



Sur les effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction

M. Gouy

► To cite this version:

M. Gouy. Sur les effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction. J. Phys. Theor. Appl., 1885, 4 (1), pp.149-159. 10.1051/jphystap:018850040014900 . jpa-00238322

HAL Id: jpa-00238322

<https://hal.science/jpa-00238322>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**SUR LES EFFETS SIMULTANÉS DU POUVOIR ROTATOIRE
ET DE LA DOUBLE RÉFRACTION;**

PAR M. GOUY.

Dans un assez grand nombre de phénomènes, le pouvoir rotatoire et la double réfraction existent simultanément dans un même milieu, et suivant une même direction, et produisent des effets complexes. Il en est ainsi, par exemple, dans le quartz suivant des directions obliques à l'axe, dans les corps doués du pouvoir rotatoire et soumis à une action mécanique, ou dans les corps biréfringents soumis à l'action magnétique. Il en est probablement de même pour les cristaux à deux axes dont les dissolutions jouissent du pouvoir rotatoire.

On sait comment Airy a réussi, par une hypothèse ingénieuse, à rendre compte des effets produits par le quartz suivant des directions obliques à l'axe, en laissant toutefois à l'expérience le soin de déterminer les éléments des vibrations elliptiques qui devaient, à son point de vue, faire la transition entre les vibrations rectilignes de la double réfraction et les vibrations circulaires de la polarisation rotatoire. Nous allons essayer, nous plaçant à un point de vue différent, de ramener la théorie des phénomènes produits par l'action simultanée du pouvoir rotatoire et de la double réfraction, à l'application du principe de l'*indépendance des effets simultanés*. La double réfraction, agissant seule, produirait à chaque instant une certaine modification infiniment petite sur les vibrations lumineuses qui se propagent dans le milieu considéré; de même, le pouvoir rotatoire seul produirait une modification différente; nous admettrons que la somme algébrique de ces deux effets est précisément l'effet réel produit par le pouvoir rotatoire et la double réfraction agissant simultanément. De même que le principe de l'indépendance des effets simultanés, les relations ainsi calculées seront exactes comme *limites*, pour les milieux doués d'une double réfraction et d'un pouvoir rotatoire très faibles, et plus ou moins approchées dans les phénomènes réels; c'est à l'expérience à montrer dans quelles conditions cette approximation sera suffisante.

J. de Phys., 2^e série, t. IV. (Avril 1885.)

11

Nous considérons une lame à faces parallèles, dans le plan de laquelle nous prendrons deux axes coordonnés rectangulaires. Les rayons incidents sont supposés homogènes, polarisés elliptiquement et normaux à la lame. Suivant la convention ordinaire, l'observateur est supposé couché sur le rayon, les pieds du côté d'où vient la lumière; s'il regarde la direction des y positifs, il aura la direction des x positifs à sa droite. Les angles sont comptés positivement en allant des x positifs aux y positifs, c'est-à-dire de droite à gauche ↶, négativement de gauche à droite ↷.

I. *Effet de la double réfraction seule.* — Les axes coordonnés sont, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à la section principale ou à la direction qui en tient lieu si le milieu est biaxe. Le mouvement vibratoire incident peut être regardé comme décomposé en deux mouvements vibratoires rectilignes, respectivement parallèles aux axes coordonnés, et qui se propagent sans altération dans le milieu biréfringent, par ondes planes et parallèles à la face d'entrée. A une distance l de cette face, les équations de ces deux mouvements seront

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi - \frac{l}{\theta V_x} \right),$$

$$y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \chi - \frac{l}{\theta V_y} \right),$$

t désignant le temps, θ la période vibratoire, V_x et V_y les vitesses de propagation mesurées normalement aux ondes planes, a , b , ψ et χ des constantes, les deux premières étant supposées positives, ce qui ne restreint pas la généralité de nos formules.

Ces deux mouvements vibratoires rectangulaires existant simultanément dans le milieu biréfringent, et s'appliquant aux mêmes points matériels, la vibration réelle, c'est-à-dire le véritable déplacement de chacun de ces points matériels, est une ellipse dont l'équation s'obtient en éliminant t entre les deux équations précédentes :

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos 2\pi u = \sin^2 2\pi u,$$

en désignant par u la quantité $\psi - \chi + \frac{l}{\theta V_x} - \frac{l}{\theta V_y}$, c'est-à-dire la différence de phase des deux composantes rectilignes, divisée par θ .

