HAL
open science

Sur la théorie de la machine de Gramme

M. Mascart

To cite this version:

M. Mascart. Sur la théorie de la machine de Gramme. J. Phys. Theor. Appl., 1885, 4 (1), pp.341-348. 10.1051/jphystap:018850040034100 . jpa-00238418

HAL Id: jpa-00238418
https://hal.science/jpa-00238418

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LA THÉORIE DE LA MACHINE DE GRAMME;

PAR M. MASCART.

1. Sans aborder dans toute sa généralité le problème des machines magnéto-électriques, il est utile d'examiner d'abord des cas simples qui permettent une analyse détaillée du phénomène. Les résultats ainsi obtenus ne s'appliquent pas directement aux machines réelles, mais ils sont au moins une première approximation qui peut servir de guide; c'est à ce titre que nous ferons quelques remarques sur la machine de Gramme.

Considérons une machine de Gramme dont la bobine tourne dans un champ magnétique invariable, comme celui qui serait produit par des aimants dont le magnétisme serait absolument rigide, et supposons que le champ magnétique soit symétrique par rapport à deux plans rectangulaires passant par l'axe de rotation.

L'aimantation du fer doux qui constitue l'anneau est immobile dans l'espace et l'on peut admettre qu'elle occupe la même position que si l'anneau était immobile. Il est probable que cette hypothèse n'est pas exacte et que l'aimantation n'est pas instantanée; mais aucune expérience ne semble avoir démontré encore qu'il y ait un retard appréciable, en dehors des courants induits dans la masse de fer et qui produisent un effet équivalent.

L'expérience indique, en outre, que les points d'appui des balais ne doivent pas correspondre aux boucles situées dans le plan de symétrie perpendiculaire aux forces, ou plan neutre, mais, lorsque la machine est employée comme électromoteur, aux boucles qui ont dépassé cette position d'un angle θ, qu'on appelle *angle de calage;* on en verra plus loin la raison.

Si les balais sont réunis par un circuit extérieur, le courant ne peut pas être constant en toute rigueur, car la force électromotrice et la résistance du circuit sont modifiées périodiquement, parce que les boucles sont tour à tour fermées sur elles-mêmes quand les balais appuient sur deux touches consécutives. Cette espèce de vibration du courant principal donne lieu à des extra-courants qui diminuent l'effet utile de la machine, mais l'amplitude relative des oscillations est d'autant plus faible que le nombre des

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphystap:018850040034100

boucles de la bobine est plus grand, et l'on ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité en supposant le courant uniforme.

Enfin nous admettrons encore que l'aimantation du fer est la superposition des deux aimantations qui seraient produites séparément par le champ extérieur et par le courant lui-même. Dans ce cas, l'aimantation due au courant n'influe pas sur la force électromotrice, par raison de symétrie, chacune des moitiés de l'anneau comprenant des boucles qui renferment deux à deux, de ce chef, des forces électromotrices égales et de signes contraires.

2. Supposons qu'il y ait $4m$ boucles distinctes, chacune d'elles étant formée de p spires autour de l'anneau, et appelons $4P$ le nombre total des spires; on a

$$4P = 4mp, \quad \text{ou} \quad P = mp.$$

Soient q le flux de force magnétique, provenant du champ extérieur, qui est coupé par une spire pendant une demi-rotation entre deux points situés dans le plan neutre, $f(\theta)$ le flux de force coupé dans l'angle θ de calage. Ces dernières forces agissant en sens contraire, l'excès de flux de force utile est $q - 2f(\theta)$ et le secteur réellement efficace correspond à l'angle $\pi - 2\theta$. Le flux de force utile coupé par une spire pour une rotation complète est

$$2[q - 2f(\theta)]$$

et, si la bobine fait n tours par seconde, le flux de force coupé par seconde est

$$(1) \qquad Q = 4P2n[q - 2f(\theta)].$$

Pour un courant d'intensité I dans le circuit extérieur, c'est-à-dire d'intensité $\frac{I}{2}$ dans la bobine, le travail électromagnétique W dépensé par seconde est

$$(2) \qquad W = \frac{I}{2} Q = nI4P[q - 2f(\theta)] = nIE_1.$$

Le facteur E_1, que M. Deprez appelle *fonction caractéristique* de la machine, dépend du champ extérieur et de l'angle de calage.

