Sur les lois des vibrations transversales des verges élastiques

E. Mercadier

SUR LES LOIS DES VIBRATIONS TRANSVERSALES DES VERGES ÉLASTIQUES ;

PAR M. E. MERCADIER.

Il y a longtemps (1), j'ai montré que les lois du mouvement vibratoire des diapasons prismatiques étaient les mêmes que celles du mouvement d'une verge encastrée à une extrémité, et j'ai pu donner une formule pratique permettant de déterminer *a priori* les dimensions à donner à un diapason pour avoir un nombre de vibrations déterminé, et inversement.

Les recherches que j'ai commencées il y a deux ans, sur les récepteurs radiophoniques, et que je reprends aujourd'hui, m'ont conduit à chercher une formule semblable pour des verges élastiques en forme de *lame* circulaire ou rectangulaire allongée.

Voici les résultats obtenus pour ces dernières :

Il s'agit de verges en forme de rectangle allongé, c'est-à-dire dont la longueur est beaucoup plus grande que l'épaisseur et la largeur, et vibrant transversalement dans le sens de l'épaisseur.

Strehlke (2) et Lissajous (3) ont vérifié les conséquences de la théorie mathématique en ce qui concerne la position des nœuds correspondant aux divers harmoniques de ces lames dans toutes les conditions auxquelles les extrémités sont assujetties.

Quant au nombre de vibrations correspondant aux harmoniques d'une même lame et aux lames de dimensions diverses, depuis la fin du siècle dernier des vérifications expérimentales *partielles* des conséquences de la théorie ont été faites par divers physiciens, de telle sorte que, si l'on pose

$$n = k\frac{e}{l^2},$$

où n représente le nombre des vibrations de la lame, k une constante dépendant de la matière de la lame et du nombre de

(1) *Journal de Physique*, 1re série, t. V, p. 201, et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIX, p. 1001 et 1069.

(2) *Annales de Poggendorff*, t. XXVII et XXVIII.

(3) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXX.

nœuds qui s'y forment, e l'épaisseur (ou plutôt la dimension suivant laquelle s'effectuent les vibrations), l la longueur, cette formule est considérée comme représentant exactement les lois des vibrations des lames.

Mais, si l'on se propose de faire de cette formule une formule *pratique,* il faut, pour une substance donnée, déterminer la valeur du coefficient k à l'aide d'expériences suivies où l'on fait varier e, l et, par suite, n, de façon à pouvoir prendre une valeur moyenne de k aussi exacte que possible.

Or, ces expériences, si on veut leur donner de la précision, exigent l'enregistrement chronographique des vibrations des lames étudiées, opération qui n'est pas facile quand on emploie pour les produire les moyens ordinaires, le choc ou le frottement d'un archet.

En opérant d'abord sur des lames de substances magnétiques, acier ou fer, je suis parvenu à entretenir électriquement leurs vibrations, par une méthode identique à celle que j'ai indiquée, en 1873, pour l'entretien électrique des vibrations des diapasons.

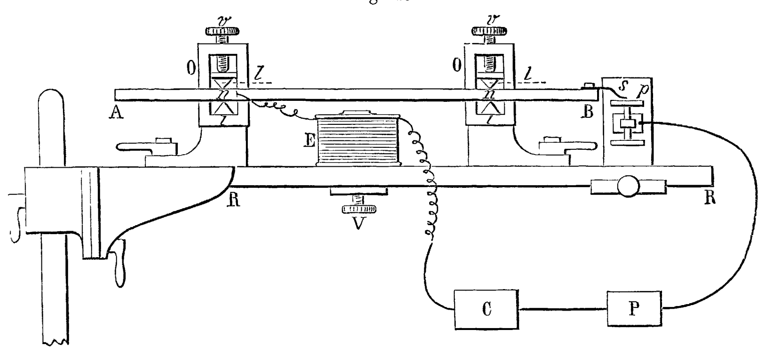
Lorsqu'une ou les deux extrémités de la lame sont encastrées solidement, on conçoit que cela soit facile; mais cela paraît moins aisé dans le cas que j'avais précisément en vue, celui de lames dont les extrémités devaient être libres, comme dans l'instrument connu sous le nom d'*harmonica;* cependant on y parvient de la manière suivante :

On pose la lame sur deux cordons tendus sur des supports en bois ou en plomb, à peu près au point où la théorie indique qu'il peut se développer deux nœuds, c'est-à-dire vers les 0,22 de la longueur à partir des extrémités, ou mieux on serre légèrement la lame le long des lignes de nœuds n, n (*fig.* 1) entre des prismes de liège l, l, ..., à l'aide de vis v, v, ..., fixées à des supports O, O, mobiles le long d'une règle métallique R, R horizontale.

