette équation, expression du mouvement cherché, se compose de la somme de deux termes

$$\theta = \mathcal{A} e^{-\alpha t} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \varphi\right) + \mathcal{F}, \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -\frac{q}{2\mu},\\ \frac{2\pi}{\mathrm{T}} &= \sqrt{\frac{r}{\mu} - \left(\frac{q}{2\mu}\right)^2}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Le premier terme, solution de l'équation (1) sans second membre ($\mathcal{A}$ et φ étant les deux constantes arbitraires de l'intégration), représente une oscillation dont l'amplitude *s'amortit* avec le temps; le second, $\mathcal{F}$, est une solution particulière de l'équation complète. Le mouvement définitif est donc la superposition de l'*oscillation amortie* que le système prendrait si la liaison synchronique n'existait pas et d'un mouvement qui dépend de la loi qui lie l'intensité de la force synchronisante avec le temps.

Le problème proposé consiste à chercher s'il est possible de faire coïncider ce mouvement résultant avec une fonction périodique $\mathcal{F}$ dont la période Θ est différente de la période T de l'oscillation propre du système.

La présence du premier terme, représentant l'oscillation amortie de période T, montre que cette coïncidence n'est possible qu'après un temps suffisamment long, lorsque l'exponentielle négative est devenue sensiblement nulle; mais qu'après cet intervalle le mouvement du système peut être identifié avec un mouvement quelconque $\mathcal{F}$ de période Θ compatible avec la condition de vérifier l'équation (1); d'où l'on conclut :

Pour qu'un système oscillant puisse être synchronisé, il faut et il suffit que le mouvement libre du système soit une oscillation amortie : le régime stable est d'autant plus rapidement atteint que l'amortissement est plus grand.

Cas d'une force périodique suivant la loi pendulaire simple. — Parmi les mouvements périodiques qu'on peut se proposer d'imposer au système oscillant, le plus simple au point de vue de la théorie aussi bien que de la convenance expérimentale est le mouvement *pendulaire simple* ou *oscillation non amortie*. Cherchons donc à quelles conditions doit satisfaire la liaison synchronique F pour donner au système oscillant un régime stable représenté par la fonction circulaire

$$\mathcal{F} = \mathfrak{A} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \psi\right). \tag{3}$$

Il suffit de substituer dans l'équation (1) $\theta = \mathcal{F}$; on en déduit

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{F} = \mathfrak{A} \Bigg[& \left(r - \mu \frac{4\pi^2}{\Theta^2}\right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \psi\right) \\ & + \frac{2\pi}{\Theta} q \cos 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \psi\right)\Bigg] = \mathrm{B} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \Phi\right). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

La force synchronisante est donc aussi une fonction circulaire du temps caractérisée par une amplitude B et une phase Φ qu'on détermine par une identification facile ; on trouve ainsi

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} B &= \mathfrak{M}\sqrt{\left(r-\mu\frac{4\pi^2}{\Theta^2}\right)^2+\frac{4\pi^2}{\Theta^2}q^2} \\ &= \mathfrak{M}\mu\sqrt{\left[\alpha^2+4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{\Theta^2}\right)\right]^2+4\alpha^2\frac{4\pi^2}{\Theta^2}}, \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \operatorname{tang} 2\pi(\Phi-\psi)=\frac{-\dfrac{2\pi}{\Theta}q}{r-\mu\dfrac{4\pi^2}{\Theta^2}}=\frac{2\alpha\dfrac{2\pi}{\Theta}}{\alpha^2+4\pi^2\left(\dfrac{1}{T^2}-\dfrac{1}{\Theta^2}\right)}.$$

Ces expressions permettent de conclure les paramètres B, Φ de la force synchronisante en fonction de ceux du mouvement $\mathfrak{M}$, ψ, ou inversement. La formule (6) montre que $(\Phi-\psi)$ ne peut être nulle que si le coefficient d'amortissement α est égal à zéro ; d'où l'on conclut :

Lorsque la force synchronisante et le mouvement synchronisé sont représentés par la loi pendulaire simple, il existe toujours une différence de phase, entre la force et le mouvement : cette différence de phase, conséquence de l'amortissement, correspond toujours à un retard du mouvement synchronisé.