En appelant α l'angle que fait le grand axe de cette ellipse avec l'axe des x , et posant $m = \frac{a}{b}$, on a la relation

$$(2) \quad \tan 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cos 2\pi u = \frac{2m}{m^2 - 1} \cos 2\pi u,$$

qui définit deux droites rectangulaires, le grand axe étant celle qui est la plus voisine de l'axe des x ou de celui des y , suivant que l'on a

$$a > b \quad \text{ou} \quad b > a.$$

Le rapport k du petit axe au grand axe est la valeur absolue des racines de l'équation

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} k^2 &= \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \sqrt{\frac{4}{a^2 b^2} \cos^2 2\pi u + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \sqrt{\frac{4}{a^2 b^2} \cos^2 2\pi u + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2}} \\ &= \frac{1 + m^2 - \sqrt{(1 - m^2)^2 (1 + \tan^2 2\alpha)}}{1 + m^2 + \sqrt{(1 - m^2)^2 (1 + \tan^2 2\alpha)}}, \end{aligned} \right.$$

les radicaux étant pris en valeur arithmétique.

Les quantités α et k étant des fonctions continues de $l^{(1)}$, on peut exprimer les effets de la double réfraction en disant que les vibrations elliptiques incidentes se propagent dans le milieu biréfringent en subissant des modifications graduelles exprimées par les formules (2) et (3). La considération des vibrations elliptiques réelles équivaut évidemment à la considération, plus familière aux physiciens, des composantes rectilignes, puisqu'elle en est directement déduite; elle nous permettra par la suite d'établir, entre les effets de la double réfraction et ceux du pouvoir rotatoire, le rapprochement qui nous est nécessaire.

De l'équation (2) on tire

$$(4) \quad \frac{d\alpha}{dl} = 2\pi \frac{m}{m^2 - 1} \cos^2 2\alpha \sin 2\pi u,$$

(¹) Excepté dans le cas où $m = 1$, α étant alors égal à $\pm \frac{\pi}{4}$, et passant subitement d'une valeur à l'autre quand la vibration devient circulaire. Mais, même dans ce cas, la modification de la vibration est graduelle.

en posant

$$\varphi = -\frac{du}{dl} = \frac{1}{6V_y} - \frac{1}{6V_x}.$$

φ est donc la différence de marche, comptée en vibrations ou en ondes, que produirait la double réfraction entre les deux composantes rectilignes, l'épaisseur de la lame étant égale à l'unité.

L'équation (3) nous donne

$$(5) \quad \frac{dk}{dl} = H\varphi \cos 2\pi u,$$

H désignant une quantité qui est ≥ 0 tant que l'ellipse (1) ne se réduit pas à une droite parallèle à l'un des axes coordonnés.

Les formules (4) et (5) nous montrent quelles modifications subit la vibration réelle (1) quand la distance à la face d'entrée augmente de l à $l + dl$. Ces modifications sont : 1° une rotation $\frac{dx}{dl} dl$ des axes de l'ellipse; 2° une variation $\frac{dk}{dl} dl$ du rapport de ces axes, c'est-à-dire une déformation (1). Si nous résolvons les équations (2) et (3) en regardant comme connus les éléments de la vibration réelle, c'est-à-dire α , k , et le sens de la giration, nous en tirerons les valeurs de m et de u , et par suite nous pourrions calculer $\frac{dx}{dl}$, $\frac{dk}{dl}$ en fonction des éléments de la vibration réelle, sans plus nous occuper des composantes rectilignes.

En particulier, les formules (2) et (5) montrent immédiatement que *la condition nécessaire et suffisante pour que la déformation $\frac{dk}{dl} dl$ soit nulle, c'est que les axes de l'ellipse (1) soient parallèles aux axes coordonnés.*

Considérons ces vibrations pour lesquelles $\frac{dk}{dl} = 0$. L'équation (4) devient

$$\frac{dx}{dl} = \pm 2\pi\varphi \frac{m}{m^2 - 1},$$

le double signe correspondant aux valeurs ± 1 que peut prendre ici $\sin 2\pi u$. Dans le premier cas, la gyration est dextrorsum ↻ sur l'ellipse (1); dans le second cas, sinistrorsum ↺.