Lorsque l'angle de calage est invariable, ce facteur est con-

stant si le champ extérieur est produit par une cause étrangère au courant, ou une fonction de l'intensité seule si le champ est dû à des électro-aimants excités par le courant lui-même.

Si l'on remarque, en outre, que l'aimantation de l'anneau par le courant est oblique au champ extérieur, le mouvement de l'anneau lui-même exige une dépense de travail inutile, puisqu'elle provoque des courants induits et un dégagement de chaleur dans la masse du fer; nous n'en tiendrons pas compte.

3. L'angle de calage est déterminé pratiquement par la condition de supprimer les étincelles. Or les étincelles sont dangereuses, non pas au moment où le balai rencontre une touche, mais quand il s'en détache; pour supprimer les étincelles dans ce dernier cas, il faut que les deux touches successives, celle qui reste sous le balai et celle qui lui échappe, soient au même potentiel et que l'introduction de la boucle correspondante dans le circuit général n'altère pas l'égalité des potentiels. Si la boucle a été fermée pendant un temps supérieur à celui de la période variable relative à son propre circuit, la condition précédente exige que cette boucle renferme déjà une force électromotrice capable d'y produire le courant $\frac{I}{2}$. Cette force électromotrice comprend d'abord une partie qui est due au champ extérieur, c'est-à-dire

$$p\frac{df(\theta)}{dt} = pf'(\theta)\frac{d\theta}{dt} = p\,2n\pi f'(\theta).$$

En outre, on doit tenir compte, comme l'a fait remarquer M. Potier, de l'aimantation de l'anneau par le courant qui donne un flux de force de sens contraire et l'on peut représenter la force électromotrice correspondante par $p\,2n\pi M$, le facteur M étant proportionnel à l'aimantation. Pour que la boucle fermée sur elle-même renferme le courant $\frac{I}{2}$, il faut donc qu'on ait, en appelant r la résistance d'une spire,

$$pr\frac{I}{2} = p\,2n\pi[f'(\theta) - M]$$

ou

$$(3) \qquad f'(\theta) = \frac{Ir}{4n\pi} + M = I\left(\frac{r}{4n\pi} + \frac{M}{I}\right);$$

il en résulte que l'angle de calage est indépendant du nombre des spires qui constituent chaque boucle.

Si l'aimantation par le courant est proportionnelle à l'intensité, on peut poser

$$M = \frac{r'}{4\pi} I,$$

ce qui donne

$$(4) \qquad f'(\theta) = \frac{I}{4n\pi}(r + nr').$$

Dans ce cas, l'aimantation par le courant n'interviendrait dans la condition relative à l'angle de calage que par l'introduction d'une résistance fictive nr' proportionnelle à la vitesse.

4. Le travail perdu comprend d'abord l'énergie calorifique qui correspond au passage du courant dans la résistance extérieure inutilisée ρ et dans la résistance moyenne de la bobine. La résistance de la bobine est alternativement mpr ou $(m - \frac{1}{2})pr$, suivant que les balais appuient sur une ou sur deux touches; on peut prendre la valeur moyenne $(m - \frac{1}{4})pr$. Le travail perdu par échauffement est donc égal à

$$I^2[\rho + (m - \tfrac{1}{4})pr].$$

D'autre part, M. Joubert a montré que la suppression et le rétablissement du courant dans la boucle fermée constituent une perte de travail qui équivaut à un accroissement fictif de la résistance. En appelant l le coefficient de self-induction d'une boucle, la perte d'énergie due à la chute du courant est $\frac{l}{2}\frac{I^2}{4}$; comme l'opération se répète deux fois par tour pour chaque boucle, il en résulte une perte totale par seconde de $mnlI^2$, c'est-à-dire équivalente à celle qui serait produite par une résistance fictive égale à mnl.