Cas d'une force périodique quelconque. — On peut, sans calcul nouveau, obtenir le mouvement, en régime stable, dû à une force variable quelconque F dont la période est Θ. On sait que l'expression de cette force en fonction du temps est, en général, développable par la série de Fourier et peut être mise sous la forme

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} F &= B_1\sin 2\pi\left(\frac{t}{\Theta}-\Phi_1\right) \\ &\quad + B_2\sin 2\pi\left(\frac{2t}{\Theta}-\Phi_2\right)+\ldots+B_n\sin 2\pi\left(\frac{nt}{\Theta}-\Phi_n\right)+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Le second membre F de l'équation différentielle (1) se composera donc d'une somme de termes ayant la même forme que ci-dessus :

le terme F de l'intégrale générale sera la somme de termes $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_n$ assujettis seulement à vérifier individuellement l'équation (1); des expressions (5) et (6) on déduira donc aisément les paramètres du terme général en y changeant B en B_n, $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}_n$, Φ en Φ_n et Θ en $\frac{\Theta}{n}$.

On voit alors que chaque terme périodique de la force produit un effet périodique correspondant sur l'amplitude et la phase du mouvement résultant, mais que cet effet va en décroissant rapidement avec l'ordre n, car les termes successifs contiennent n^2 ou n^4 au dénominateur : cette circonstance permet, dans diverses applications, de réduire la série à ses premiers termes ou d'utiliser les développements peu convergents représentant certaines fonctions discontinues.

Vérification expérimentale des résultats précédents. — Il importe de vérifier entre des limites aussi étendues que possible les résultats ci-dessus, particulièrement en ce qui concerne l'influence de l'amortissement sur l'établissement du régime stable, sur la phase et l'amplitude du mouvement définitif : on y parvient en utilisant les phénomènes d'induction.

Si l'on ferme le circuit d'un galvanomètre par un solénoïde au voisinage duquel oscille un aimant, on réalise toutes les conditions étudiées ci-dessus : on retrouve en effet le système oscillant (aimant mobile, dans un cadre fixe ou cadre mobile devant un aimant fixe) soumis aux trois forces précitées : couple principal proportionnel à l'écart (action terrestre ou torsion), couple d'amortissement (réactions électromagnétiques du cadre et de l'aimant) et liaison synchronique constituée par l'action du courant induit dans le solénoïde.

Pour faire les vérifications dans les conditions les plus concluantes, on construit un galvanomètre du type Deprez-d'Arsonval, dont le cadre très léger, suspendu à un fil de torsion assez gros, présente une période d'oscillation à circuit ouvert d'environ $\frac{1}{7}$ de seconde : ce galvanomètre, fermé en court circuit, possède un coefficient d'amortissement considérable ; mais, lorsqu'on introduit dans le circuit des résistances croissantes, le coefficient d'amortissement diminue de plus en plus : on démontre qu'il varie sensiblement en raison inverse de la résistance totale du circuit [1].

L'aimant inducteur est fixé transversalement à une lame vibrante munie de curseurs pouvant faire varier la période d'oscillation entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{2}$ seconde. Le solénoïde induit est formé d'une torsade de dix fils isolés identiques, ayant chacun une résistance égale à celle du galvanomètre : cinq d'entre eux sont réunis en *quantité* (circuit C_1) et cinq en *tension* (circuit C_2).

