Note sur la théorie des appareils téléphoniques

Vaschy

NOTE SUR LA THÉORIE DES APPAREILS TÉLÉPHONIQUES;

PAR M. VASCHY.

Je me propose de développer dans cette Note un essai de théorie mathématique des appareils téléphoniques dans le cas où les sons émis sont continus et de hauteur constante. Si le timbre d'un son transmis n'est pas altéré sensiblement, ce qui est suffisamment vrai pour une bonne transmission ordinaire, c'est que les appareils employés n'apportent pas de timbre propre, et l'on peut supposer, par conséquent, que leurs divers organes ont un mouvement vibratoire semblable à celui de la source sonore. En particulier, si le mouvement vibratoire de la source est simple et est représenté par la formule

$$a \sin m(t - t_0),$$

$\frac{m}{2\pi}$ étant la hauteur du son, le mouvement d'un point quelconque des plaques vibrantes se réduira sensiblement à une expression semblable :

$$b \sin m(t - t_1),$$

b étant proportionnel à a.

Je vais démontrer, en partant de cette hypothèse, que le rôle des divers appareils employés consiste à faire naître dans le circuit téléphonique : 1° une force électromotrice induite, proportionnelle à l'amplitude du mouvement vibratoire de la source; 2° une augmentation apparente de résistance et de self-induction; de telle sorte que, si l'on désigne par Σe la somme des forces électromotrices primaires ou induites, par Σl et Σr la self-induction et la résistance totales du circuit, par i l'intensité du courant téléphonique, cette intensité pourra se calculer par la formule suivante

$$\Sigma e - \Sigma l \frac{di}{dt} - \Sigma ri = 0,$$

au moins dans le cas où la capacité électrostatique de la ligne sera négligeable.

En second lieu, l'intensité du courant étant calculée, il restera à calculer l'intensité correspondante du son émis par le récepteur et, s'il y a lieu, le rendement du système téléphonique.

Cas d'un téléphone Bell transmetteur ou récepteur. — Si la plaque du transmetteur est soumise aux vibrations d'une source sonore, le mouvement vibratoire des couches d'air en contact avec elle étant représenté par $f = f_0 \sin m(t - t_0)$, la plaque entre en vibration et l'un de ses points, choisi arbitrairement, éprouve un déplacement périodique δ proportionnel à f_0 (f_0 étant considéré comme un infiniment petit) et de période $\frac{2\pi}{m}$. Les autres points éprouvent des déplacements différents de δ par la phase et l'amplitude, mais tous proportionnels à f_0. La vitesse $\frac{d\delta}{dt}$ est également proportionnelle à f_0 et a pour période $\frac{2\pi}{m}$; elle est donc de la forme

$$(f) \qquad \frac{d\delta}{dt} = kf + k'\frac{df}{dt} = \sqrt{k^2 + k'^2 m^2}\, f_0 \sin m(t - t_1).$$

Si le déplacement δ est produit, non par le mouvement vibratoire d'une source sonore, mais par un courant périodique d'intensité $i = i_0 \sin m(t - t')$, circulant dans la bobine de l'appareil, on aura de même, pour $\frac{d\delta}{dt}$,

$$(i) \qquad \frac{d\delta}{dt} = k_1 i + k'_1 \frac{di}{dt} = \sqrt{k_1^2 + k_1'^2 m^2}\, i_0 \sin m(t - t'_1).$$

Les deux causes précédentes réunies donnent des effets qui se superposent, et $\frac{d\delta}{dt}$ est la somme des valeurs (f) et (i).

D'autre part, la force électromotrice induite dans la bobine est due à la variation de l'intensité i du courant et à celle du déplacement δ de la plaque. Elle peut donc se représenter par

$$-\mathrm{L}\frac{di}{dt} - q\frac{d\delta}{dt},$$

L étant le coefficient de self-induction de la bobine, tel qu'on peut le mesurer lorsque la plaque reste fixe. La force électromotrice induite due aux vibrations seules de la plaque est par conséquent

$$-q\frac{d\delta}{dt} = -q\left(kf + k'\frac{df}{dt}\right) - qk_1 i - qk'_1\frac{di}{dt},$$

soit

$$\varepsilon - \rho i - \lambda\frac{di}{dt},$$

en posant

$$\varepsilon = -q\left(kf + k'\frac{df}{dt}\right) = -q\sqrt{k^2 + k'^2 m^2}\, f_0 \sin m(t - t_1),$$

$$\rho = qk_1,$$

$$\lambda = qk'_1.$$

Le mouvement de la plaque de l'appareil détermine donc : 1° une force électromotrice ε proportionnelle à l'amplitude des vibrations de la source sonore; 2° une augmentation apparente ρ de résistance et λ de self-induction. Ceci s'applique au cas d'un récepteur, sauf que dans ce cas on a $f_0 = 0$ et, par suite, $\varepsilon = 0$. Ainsi se trouve démontrée, pour l'appareil Bell, la proposition que j'ai émise plus haut.