Le coefficient d'induction l est proportionnel au carré du nombre des spires et peut être représenté par λp^2. Si l'enroulement renferme un nombre total constant $4P$ de spires, cette résistance fictive

$$(5) \qquad mnl = \frac{P}{p} n\lambda p^2 = nP\lambda p$$

est proportionnelle au nombre des spires qui constituent chaque

boucle, tandis que la résistance moyenne de la bobine

$$(m-\tfrac{1}{4})\,pr = \left(\mathrm{P}-\frac{p}{4}\right)r$$

en est à peu près indépendante.

La résistance fictive $mnl = n\mathrm{P}\lambda p$ est réduite au minimum quand chaque boucle ne comprend qu'un spire. Cette condition est réalisée dans les machines à gros fil employées en galvanoplastie, mais des difficultés mécaniques ne permettent pas de l'appliquer aux machines à fil fin, nécessaires pour obtenir de grandes forces électromotrices.

Finalement, l'excès de l'énergie dépensée sur l'énergie perdue, ou le travail utile U pendant l'unité de temps, est

$$\mathrm{U} = n\mathrm{IE}_1 - \mathrm{I}^2[\rho + (m-\tfrac{1}{4})\,r + mnl]. \tag{6}$$

5. Pour un calage déterminé, E_1 est une fonction $\mathrm{F}(\mathrm{I})$ de l'intensité seule; en représentant par R la résistance totale comprise dans la parenthèse, on a donc

$$\mathrm{U} = n\mathrm{IF}(\mathrm{I}) - \mathrm{RI}^2, \tag{7}$$

et le rendement est

$$\alpha = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}} = 1 - \frac{\mathrm{RI}}{n\,\mathrm{F}(\mathrm{I})}. \tag{8}$$

Dans les machines auto-excitatrices, le rapport $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{F}(\mathrm{I})}$ va toujours en croissant avec l'intensité; comme $\mathrm{F}(0)$ n'est pas nul à cause du magnétisme rémanent, le rendement est d'autant plus grand que le courant est plus faible et la rotation plus rapide.

A vitesse constante, le travail utile est maximum pour la condition

$$n[\mathrm{F}(\mathrm{I}) + \mathrm{IF}'(\mathrm{I})] = 2\mathrm{IR}, \tag{9}$$

qui détermine l'intensité correspondante du courant; on en déduit

$$\frac{\mathrm{IR}}{n\,\mathrm{F}(\mathrm{I})} = \tfrac{1}{2} + \frac{\mathrm{IF}'(\mathrm{I})}{2\,\mathrm{F}(\mathrm{I})}, \tag{10}$$

de sorte que le rendement α_m, relatif au travail maximum, est

$$\alpha_m = \tfrac{1}{2} - \frac{\mathrm{I}\,\mathrm{F}'(\mathrm{I})}{2\,\mathrm{F}(\mathrm{I})} \tag{11}$$

Or la fonction F (I) est toujours croissante, parce que l'aimantation des excitateurs n'atteint jamais sa valeur maximum et que les fils mêmes de l'électro-aimant introduisent dans cette fonction un terme proportionnel à l'intensité du courant. La valeur de F'(I) étant toujours positive, on en conclut que le rendement relatif au travail maximum est toujours inférieur à 0,5. Ce rendement ne peut atteindre la valeur 0,5 que si l'on a $F'(I) = 0$, c'est-à-dire si le champ extérieur est invariable.

6. La forme de la fonction $f(\theta)$ peut être déterminée par expérience. Il suffit, le champ extérieur étant maintenu par un courant I, de relier une seule boucle à un circuit extérieur renfermant un galvanomètre balistique et de mesurer les quantités d'électricité induites pour une série de variations égales et très petites $d\omega$ de l'angle ω que fait la boucle avec le plan neutre; ces quantités sont proportionnelles à $f'(\omega)\,d\omega$. On vérifierait ces résultats partiels par la quantité d'électricité induite correspondant à un déplacement d'un quart ou d'une demi-circonférence. La courbe des valeurs de $f'(\omega)$ est symétrique par rapport à l'ordonnée $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et la force électromotrice E_1 est représentée par l'aire comprise entre les ordonnées qui correspondent aux angles θ et $\pi - \theta$. La valeur de l'ordonnée $f'(\theta)$ sera donnée par l'équation (4).

