SUR LA FORME DE LA SURFACE DE L'ONDE LUMINEUSE DANS UN MILIEU ISOTROPE PLACÉ DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME : EXISTENCE PROBABLE D'UNE DOUBLE RÉFRACTION PARTICULIÈRE DANS UNE DIRECTION NORMALE AUX LIGNES DE FORCE;

PAR M. A. CORNU.

Un milieu isotrope transparent, placé dans un champ magnétique, acquiert, comme on sait, le pouvoir rotatoire dans le sens

d'où

$$\frac{p}{P} = \frac{f}{H-f} 0,622.$$

$\frac{f}{H-f}$ peut être pris pour mesure de proportion d'humidité; elle est indépendante de la température et de la pression.

des lignes de force. Verdet, dans ses belles recherches, a établi expérimentalement des résultats qu'on peut énoncer ainsi :

La rotation du plan de polarisation est proportionnelle : 1° à l'intensité M du champ magnétique; 2° au cosinus de l'angle α que fait la direction du faisceau lumineux avec les lignes de force du champ.

Si l'on interprète cette loi suivant la théorie de Fresnel (vérifiée d'ailleurs par les expériences de plusieurs physiciens), on écrira que les vitesses v' , v'' de propagation des ondes planes dont la vibration est circulaire gauche ou circulaire droite sont, à l'ordre d'approximation que comportent les mesures, soumises à la condition suivante

$$v'' - v' = 2kM \cos \alpha,$$

$2k$ étant une constante spécifique du milieu isotrope, dépendant de la longueur d'onde de la radiation observée.

D'autre part, j'ai établi par expérience ⁽¹⁾ la loi suivante :

La moyenne des vitesses de propagation des ondes circulaires de sens inverses séparées par l'action magnétique est sensiblement égale à la vitesse commune v de ces ondes quand l'action magnétique est nulle.

D'où la relation

$$v' + v'' = 2v.$$

Ces deux conditions analytiques sont l'expression de deux lois expérimentales : si l'on admet que ces deux lois sont rigoureuses (ce qu'on ne peut guère démontrer que par leurs conséquences), on en conclura les valeurs de v' et v'' , c'est-à-dire les vitesses des ondes planes polarisées circulairement dans les deux sens pour toutes les directions de propagation,

$$v' = v - kM \cos \alpha, \quad v'' = v + kM \cos \alpha.$$

Il suffira dès lors d'employer la méthode géométrique de Fresnel pour obtenir, par un simple calcul d'*enveloppes* ⁽²⁾, la surface de l'onde lumineuse dans le milieu soumis à l'action magnétique.

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. XCII, p. 1368.

⁽²⁾ La loi de Verdet à elle seule ne suffirait pas, quoiqu'on puisse toujours po-

A cet effet, rapportons chaque onde plane à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, l'axe OX étant parallèle aux lignes de force du champ. La surface d'onde cherchée est l'enveloppe d'un plan dont la distance à l'origine est égale à la vitesse de propagation normale.

Si l'on désigne par α , β , γ les angles que forme la normale au plan d'onde avec les axes OX, OY, OZ, on aura évidemment, pour l'équation de ces plans,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = v \pm kM \cos \alpha,$$

qu'on peut écrire

$$(1) \quad (x \mp kM) \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = v,$$

avec la condition

$$(2) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

L'enveloppe du plan s'obtient en différentiant ces deux équations par rapport à $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, considérés comme des paramètres variables, et en annulant les coefficients des différentielles indépendantes; il vient évidemment

$$(3) \quad \frac{x \mp kM}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma} = \frac{v}{1},$$

équations du rayon vecteur qui joint l'origine au point de contact. Éliminant $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ à l'aide de l'équation (2), on obtient l'équation de la surface de l'onde cherchée

$$(4) \quad (x \mp kM)^2 + y^2 + z^2 = v^2,$$

résultat qu'on obtiendrait du reste facilement par la Géométrie pure.