Les valeurs de $\frac{\varepsilon}{f_0}$, ρ et λ sont trois coefficients qui déterminent la valeur électrique de l'appareil. En particulier, la considération de ρ et de λ est très importante au point de vue du rendement de l'appareil. Supposons, par exemple, que la ligne ait une capacité négligeable et un très grand isolement, et, par suite, que l'intensité i soit la même dans le récepteur que dans le transmetteur. Sous l'action de la source sonore seule, en circuit ouvert, la plaque du transmetteur éprouverait un déplacement δ_1 qui sera donné par l'équation (f). Sous l'action du courant i, la plaque du récepteur aura un déplacement δ_2 qui sera donné par l'équation (i), en supposant les deux appareils identiques; et $\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2$ représente évidemment le rapport de l'intensité du son fourni par le récepteur à celle que ferait entendre le transmetteur en circuit ouvert si l'on pouvait éviter d'entendre directement la source sonore. Le rapport $\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2$ représente donc le rendement électrique du système. Or δ_1 et δ_2 sont proportionnels aux valeurs de $\frac{d\delta}{dt}$ fournies par (f) et (i). Donc

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_1'^2 m^2}\, i_0}{\sqrt{k^2 + k'^2 m^2}\, f_0} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2 m^2}\, i_0}{q\sqrt{k^2 + k'^2 m^2}\, f_0}.$$

D'ailleurs, r et l désignant la résistance et la self-induction du circuit en dehors des augmentations apparentes ρ et λ qu'apporte chacun des deux appareils, on a

$$\varepsilon = -q\sqrt{k^2 + k'^2 m^2}\, f_0 \sin m(t - t_1) = (r + 2\rho)i + (l + 2\lambda)\frac{di}{dt}.$$

On en tire, au signe près,

$$q\sqrt{k^2 + k'^2 m^2}\, f_0 = \sqrt{(r + 2\rho)^2 + (l + 2\lambda)^2 m^2}\, i_0,$$

d'où

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2 m^2}}{\sqrt{(r + 2\rho)^2 + (l + 2\lambda)^2 m^2}}.$$

Le carré de ce rapport représente le rendement du système téléphonique, tel qu'il vient d'être défini. Le dénominateur

$$\sqrt{(r + 2\rho)^2 + (l + 2\lambda)^2 m^2}$$

pourrait s'appeler la résistance totale *apparente* du circuit, puisque c'est le facteur par lequel il faut diviser la force électromotrice

$q\sqrt{k^2 + k'^2 m^2} f_0$ pour calculer l'intensité i_0. Le numérateur $\sqrt{\rho^2 + \lambda^2 m^2}$ serait de même la résistance *apparente* développée par les vibrations seules de la plaque réceptrice en supposant nulles la résistance et la self-induction du reste du circuit.

La formule précédente montre qu'on augmentera le rendement en augmentant le plus possible ρ et λ. Mais, dans tous les cas, ce rendement ne peut dépasser la valeur $\frac{1}{4}$ correspondant au cas où $\sqrt{\rho^2 + \lambda^2 m^2}$ est infini. Il restera constant si l'on fait varier ρ et λ proportionnellement aux valeurs de r et de l. En se reportant aux expressions de ρ et de λ, on voit que, pour augmenter leurs valeurs, il faut accroître celles de q, k_1 et k'_1, c'est-à-dire s'arranger, d'une part, de manière que, pour un déplacement donné de la plaque de l'appareil, la variation (proportionnelle à q) du champ magnétique dans lequel se trouve la bobine soit le plus grande possible; d'autre part, de manière que, pour un courant ondulatoire donné i, le déplacement (proportionnel à $\sqrt{k_1^2 + k_1'^2 m^2}$) de la plaque réceptrice soit le plus grand possible.

