Sur l'action réciproque de deux sphères électrisées

M. Mascart

SUR L'ACTION RÉCIPROQUE DE DEUX SPHÈRES ÉLECTRISÉES;

PAR M. MASCART.

Poisson a traité d'une manière générale le problème de la distribution de l'électricité sur deux sphères conductrices, mais les calculs très longs qu'entraîne l'application de sa méthode n'ont été effectués que pour un petit nombre de cas particuliers. En partant de l'idée ingénieuse des images électriques, Sir W. Thomson a indiqué des développements en série qui permettent de déterminer les masses électriques de deux sphères en fonction des potentiels et l'action réciproque en fonction des masses ou des potentiels; les calculs ont été réduits en Tables, pour le cas de deux sphères égales dont la distance des centres ne dépasse pas le double de leur diamètre.

Lorsqu'on emploie la balance de Coulomb pour des mesures absolues, il peut être avantageux d'opérer à une distance plus grande, et il n'existe pas, à ma connaissance, de formule simple ni de Tables qui permettent alors de calculer les phénomènes avec une approximation suffisante. La méthode de Sir W. Thomson, simplifiée en quelques points, conduit à des formules dont l'exactitude paraît répondre à tous les besoins des expériences.

Il suffit d'admettre que les images successives provenant de l'induction mutuelle des deux sphères sont respectivement concentrées au point qu'occupe la première d'entre elles, c'est-à-dire au point conjugué du centre de chaque sphère par rapport à l'autre. Avec cette hypothèse, si l'on considère deux sphères égales dont r est le rayon, d ou cr la distance des centres, m et m' les masses électriques, V et V′ les potentiels, on trouve aisément que la masse m de la première a pour expression

$$m = r\mathrm{V} - \frac{r(c^2-1)^2}{c[(c^2-1)^2-c^2]}\left(\mathrm{V}' - \frac{c}{c^2-1}\mathrm{V}\right).$$

On peut considérer cette masse totale comme formée de deux parties, l'une $m_1 = r\mathrm{V}$, dont la distribution est homogène et dont l'action extérieure est la même que si elle était concentrée au centre; l'autre, $-m_2 = m - m_1$, qu'on pourra ainsi supposer concentrée au point conjugué du centre de la seconde sphère, c'est-à-dire à la distance $\frac{r^2}{d}$ du centre de la première.

La masse m' de la seconde sphère étant de même partagée en deux autres m'_1 et $-m'_2$, l'action réciproque des deux sphères a pour expression

$$f = \frac{m_1 m'_1}{d^2} - \frac{m_1 m'_2 + m'_1 m_2}{\left(d - \frac{r^2}{d}\right)^2} + \frac{m'_1 m'_2}{\left(d - 2\frac{r^2}{d}\right)^2}.$$

On pourra ainsi calculer les valeurs de m, m' et f en fonction des potentiels.

Les résultats se simplifient beaucoup quand on suppose $m = m'$ et par suite $\mathrm{V} = \mathrm{V}'$; il vient alors

$$m = r\mathrm{V}\left[1 - \frac{c^2-1}{c(c^2+c-1)}\right],$$

$$f = \mathrm{V}^2\left[\frac{1}{c^2} - \frac{2c}{(c^2-1)(c^2-c-1)} + \frac{(c^2-1)^2}{(c^2-2)^2(c^2+c-1)}\right],$$

d'où l'on déduira le rapport $\frac{fr^2}{m^2}$ en fonction de la distance des centres.

Il est clair, par la nature même de l'hypothèse admise, que ces formules sont d'autant plus exactes que la distance est plus grande. Pour avoir une idée de l'approximation qu'elles comportent, nous considérerons le cas extrême $c = 4$, qui correspond à la limite des

Tables de Sir W. Thomson. On obtient ainsi

$$m = r\mathrm{V} \times 0{,}080262,$$
$$f = \mathrm{V}^2 \times 0{,}03761,$$
$$f = \frac{m^2}{r^2} \times 0{,}05830.$$

Les valeurs des coefficients numériques données par les Tables sont respectivement 0,080258 ; 0,03766 ; 0,05846. L'erreur relative des formules approchées est donc d'environ 0,001 dans ce cas, qui est le plus défavorable. Si la valeur de c dépasse 5 ou 6, il est plus avantageux de développer les expressions en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{c}$, dont les premiers termes sont

$$m = r\mathrm{V}\frac{c}{c+1}\left[1 - \frac{1}{c^4}\left(1 - \frac{1}{c} - \frac{2}{c^2} - \frac{3}{c^3} - \frac{5}{c^4} - \ldots\right)\right],$$
$$f = \frac{\mathrm{V}^2}{(c+1)^2}\left[1 \quad \frac{2}{c^3}\left(2 \quad \frac{1}{c} + \frac{4}{c^2} - \frac{7}{c^3} - \frac{11}{c^4} - \ldots\right)\right],$$
$$f = \frac{m^2}{d^2}\left[1 - \frac{2}{c^3}\left(2 - \frac{3}{c^2} - \frac{5}{c^3} + \frac{4}{c^4} - \ldots\right)\right].$$

Le terme principal dans chacune de ces expressions représente la valeur que l'on aurait trouvée en supposant que l'action extérieure de chaque sphère est la même que si sa masse électrique était concentrée en son centre.

On remarquera, en particulier, que, pour la valeur de la force en fonction des masses, la formule simple employée par Coulomb ne comporte pas une erreur relative de 0,02 quand on fait seulement $c = 6$, c'est-à-dire quand la distance des centres est triple du diamètre des sphères.