Il s'agit de comparer le mouvement du cadre du galvanomètre avec la force périodique qui le sollicite, c'est-à-dire avec l'intensité du courant induit, et de vérifier si les lois mathématiques exprimées ci-dessus s'appliquent exactement. Une telle vérification serait assez complexe si l'on voulait déterminer séparément ces deux éléments en fonction du temps : elle devient, au contraire, intuitive si l'on a recours à la *composition optique* des oscillations de l'aimant et du galvanomètre. A cet effet, la lame vibrante, qui est verticale, porte un bras horizontal muni d'une petite boule d'acier poli ; le point brillant qui s'y forme oscille pendulairement

---

(1) Soient c le couple de torsion du cadre, q' le coefficient de la résistance de l'air et i l'intensité du courant qui parcourt le cadre (n tours, s aire moyenne, f intensité du champ magnétique); on a, pour l'équation différentielle du mouvement du cadre,

$$\mu \frac{d^2\theta}{dt^2} + q' \frac{d\theta}{dt} + c\theta = fnsi \qquad \text{avec} \qquad i = \frac{\Sigma E}{R},$$

R étant la résistance *totale* du circuit. La somme des forces électromotrices ΣE se compose de $F(t)$ développée par l'aimant dans le solénoïde, $-fsn\frac{d\theta}{dt}$ développée par le déplacement du cadre, et $-L\frac{di}{dt}$ par l'induction des spires sur elles-mêmes; d'où

$$Ri = F(t) - fsn\frac{d\theta}{dt} - L\frac{di}{dt};$$

comme on peut négliger le coefficient L de self-induction du système, l'élimination de i est immédiate et l'on trouve

$$\mu \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(q' + \frac{f^2 s^2 n^2}{R}\right)\frac{d\theta}{dt} + c\theta = \frac{fsn}{R} F(t).$$

Le coefficient d'amortissement du galvanomètre est donc représenté par

$$\alpha = -\frac{1}{2\mu}\left(q' + \frac{f^2 s^2 n^2}{R}\right).$$

suivant une petite ligne verticale; avec une loupe on en observe l'image réelle, réfléchie sur le miroir concave du galvanomètre; on obtient ainsi une ligne lumineuse dont chaque point a pour abscisse verticale le mouvement pendulaire de l'aimant, et pour ordonnée horizontale la déviation du galvanomètre. Le choix de la durée d'oscillation, voisin de $\frac{1}{7}$ de seconde, permet une persistance visuelle suffisante pour donner l'impression d'une ligne continue sans empêcher cependant de reconnaître le sens de la description de la courbe. Voici les principales expériences [1] qu'on peut faire avec ces deux appareils et une boîte de résistances auxiliaires :

1° *Influence de la grandeur de l'amortissement sur la durée du régime variable.* — On ferme le circuit du galvanomètre par l'un des circuits du solénoïde, de préférence par celui dont la résistance est la plus faible (circuit C_1), et l'on met l'aimant en oscillation : l'image atteint presque aussitôt une figure permanente; le régime variable ne dure donc que quelques instants, et le régime stable persiste ensuite indéfiniment.

Les périodes d'oscillation de l'aimant et du galvanomètre n'ont pas besoin d'être très voisines; elles peuvent différer de 10, 20 pour 100 et même davantage, sans que la synchronisation cesse d'avoir lieu rapidement, grâce à la grandeur du coefficient d'amortissement du galvanomètre fermé sur une faible résistance.

Si l'on introduit progressivement dans le circuit des résistances auxiliaires, la durée du régime variable augmente parce que l'amortissement diminue (en raison inverse de la résistance totale), mais le régime stable finit toujours par s'établir. Cependant, avec les grandes résistances, la durée du régime variable serait si longue qu'il deviendrait nécessaire, pour en observer la fin, d'entretenir les oscillations de la lame vibrante.