Cas d'un condensateur transmetteur ou récepteur. — Supposons un condensateur de capacité C intercalé dans un circuit téléphonique et *polarisé* par une pile de force électromotrice E (système de M. Dunand, etc.). A l'état de repos, la quantité d'électricité accumulée sur le condensateur est

$$Q = CE.$$

Pendant le passage du courant ondulatoire, la quantité Q varie de $q = q_0 \sin m(t - t_0)$, et la différence de potentiel E des armatures varie de $v = v_0 \sin m(t - t_1)$. En outre, le condensateur vibrant, si δ désigne le déplacement d'un point d'une armature, tous les δ étant proportionnels, la variation de la capacité sera $C'\delta$, en désignant par C' la dérivée de C par rapport à δ. On a donc

$$Q + q = (C + C'\delta)(E + v),$$

ou, en regardant q, v, δ comme des infiniment petits,

$$\frac{q}{Q} = \frac{v}{E} + \frac{C'\delta}{C}.$$

Comme l'on a

$$i = \frac{dq}{dt},$$

il en résulte

$$q = -\frac{1}{m^2}\frac{di}{dt},$$

d'où

$$v = -\frac{1}{Cm^2}\frac{di}{dt} - \frac{C'}{C}E\delta.$$

Que l'on supprime le condensateur en établissant à sa place une chute brusque de potentiel égale à $(E + v)$, rien ne sera changé dans le régime du circuit. Donc la présence du condensateur équivaut à une force électromotrice égale à $(-v)$, en négligeant la force constante $(-E)$ qui annule celle de la pile. La valeur de v contient δ, que nous allons calculer.

Si le condensateur vibrait sous l'action seule des vibrations de la source sonore, dont l'amplitude est f_0, on trouverait, comme dans le cas du téléphone Bell, que δ est de la forme

$$\text{(F)} \qquad \delta = kf + k'\frac{df}{dt}.$$

Si, au contraire, l'appareil vibre sous l'action du courant ondulatoire seul, la force d'attraction entre les deux armatures étant proportionnelle au carré $(Q + q)^2$ de la charge, les vibrations sont dues à la variation $(2Qq + q^2)$ ou simplement $2Qq$. Donc δ est proportionnel, d'une part, à $Q = CE$, d'autre part, à q_0 ou, ce qui revient au même, à i_0, et peut s'écrire

$$\text{(I)} \qquad \delta = -CE\left(k_1 i + k'_1\frac{di}{dt}\right).$$

Si les deux actions précédentes se produisent en même temps, δ sera la somme des expressions (F) et (I) et, par suite, on aura

$$-v = \varepsilon - \rho E^2 i - \left(\lambda E^2 - \frac{1}{Cm^2}\right)\frac{di}{dt},$$

en posant

$$\varepsilon = \frac{C'}{C}E\left(kf + k'\frac{df}{dt}\right) = \frac{C'}{C}\sqrt{k^2 + k'^2 m^2}\,Ef_0 \sin m(t - t'),$$

$$\rho = C'k_1,$$

$$\lambda = C'k'_1.$$

La formule de $(-v)$ montre que le condensateur intercalé dans le circuit a toujours pour effet de produire une augmentation apparente $\left(-\frac{1}{Cm^2}\right)$ de self-induction. En outre, les vibrations de l'appareil donnent lieu : 1° à une force électromotrice ε proportionnelle, non seulement à l'amplitude f_0 des vibrations de la source sonore, mais encore à la force E de la pile polarisante : 2° à une augmentation apparente ρE^2 de résistance et λE^2 de self-induction du circuit. Les valeurs de $\frac{\varepsilon}{Ef_0}$, ρ et λ sont trois coefficients définissant la valeur électrique de l'appareil.

Si le transmetteur et le récepteur sont des condensateurs intercalés dans un circuit unique, la force électromotrice due aux vibrations de la source sonore a pour amplitude

$$\varepsilon_0 = \frac{C'}{C}\sqrt{k^2 + k'^2 m^2}\, E f_0,$$

et l'intensité

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(r + 2\rho E^2)^2 + (l + 2\lambda E^2)^2 m^2}},$$

r et l désignant la résistance et la self-induction du circuit en dehors de celles que font naître les vibrations des deux appareils. Enfin, l'amplitude δ_2 des vibrations du récepteur sera, d'après l'équation (I)

$$\delta_2 = CE\sqrt{k_1^2 + k_1'^2 m^2}\, i_0,$$

$$\delta_2 = C'\sqrt{k^2 + k'^2 m^2}\, E^2 f_0 \frac{\sqrt{k_1^2 + k_1'^2 m^2}}{\sqrt{(r + 2\rho E^2)^2 + (l + 2\lambda E^2)^2 m^2}};$$