Un électro-aimant E est placé sur la même règle au-dessous du centre de la lame, dont il peut être plus ou moins rapproché à l'aide d'une vis V; l'un des bouts de son hélice est relié à un point de l'une des lignes formant les nœuds n, l'autre à une plaque de platine p mobile à l'aide d'une vis, *au-dessous* d'un style s fixé à l'une des extrémités de la lame; dans ce circuit sont intercalés : une pile P et, en C, un très petit électro-aimant enregistreur à armature très légère armée d'un style, et dont la résistance est à peu près égale à celle de l'électro-aimant placé au-dessous de la lame. Le style de l'électro-aimant enregistreur est placé à côté de celui d'un électrodiapason, d'environ 100 vibrations doubles, en face d'un cylindre de chronographe.

Il suffit de mettre en contact, à l'aide de la vis, la plaque de platine avec le style de la lame pour que celle-ci vibre d'une manière continue, ainsi que l'armature de l'électro-aimant conve-

Fig. 1.



nablement réglée à l'aide d'un ressort de rappel; il est aisé de s'assurer, d'ailleurs, que la lame et l'armature vibrent synchroniquement. Avec des lames ayant jusqu'à 4^{mm} d'épaisseur, on obtient de bons résultats avec une pile de 2 ou 3 éléments au bichromate de potasse.

On obtient ainsi des graphiques parfaitement nets, dont la lecture met en évidence les relations suivantes :

I. *Variation de la largeur de la lame.* — Lame d'acier de 299^{mm} de longueur, 4^{mm} d'épaisseur. — On a fait varier la largeur de $0^m,08$ à $0^m,06$ et à $0^m,02$; les autres dimensions restent les mêmes. On a trouvé :

Largeur de la lame	80^{mm}	57^{mm}	20^{mm}
Nombre de périodes (vibrations doubles).	245,85	246,50	245,23

D'où cette conclusion évidente :

Le *nombre de vibrations d'une lame élastique* (définie comme ci-dessus) est indépendant de sa largeur.

II. *Variation de l'épaisseur.* — Lame d'acier de 299^{mm} de longueur et de 20^{mm} de largeur. — On a réduit successivement, à la machine à raboter, l'épaisseur de la lame de $4^{mm},0$ à $3^{mm},1$, à $2^{mm},1$ et à $1^{mm},5$.

La mesure des épaisseurs a été faite en plusieurs points de la lame avec un compas d'épaisseur; elle a été comparée à celle qu'on a déduite du poids de la lame, de sa densité, de sa longueur et de sa largeur : la concordance a eu lieu à $0^{mm},1$ près.

On a trouvé :

Épaisseur de la lame (e)	mm 4,0	mm 3,1	mm 2,1	mm 1,5
Nombre des périodes (n)	239,0	181,24	123,48	92,09
Rapport des épaisseurs	»	1,29	1,90	2,6
Rapport des nombres n	»	1,32	1,94	2,60

L'accord entre les deux dernières lignes est suffisant, eu égard à la difficulté de mesurer les épaisseurs, pour qu'on puisse en conclure que *le nombre des vibrations d'une lame élastique est proportionnel à son épaisseur* (plus généralement à la dimension suivant laquelle s'effectuent les vibrations).

III. *Variation de la longueur.* — La lame précédente a été successivement réduite de $299^{m},0$ à $249^{mm},5$, à $199^{mm},5$ et à 149^{mm}.

On a trouvé :

Longueur de la lame	mm 299,00	249,5	199,5	149,00
Nombre de périodes	92,09	133,03	207,71	368,25
Rapports inverses des carrés » des largeurs	»	1,436	2,245	4,03
» des nombres de périodes.	»	1,444	2,225	4,00

Les différences entre ces lignes de rapports mettent en évidence des erreurs relatives variant de 0,004 à 0,006 seulement.