2° *Forme de la courbe : cas de l'ellipse.* — La forme de la courbe dépend de la distribution magnétique de l'aimant et des

---

(1) Les appareils ont fonctionné sous les yeux de la Société de Physique en projetant l'image du point lumineux mobile : pour obtenir une intensité lumineuse suffisante, la petite boule d'acier poli était remplacée par une lentille à court foyer bordée d'un large écran circulaire sur laquelle on faisait tomber un faisceau de lumière électrique.

trajectoires de ses points : on obtient des courbes particulières avec un aimant gros et court. Mais avec une aiguille mince et longue, dont l'extrémité décrit un élément d'axe du solénoïde, on obtient, comme dans les expériences de Lissajous, une ellipse parfaitement régulière ; on peut même la transformer sensiblement en un cercle en réglant l'intensité magnétique de l'aiguille ou la longueur du bras qui porte le point brillant.

Ce résultat est une vérification des lois précédentes : on sait, en effet, que la force électromotrice d'induction, et par suite l'intensité dans le circuit, sont proportionnelles à la vitesse du pôle d'aimant qui se déplace axialement dans l'intérieur d'un solénoïde suffisamment long. Le déplacement du pôle étant pendulaire, l'intensité du courant ou la force synchronisante proportionnelle à la dérivée du déplacement par rapport au temps suit donc aussi la loi pendulaire simple, mais avec un quart de période comme différence de phase inhérente aux arguments de la fonction circulaire et de sa dérivée. La forme elliptique de la courbe prouve que, conformément aux résultats ci-dessus, le déplacement du système synchronisé suit la même loi pendulaire que la force synchronisante.

3° *Influence de la grandeur de l'amortissement sur la différence de phase. Deux cas extrêmes.* — La discussion de l'expression de $\Phi - \psi$ (6) montre que la variation du coefficient d'amortissement α agira d'une manière différente suivant la grandeur relative de α^2 et de $4\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta^2}\right)$. On peut donc distinguer deux cas extrêmes.

a. La différence des périodes est grande : α devient négligeable devant l'autre terme, α n'intervient plus qu'au numérateur, et alors la différence de phase varie dans le même sens que l'amortissement. L'expérience montre en effet que, si l'on supprime progressivement les résistances auxiliaires du circuit, l'ellipse s'incline de plus en plus sur la diagonale du rectangle circonscrit. L'effet devient très démonstratif si, par un artifice convenable, on rend constant le rectangle circonscrit ; on y parvient en augmentant la force électromotrice proportionnellement à la résistance totale du circuit : l'intensité du courant n'est pas modifiée.

mais α varie en raison inverse de la résistance. C'est dans ce but que les deux circuits C_1 et C_2 du solénoïde ont été préparés : si, pendant l'oscillation de l'aimant, on substitue, par le jeu d'un commutateur, l'un des circuits à l'autre, on voit l'ellipse, presque verticale dans le circuit en tension C_2, s'incliner sur la diagonale avec le circuit en quantité C_1.

b. Si, au contraire, les deux périodes sont très voisines, c'est le terme en α^2 qui prend l'importance au dénominateur, ce qui tend à renverser son influence, car α est en facteur au numérateur. Aussi, contrairement au cas précédent, c'est avec les grandes résistances que l'ellipse s'incline le plus sur la diagonale du rectangle. Toutefois, le phénomène est moins simple, parce que l'amplitude B du galvanomètre (côté horizontal du rectangle) grandit beaucoup, ainsi qu'on le voit à l'inspection de (5).

4° *Influence de la différence des périodes sur la différence de phase.* — Lorsque l'amortissement est faible, la différence de phase (6) est petite : mais on peut accroître cette différence en faisant varier convenablement la différence des périodes : l'expression $\tang 2\pi(\Phi - \psi)$ devient même infinie pour une valeur de T voisine de Θ, ce qui rend la différence de phase égale à $\frac{1}{4}$, laquelle, ajoutée à la fraction $\frac{1}{4}$, inhérente au dispositif, produit $\frac{1}{2}$. L'ellipse se réduit alors à une diagonale du rectangle.

L'expérience vérifie de tout point ces conclusions; il suffit, toutes choses égales d'ailleurs, de faire marcher le curseur progressivement dans le même sens : l'ellipse stable s'aplatit de plus en plus, devient une droite et reparaît au delà, mais avec un sens de description inverse.