En effet, la surface cherchée est évidemment de révolution autour d'une parallèle aux lignes de forces OX passant par le centre O, origine des ondes : il suffit donc de déterminer la méridienne de cette surface, ce qui ramène à la Géométrie plane. Soit donc V'M' le plan d'onde situé à la distance OV' = v' de l'origine; le

ser $v' + v'' = 2u$; car alors on ne pourrait pas affirmer que u ne dépend pas de α , ce qui rendrait l'élimination impossible.

point de contact M' avec la courbe enveloppe s'obtiendra en remarquant que $OV' = v - kM \cos \alpha$, l'angle α étant égal à $V'OX$: prolongeons $V'O$ jusqu'en P' , de manière que $P'V' = v = \text{constante}$, car c'est la vitesse dans le milieu non influencé : alors OP' représente $kM \cos \alpha$, c'est-à-dire la projection de kM qui est aussi une constante. Mais $P'OC' = \alpha$; donc la grandeur constante peut être placée sur le prolongement de OX et par suite le point P' est la projection du point C' tel que $OC' = kM$. Complétant le rectangle $C'P'V'M'$ on a $C'M' = P'V' = v$; donc la droite $M'V'$ est à une distance constante du point C' : par conséquent elle enveloppe un cercle. On démontrerait de la même manière que la droite $V''M''$ enveloppe un cercle dont le centre est C'' , symétrique de C' par rapport au point O .

La surface cherchée est donc un système de deux sphères excentriques, dont l'axe commun est parallèle aux lignes de force du champ magnétique : l'une des sphères correspond aux ondes circulaires *dextrorsum*, l'autre aux ondes circulaires *sinistrorsum*. On en conclut l'énoncé suivant :

Dans un milieu isotrope, placé au sein d'un champ magnétique uniforme, les deux espèces d'ondes à vibrations circulaires inverses, seules susceptibles d'exister, se propagent suivant des sphères identiques à la sphère d'onde du milieu à l'état naturel, déplacées symétriquement de la même quantité dans la direction des lignes de force.

Ce déplacement magnétique est proportionnel à l'intensité du champ et à la constante électro-optique du milieu.

Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer que le résultat,

fondé sur des lois expérimentales, est indépendant de toute théorie moléculaire ou magnétique.

Directions singulières de double réfraction circulaire magnétique. — Cette disposition des deux nappes sphériques de la surface d'onde présente une particularité intéressante : si l'on considère des ondes planes se propageant perpendiculairement aux lignes de force, on sait, d'après la loi de Verdet, qu'elles présentent la même vitesse de propagation normale, puisque le pouvoir rotatoire est nul dans ces conditions.

Effectivement, deux plans parallèles tangents aux deux sphères coïncident lorsqu'ils sont en même temps parallèles à l'axe commun : mais il en résulte aussi que chaque plan parallèle à l'axe a deux points de contact $N'N''$ (voir la figure précédente) avec la surface de l'onde, l'un sur la nappe des vibrations circulaires droites, l'autre sur la nappe des vibrations circulaires gauches, et les deux points sont dans un même plan avec l'axe de révolution.

Donc les directions lumineuses efficaces (ce qu'on nomme les *rayons* dans la double réfraction ordinaire) sont séparées d'un angle appréciable, bien que les ondes planes qui leur correspondent cheminent en coïncidence : de là *l'existence probable d'une double réfraction d'un genre particulier dans la direction normale aux lignes de force*, c'est-à-dire dans une direction où l'on a coutume de considérer l'action magnétique sur la lumière comme nulle.

C'est un phénomène qui rappelle celui qu'on observe dans les cristaux à deux axes optiques lorsque l'onde plane devient tangente à la surface d'onde suivant un cercle ; mais il en diffère en ce que les *rayons* correspondant à la même onde plane sont au nombre de deux seulement, tandis qu'ils se résolvent en une nappe conique dans le cas des cristaux.

On peut remarquer aussi l'existence du cercle équatorial RS en chaque point duquel la surface double a deux points tangents : on retrouve l'analogie des points singuliers de la surface de l'onde de Fresnel, et la possibilité de produire des phénomènes rappelant ceux de la réfraction conique aussi bien que ceux de la réfraction cylindrique.

Comme dans les milieux cristallisés jouissant de la double ré-

fraction rectiligne, la direction du *rayon* est en général oblique sur le plan de l'onde : l'expression de l'angle ε que fait la normale à ce plan avec le rayon s'obtient aisément; en éliminant x, y, z dans la formule

$$\cos \varepsilon = \frac{x}{r} \cos \alpha + \frac{y}{r} \cos \beta + \frac{z}{r} \cos \gamma \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

à l'aide des équations (3), on trouve

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varepsilon = \frac{v \pm kM \cos \alpha}{\sqrt{v^2 \pm 2vkM \cos \alpha}}, \\ \sin \varepsilon = \frac{\pm kM \sin \alpha}{\sqrt{v^2 \pm 2vkM \cos \alpha}}, \\ \tan \varepsilon = \frac{\pm kM \sin \alpha}{v \pm kM \cos \alpha}. \end{array} \right.$$

Mais il n'y a pas de parallélisme à établir entre ces deux genres de double réfraction; les comparaisons présentent la symétrie *alterne* particulière aux actions électromagnétiques: ainsi, dans la double réfraction magnétique, suivant l'axe de révolution ($\alpha = 0$), les ondes planes ont des vitesses différentes v', v'' , et les rayons correspondants coïncident ($\varepsilon = 0$); normalement à cet axe ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) c'est l'inverse: les ondes ont la même vitesse v et les rayons des directions différentes ($\tan \varepsilon = \pm \frac{kM}{v}$).