On peut donc en conclure que *le nombre des vibrations d'une lame élastique est en raison inverse du carré de sa longueur.*

En résumé, le nombre des vibrations n d'une lame de longueur l, de largeur l', d'épaisseur e, vibrant librement en donnant le son fondamental, peut être représenté par une formule de la forme

$$n = k\frac{e}{l^2}, \tag{1}$$

k étant un coefficient indépendant de la largeur l'. C'est bien la formule admise d'après la théorie.

Détermination du coefficient k. — On déduit de la formule (1)

$$k = \frac{nl^2}{e}.$$

En faisant concourir à cette détermination de k toutes les expériences précédentes, où n, l, e ont des valeurs différentes, on obtient comme valeur moyenne, avec une erreur relative moyenne de 0,016 le nombre,

$$5329503. \tag{2}$$

Il importe de comparer cette valeur *expérimentale* avec la valeur déduite de la théorie mathématique de l'élasticité.

Cette valeur s'exprime, on le sait, par la formule

$$k = \frac{\lambda^2 a}{4\pi\sqrt{3}},$$

dans laquelle a représente la vitesse du son dans la substance constituant la matière de la plaque. Dans l'acier, on peut admettre, à la température de 15°, $a = 15,1 \times 340$ (vitesse du son dans l'air à 15°), c'est-à-dire 5134^{m} par seconde.

Quant à λ, c'est la plus petite racine de l'équation transcendante

$$(e^{\lambda} + e^{-\lambda})\cos\lambda - 2 = 0,$$

c'est-à-dire ($\lambda = 0$ étant inacceptable) $\lambda = 4,745$.

En effectuant les calculs, on trouve

$$k = 5310866. \tag{3}$$

La comparaison entre les valeurs (2) et (3) fait ressortir entre elles une différence égale à 18637 : le rapport de cette différence à la moyenne des deux nombres, qui est 5320134, est

$$\frac{18637}{5320134} = 0,0035,$$

qui représente véritablement l'erreur que l'on commet en prenant l'une des valeurs de k pour l'autre.

On peut donc adopter pour k la valeur moyenne 5320134 pour l'acier.

D'autre part, j'ai reconnu qu'en prenant des lames de dimensions identiques d'acier et de tôle de fer, on obtenait les mêmes résultats à moins de 0,01 près, ce qui conduit à prendre le même coefficient k pour le fer et l'acier, et à adopter la formule *pratique* définitive

$$n = 5320134 \frac{e}{l^2}. \tag{4}$$

Il importait de vérifier cette formule en prenant des lames de fer et d'acier de provenance quelconque et de dimensions variées, et de comparer entre elles les valeurs de n calculées d'après la formule (4) et observées directement. Et il est évident *a priori* qu'il ne faut pas s'attendre, dans cette comparaison, à des résultats très concordants, à cause de la diversité de la matière même des fers et des aciers que l'on emploie dans les appareils où l'on se sert de lames élastiques, diapasons, harmonicas, téléphones, etc.

Voici les résultats obtenus avec quatre lames différentes comme dimensions et provenance :

Lames.	Nature du métal.	Longueur.	Largeur.	Épaisseur.	Nombre de vibrations calculé.	Nombre de vibrations observé.	Différences.	Erreur relative.
		mm	mm	mm				
Nos 1	Fer......	315	51,2	1,32	70,78	69,93	−0,85	−0,01
2	Acier....	149	20,0	1,50	359,45	368,25	+8,80	+0,02
3	Fer......	299	80,0	4,13	245,77	240,20	−5,57	−0,02
4	Acier....	153,5	32,0	1,75	395,13	391,20	−3,93	−0,01

Ces erreurs relatives de 0,01 à 0,02 n'ont aucune importance au point de vue que je me proposais, savoir : la construction de lames dont le nombre de vibrations est déterminé d'avance et dont on veut se donner à volonté l'une des dimensions e ou l, car il suffit de limer très légèrement la longueur pour achever d'arriver, par la méthode de comparaison optique, par exemple, avec un étalon, au nombre de vibrations exact que l'on désire. Mais il me semble de plus qu'il en résulte, eu égard à la complexité théorique du coefficient k et de la difficulté d'en déterminer expérimentalement avec précision les éléments (densité, coefficient d'élasticité ou vitesse du son), une vérification satisfaisante de la théorie mathématique des lames élastiques vibrantes.