(1) Si la vibration réelle est circulaire, il faut pousser le calcul jusqu'au terme du second ordre, $\frac{1}{2} \frac{d^2k}{dl^2} dl^2$, à cause de la discontinuité de α .

Les deux racines de l'équation (3) sont ici $\pm m$, si l'on a $a < b$, et $\pm \frac{1}{m}$, si l'on a $b < a$. Quelle que soit la racine que l'on considère, k désignant sa valeur absolue, l'équation précédente s'écrit

$$(6) \quad \frac{dz}{dl} = \pm 2\pi\varphi \frac{k}{k^2 - 1},$$

le signe à placer devant le second membre étant donné par le Tableau suivant :

$a > b$. Le grand axe est parallèle à l'axe des x .	{	giration dextrorsum		—
		» sinistrorsum		+
$b > a$. Le grand axe est parallèle à l'axe des y .	{	» dextrorsum		+
		» sinistrorsum		—

II. *Effet du pouvoir rotatoire seul.* — Nous prendrons pour point de départ la théorie de Fresnel, dont les résultats, comme on le sait, sont conformes aux faits d'expérience. Le mouvement vibratoire incident peut être regardé comme décomposé en deux mouvements vibratoires circulaires, de giration inverse, qui se propagent sans altération dans le milieu actif, avec des vitesses différentes. Soient p et q les amplitudes de ces deux mouvements, p étant plus grand que q . Les vibrations réelles, résultant de leur superposition, sont des ellipses dont le grand axe et le petit axe sont respectivement $2(p + q)$ et $2(p - q)$. Ainsi les vibrations elliptiques réelles ne subissent pas d'altération de forme en se propageant dans le milieu actif.

Le grand axe de la vibration elliptique réelle est la droite sur laquelle se superposent les rayons vecteurs des deux vibrations circulaires. Soient, à la distance l de la face d'entrée, α l'angle que fait cette droite avec l'axe des x , et η la différence de phase des deux vibrations circulaires. A la distance $l + dl$, ces quantités prennent des accroissements $d\alpha$ et $d\eta$, et l'on a, en valeur absolue, d'après un théorème de Cinématique bien connu,

$$d\alpha = \frac{\pi d\eta}{\theta}.$$

Comme $\frac{d\eta}{dl}$ ne dépend que du pouvoir rotatoire, il vient

$$\frac{dz}{dl} = \omega,$$

ω étant l'angle dont le milieu, sous une épaisseur égale à l'unité, fait tourner le plan de polarisation.

III. *Effet résultant.* — Les deux effets que nous venons d'étudier se produisant simultanément, chaque vibration elliptique, en parcourant le chemin dl , éprouvera une déformation $\frac{dk}{dl} dl$ (5), et une rotation de ses axes égale à $(\omega + \alpha')dl$, en désignant par α' la valeur de $\frac{d\alpha}{dl}$ pour la double réfraction seule (4). Ces quantités pouvant être calculées en chaque point d'après les éléments de la vibration réelle en ce point, comme nous l'avons vu, on pourrait ainsi calculer de proche en proche la marche des vibrations de forme quelconque qui traverseraient le milieu et par suite déterminer le mouvement émergent.

Ce calcul est rendu très simple par la considération des vibrations qui, en raison de leur forme, de leur orientation et du sens de leur giration, peuvent se propager dans le milieu sans subir aucune altération, et que nous appellerons *privilégiées*.

Pour de telles vibrations, on doit avoir d'abord, pour toute valeur de l ,

$$\frac{dk}{dl} = 0.$$

Pour que cette relation soit vérifiée, il faut et il suffit, d'après le § I, que les axes de l'ellipse soient partout parallèles aux axes coordonnés, ce qui exige : 1° que les vibrations incidentes satisfassent à cette condition; 2° que l'on ait, pour toute valeur de l ,

$$\omega + \alpha' = 0.$$

Cette équation s'écrit, d'après (6),

$$(7) \quad \omega \pm 2\pi\varphi \frac{k}{k^2 - 1} = 0,$$

le signe à placer devant le second terme étant donné par le Tableau du § I. Ces deux conditions déterminent complètement les vibrations privilégiées.