d'où

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\sqrt{(\rho E^2)^2 + (\lambda E^2)^2 m^2}}{\sqrt{(r + 2\rho E^2)^2 + (l + 2\lambda E^2)^2 m^2}},$$

en posant

$$\delta_1 = \sqrt{k^2 + k'^2 m^2} f_0.$$

Comme δ_1 est l'amplitude des vibrations du condensateur en circuit ouvert et sous l'action seule de la source sonore, de même que dans le cas du téléphone Bell, $\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2$ représente en quelque sorte le rendement électrique du système. Son expression est la même que dans le cas de l'appareil Bell, sauf que ρ et λ sont remplacés par ρE^2 et λE^2. Pour accroître le rendement, qui dans tous les cas ne peut dépasser $\frac{1}{4}$, on a intérêt à augmenter la force électromotrice polarisante E et les valeurs de ρ et de λ, dont la signification est évidente.

Si le condensateur n'était employé que comme transmetteur, on obtiendrait la meilleure transmission en rendant maximum l'intensité du courant ondulatoire. On trouve dans ce cas, par un calcul simple, que la force électromotrice E ne doit pas être augmentée indéfiniment, mais que sa valeur la plus favorable est

$$E = \sqrt[4]{\frac{r^2 + l^2 m^2}{\rho^2 + \lambda^2 m^2}}$$

et correspond au cas où la résistance apparente $\sqrt{(\rho E^2)^2 + (\lambda E^2)^2 m^2}$, due aux vibrations de l'appareil, est égale à la résistance apparente extérieure $\sqrt{r^2 + l^2 m^2}$. Ce maximum à donner à E convient également au cas où le condensateur ne sert que de récepteur.

Enfin remarquons que, avec les condensateurs de même qu'avec les appareils Bell, aucune énergie n'est empruntée à la pile polarisante, quoique celle-ci ait pour effet d'augmenter le rendement; car, pendant une période $\left(\frac{2\pi}{m}\right)$, elle est traversée par des quantités d'électricité égales et de signes contraires.

Cas d'une bobine d'induction. — Soient r et l la résistance et la self-induction d'un circuit primaire, $(e = e_0 \sin mt)$ la force électromotrice développée dans ce circuit et i l'intensité du courant primaire; I l'intensité du courant secondaire et M le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits.

La force électromotrice induite dans le circuit secondaire est $M\frac{di}{dt}$. D'autre part, le courant I induit dans le circuit primaire une force électromotrice $M\frac{dI}{dt}$, de telle sorte que l'on a

$$e - ri - l\frac{di}{dt} + M\frac{dI}{dt} = 0.$$

En différentiant cette équation et remplaçant $\frac{d^2 i}{dt^2}$ par $(-m^2 i)$ et $\frac{d^2 I}{dt^2}$ par $(-m^2 I)$, on a

$$\frac{de}{dt} - r\frac{di}{dt} + lm^2 i - M m^2 I = 0.$$

De ces deux relations on tire

$$(r^2 + l^2 m^2)\frac{di}{dt} = \left(r\frac{de}{dt} + lm^2 e\right) - \mathrm{M} m^2 \left(r\mathrm{I} - l\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right),$$

et, par suite, la force électromotrice induite dans le circuit secondaire est

$$\mathrm{M}\frac{di}{dt} = \varepsilon - \rho\mathrm{I} + \lambda\frac{d\mathrm{I}}{dt},$$

en posant

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{M}r}{r^2 + l^2 m^2}\frac{de}{dt} + \frac{\mathrm{M}lm^2}{r^2 + l^2 m^2} e = \frac{\mathrm{M}m}{\sqrt{r^2 + l^2 m^2}} e_0 \sin m(t - t_0),$$

$$\rho = r\frac{\mathrm{M}^2 m^2}{r^2 + l^2 m^2},$$

$$\lambda = l\frac{\mathrm{M}^2 m^2}{r^2 + l^2 m^2}.$$

Tout se passe donc comme si, le circuit primaire étant supprimé, on introduisait dans le circuit secondaire une force électromotrice égale au produit de e par le facteur $\frac{\mathrm{M}m}{\sqrt{r^2 + l^2 m^2}} = k$, et qu'en même temps on ajoutât une résistance égale à $(+k^2 r)$ et une self-induction $(-k^2 l)$. On trouve ainsi une grande analogie avec le cas du téléphone Bell et du condensateur transmetteur. Ici les quantités k, r et l sont susceptibles de mesures assez simples.