Si l'on représente par R' la résistance extérieure utile, y compris la résistance équivalente aux forces électromotrices vaincues, on a $U = I^2 R'$ et l'équation (7) donne

$$I = n\,\frac{F(I)}{R - R'}. \tag{12}$$

L'équation (4) devient alors

$$f'(\theta) = \frac{F(I)}{4\pi}\,\frac{r + nr'}{R + R'}. \tag{13}$$

Pour une machine donnée, la dérivée $f'(\theta)$ et l'angle de calage θ croissent avec F (I), c'est-à-dire avec l'intensité du courant, avec la vitesse et en sens inverse de la résistance totale.

Les étincelles reparaissent dès que l'angle de calage est plus petit ou plus grand que la valeur donnée par cette équation; la force électromotrice est alors plus grande ou plus faible que celle qui correspond au régime sans étincelles.

7. On peut, dans certains cas, connaître approximativement la fonction $f(\theta)$. L'anneau est généralement à peu près cylindrique. Si le champ extérieur est uniforme, l'aimantation de l'anneau est analogue à l'électrisation d'un conducteur dans un champ électrique; le flux d'induction magnétique dans la masse de fer doux est uniforme et, comme il est la continuation du flux de forces extérieur, il en résulte que $f(\theta)$ est proportionnel à la projection de l'arc correspondant sur le plan neutre, c'est-à-dire à $1 - \cos\theta$. On a donc

$$f(\theta) = A(1 - \cos\theta), \tag{14}$$

ce qui donne

$$q = f(\pi) = 2A, \qquad q - 2f(\theta) = 2A\cos\theta,$$
$$F(I) = E_1 = 4P\,2A\cos\theta, \quad f'(\theta) = A\sin\theta.$$

On déduit alors de l'équation (13)

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{2P}{\pi}\,\frac{r + nr'}{R + R'}. \tag{15}$$

L'angle de calage est nul si la résistance totale est très grande et, par suite, le courant très faible.

Le courant est maximum quand la résistance extérieure est nulle; on a alors

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{2}{\pi}\,\frac{P(r + nr')}{\rho + \left(P - \frac{p}{2}\right)r + 4nPp\lambda}.$$

8. Les considérations qui précèdent ne sont, sans doute, qu'une première approximation; mais elles me paraissent avoir l'avantage de mettre en relief les causes qui interviennent dans le jeu des machines.

Pour le calage des balais, en particulier, on a admis que le courant a eu le temps de s'établir dans la bobine isolée. En réalité, au lieu de l'équation (3), on doit employer, pour déterminer le courant i dans la boucle, l'équation

$$ri + l\frac{di}{dt} = 2n\pi[f'(\theta) - M] = E.$$

La force électromotrice E étant sensiblement constante, l'intensité du courant au moment où la boucle échappe au balai, à l'époque t après qu'elle a été isolée, est

$$i = \frac{E}{r} + \left(i_0 - \frac{E}{r}\right) e^{-\frac{rt}{l}}$$

L'intensité initiale i_0 étant égale à $-\frac{I}{2}$, pour que l'intensité finale soit égale à $\frac{I}{2}$, il faut qu'on ait

$$2E - rI = (2E + rI)\, e^{-\frac{rt}{l}},$$

ou

$$2E\left(1 - e^{-\frac{rt}{l}}\right) = rI\left(1 + e^{-\frac{rt}{l}}\right).$$

Remplaçant dans cette expression la force électromotrice E par sa valeur, on en déduit

$$4n\pi[f'(\theta) - M] = rI\,\frac{1 + e^{-\frac{rt}{l}}}{1 - e^{-\frac{rt}{l}}}.$$

Si l'on admet encore que l'aimantation est proportionnelle au courant, il vient

$$(16) \qquad f'(\theta) = \frac{I}{4n\pi}\left(r\,\frac{1 + e^{-\frac{rt}{l}}}{1 - e^{-\frac{rt}{l}}} + nr'\right),$$

au lieu de l'équation (4).

On voit que, pour une même intensité I, la valeur de l'angle de calage θ est plus grande que si le temps de fermeture t de la boucle était supérieur à la durée du courant variable dans le circuit de cette boucle.