Si φ et ω sont de même signe, $\frac{k}{k^2 - 1}$ étant toujours négatif, le signe — ne donne pas de solution; aucune des vibrations qui correspondent à ce signe ne peut être privilégiée. Mais celles qui

correspondent au signe +, c'est-à-dire les vibrations sinistorsum ayant leur grand axe parallèle aux x , ou les vibrations dextrorsum ayant leur grand axe parallèle aux y , pourront satisfaire à l'équation (7).

Si φ et ω sont de signes contraires, c'est le signe — qui donne les vibrations privilégiées, et les conditions sont inverses. Dans les deux cas, l'équation (7), résolue par rapport à k , donne une seule racine positive

$$(8) \quad k = -h + \sqrt{1 + h^2} = \frac{1}{h + \sqrt{1 + h^2}},$$

h désignant la valeur absolue de $\frac{\pi\varphi}{\omega}$, c'est-à-dire du rapport de la différence de marche φ produite par la double réfraction seule, à la différence de marche $\frac{\omega}{\pi}$ produite, entre les deux rayons circulaires de Fresnel, par le pouvoir rotatoire seul, ces différences de marche étant comptées en vibrations ou en ondes ⁽¹⁾.

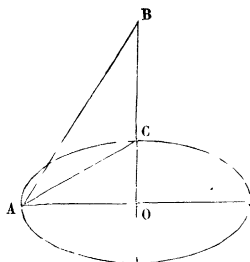
Ainsi il y a, dans tous les cas, deux genres de vibrations privilégiées, et deux seulement : ce sont des ellipses de même forme définie par l'équation (8), de giration inverse, ayant leurs grands axes respectivement parallèles et perpendiculaires à la section principale. Quels que soient les signes de φ et de ω , on voit aisément, d'après le Tableau du § I, que la vibration privilégiée qui a une giration de même sens que le pouvoir rotatoire du milieu a son grand axe parallèle à la vibration rectiligne qui prendrait l'avance, en vertu de la double réfraction seule.

De la formule (8) résulte un moyen très simple de construire une ellipse semblable aux vibrations privilégiées. Portons sur deux droites rectangulaires des longueurs OA, OB, respectivement proportionnelles à φ et à $\frac{\omega}{\pi}$, et menons la bissectrice de l'angle BAO, qui rencontre la droite OB au point C; l'ellipse construite en prenant pour demi-axes OA et OC est la courbe cherchée.

⁽¹⁾ Ainsi, par exemple, pour une lame *quart d'onde* et une rotation de 1°, on aura

$$\varphi = \frac{1}{4}, \quad \frac{\omega}{\pi} = \frac{1}{180}.$$

Si les vibrations incidentes possèdent la forme, l'orientation et la giration qui caractérisent les vibrations privilégiées, elles traverseront le milieu sans subir d'altération avec une vitesse de propagation déterminée. Si le mouvement incident est différent, on peut toujours, en vertu du principe de la superposition des petits mouvements, le regarder comme formé par la superposition de deux mouvements privilégiés, qui se propageront à travers le milieu comme si chacun d'eux existait seul, et dont la superposition formera les vibrations réelles dans l'intérieur du milieu, et le mou-



vement émergeant à la sortie. Le problème sera donc résolu si nous connaissons la différence de marche produite, entre les deux mouvements privilégiés, par leur passage à travers la lame.

IV. *Différence de marche des vibrations privilégiées.* — Le mouvement incident étant quelconque, considérons des vibrations réelles à l'intérieur du milieu. A la distance l de la face d'entrée, leurs éléments ont une valeur déterminée. A la distance $l + dl$, ces éléments ont subi des altérations que nous pouvons calculer directement, par les expressions $\frac{dk}{dl}$, $\frac{dz}{dl}$ précédemment données.

Nous pouvons encore calculer ces mêmes altérations en regardant les vibrations réelles comme formées par la superposition des deux vibrations privilégiées ; nous obtiendrons ici une expression dans laquelle entrera la différence de marche δdl produite entre les deux vibrations privilégiées par le parcours dl . Les deux calculs devant donner le même résultat, nous obtiendrons l'expression de δ , différence de marche produite par un parcours égal à l'unité.