J'avais obtenu ces résultats depuis longtemps, mais je me réservais de les faire connaître après avoir examiné s'il était possible de mettre cette double réfraction très singulière en évidence par une expérience directe. Mon attention a été appelée de nouveau sur cette question par une Note récente de M. le Dr Von Fleischl (1)

(1) *Ueber die Deformation der Lichtwellenfläche im magnetischen Felde* (*Anzeiger der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, Nr. XIII).

M. le Dr Von Fleischl donne sans démonstration l'équation de la surface

$$\frac{(x^2 + y^2)n^2 + z^2}{2r^2n^2} \pm \frac{x\sqrt{n^2 - 1}}{r} + \frac{n^2}{2} = 1.$$

n est une fraction irrationnelle dont la valeur diffère peu de l'unité et représente la mesure d'une déformation homogène que la sphère primitive (de rayon r) subit dans le sens de l'axe des x .

intitulée : *Sur la déformation de la surface d'onde lumineuse dans un champ magnétique*. D'après ce qui précède, on voit qu'il n'y aurait pas *déformation*, mais *dédoublément*.

Il ne m'a pas été jusqu'ici possible de tenter l'expérience, parce qu'elle offre d'assez grandes difficultés provenant de l'extrême petitesse du phénomène ; mais ces difficultés ne me paraissent pas insurmontables, eu égard à la puissance des appareils électromagnétiques qui se construisent actuellement. Voici, en effet, le calcul des éléments à observer.

Les deux points de contact du plan d'onde avec les sphères ont pour distance $2kM$, ainsi qu'il résulte de l'équation (3). La sphère ayant pour rayon φ , on a, pour l'angle 2ε des deux rayons, l'expression

$$(6) \quad \tan 2\varepsilon = \frac{2kM}{\varphi},$$

qu'on retrouve d'ailleurs comme cas particulier de (5).

On exprime aisément $2kM$ en fonction de l'angle ω dont tournerait le plan de polarisation d'un rayon traversant une longueur e du milieu suivant les lignes de force magnétique,

$$(7) \quad \omega = \frac{\pi e}{\lambda} \left(\frac{V}{\varphi'} - \frac{V}{\varphi''} \right),$$

V étant la vitesse de la lumière dans l'air et λ la longueur d'onde de la radiation également dans l'air.

Remplaçant dans cette expression le produit $\varphi' \varphi''$ par φ^2 qui lui est sensiblement égal, la différence $\varphi'' - \varphi'$ par $2kM$ (puisque $\alpha = 0$), et V par nV , n étant l'indice de réfraction du milieu, on en déduit

$$(8) \quad e \tan 2\varepsilon = \frac{1}{n} \frac{\omega}{\pi} \lambda.$$

Cette valeur de $e \tan 2\varepsilon$ représente le dédoublément linéaire cherché du rayon qui a traversé une épaisseur e du milieu donné dans une direction normale aux lignes de force d'un champ magnétique, l'effet de ce champ magnétique étant de faire tourner d'un angle ω le plan de polarisation lorsque cette épaisseur e est traversée parallèlement aux lignes de force.

On voit que le dédoublément est de l'ordre de la longueur d'onde,

car le facteur numérique qui le multiplie peut être rendu égal à l'unité dans des conditions qu'il ne serait pas très difficile de réaliser pratiquement; il suffirait donc de rendre ce facteur environ dix fois plus considérable pour atteindre l'ordre du centième de millimètre, c'est-à-dire d'une dimension suffisante pour constater nettement le dédoublement et la polarisation circulaire inverse des deux images (¹); un certain nombre d'artifices bien connus dans ce genre de recherches s'offrent naturellement à l'esprit et font penser que l'expérience est réalisable.

Le dédoublement n'est qu'en apparence (8) proportionnel à λ ; il est, en réalité, sensiblement en raison inverse de la longueur d'onde, car l'angle ω suit à fort peu près la loi de Biot, c'est-à-dire varie en raison inverse de λ^2 .

Ces vérifications auraient un intérêt dont la portée dépasserait évidemment celle des considérations élémentaires qui ont servi à les prévoir.