Le résultat étant indépendant du choix de la vibration réelle,

nous prendrons, pour simplifier le calcul, une vibration rectiligne et parallèle à l'axe des x , dont l'équation sera, à la distance l ,

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi \right).$$

À la distance $l + dl$, d'après ce que nous avons vu précédemment, la vibration sera encore rectiligne et fera un angle ωdl avec l'axe des x .

Nous supposerons, pour fixer les idées, que la vibration privilégiée dextrorsum a son grand axe parallèle à l'axe des x . À la distance l , les équations des deux vibrations privilégiées seront

$$\begin{cases} x = \frac{a}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi \right), \\ y = \frac{ak}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi + \frac{1}{4} \right); \\ x = \frac{ak^2}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi \right), \\ y = \frac{ak}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi - \frac{1}{4} \right). \end{cases}$$

À la distance $l + dl$, ces équations seront

$$\begin{cases} x = \frac{a}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi - \frac{dl}{\theta V'} \right), \\ y = \frac{ak}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi + \frac{1}{4} - \frac{dl}{\theta V'} \right); \\ x = \frac{ak^2}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi - \frac{dl}{\theta V''} \right), \\ y = \frac{ak}{1+k^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi - \frac{1}{4} - \frac{dl}{\theta V''} \right); \end{cases}$$

V et V'' désignent les vitesses de propagation des deux vibrations privilégiées. Éliminant t entre ces dernières équations, et posant

$$\delta = \frac{1}{\theta V''} - \frac{1}{\theta V'},$$

il vient, pour l'équation de la courbe qui forme la vibration réelle à la distance $l + dl$,

$$\frac{y}{x} = - \frac{2\pi k}{1+k^2} \delta dl,$$

équation d'une droite qui fait avec l'axe des x l'angle ωdl , si

l'on a

$$(9) \quad \delta = -\frac{\omega}{2\pi} \frac{1+k^2}{k} = \pm \sqrt{\varphi^2 + \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2}.$$

Ainsi, le carré de la différence de marche des vibrations privilégiées est la somme des carrés des différences de marche que produiraient la double réfraction seule entre les vibrations rectilignes, et le pouvoir rotatoire seul entre les vibrations circulaires.

Si ω est négatif, c'est-à-dire si le pouvoir rotatoire est dextrorsum, δ est positif, et la vibration dextrorsum prend l'avance. Dans tous les cas, la vibration privilégiée qui prend l'avance est celle qui a une giration de même sens que le pouvoir rotatoire du milieu.

V. *Rapprochement avec l'hypothèse d'Airy.* — D'après ce qui précède, les effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction sont en tous points conformes à ceux qui résultent de l'hypothèse d'Airy, que notre analyse nous permet de compléter en déterminant k et δ , et de généraliser en l'étendant aux milieux autres que le quartz. Parti d'un point de vue tout différent, et par la considération des vibrations réelles des milieux optiques, déjà mise à profit dans d'autres recherches, nous avons retrouvé les caractères essentiels des vibrations qui se propagent sans altération : giration inverse, similitude de forme, grands axes respectivement parallèles et perpendiculaires à la section principale ⁽¹⁾. La signification physique de ces divers caractères est d'ailleurs montrée par le calcul : la condition que la forme reste invariable exige que l'un quelconque des axes de l'ellipse soit parallèle à la section principale; et la condition que l'orientation des axes reste constante détermine la forme elle-même, ainsi que la direction du grand axe d'après le sens de la giration.

L'accord de l'hypothèse d'Airy avec l'ensemble des phénomènes

(1) On remarquera de plus que, ici comme dans l'hypothèse d'Airy : 1° la vibration elliptique qui prend l'avance est celle qui a son grand axe parallèle à la vibration rectiligne qui prendrait l'avance en vertu de la double réfraction; 2° cette vibration est celle qui a une giration de même sens que le pouvoir rotatoire du milieu.

présentés par le quartz peut être regardé comme une première vérification expérimentale de ces résultats; une comparaison plus détaillée avec les faits d'expérience exige quelques recherches nouvelles et fera l'objet d'un autre travail.
