



Sur les lois du mouvement vibratoire des diapasons

E. Mercadier

► To cite this version:

E. Mercadier. Sur les lois du mouvement vibratoire des diapasons. J. Phys. Theor. Appl., 1876, 5 (1), pp.201-212. 10.1051/jphystap:018760050020100 . jpa-00237176

HAL Id: jpa-00237176

<https://hal.science/jpa-00237176>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LES LOIS DU MOUVEMENT VIBRATOIRE DES DIAPASONS;

PAR M. E. MERCADIER.

Je me suis occupé de l'étude des vibrations des diapasons en acier. Je leur donne une forme prismatique, c'est-à-dire une section rectangulaire constante, et je suppose que cette forme se continue même dans la partie courbe, où les branches parallèles sont raccordées par un demi-cylindre au milieu duquel se trouve la tige, forgée en même temps que les branches, et nullement rapportée après coup. J'appelle *épaisseur* de l'instrument la dimension parallèle aux vibrations et *largeur* la dimension qui leur est perpendiculaire.

I. *Variation de la largeur.* — On place un diapason sur un support muni d'un électro-aimant et d'un interrupteur destiné à entretenir électriquement les vibrations du diapason à l'état de régime permanent, et à côté d'un autre électro-aimant dont la palette, armée d'un style, reproduit les battements d'une horloge à secondes. On enregistre ces battements et les vibrations du diapason sur un cylindre tournant recouvert de papier enfumé. On obtient ainsi à $\frac{1}{1000}$ près au moins, ainsi que je l'ai montré précédemment (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 1256), le nombre de périodes par seconde du diapason. On recommence l'expérience dans des conditions identiques, après avoir limé le diapason des deux côtés, en lui laissant partout une nouvelle largeur constante, et ainsi de suite.

Voici un exemple des résultats qu'on obtient en opérant ainsi :

	^{mm}	^{mm}	^{mm}
Largeurs du diapason. . . .	35,3	30,90	24,8
Nombres de périodes. . . .	144,7	144,7	144,9

On voit que la variation du nombre des périodes est insignifiante, bien qu'on ait diminué la largeur du tiers et réduit ainsi le poids de l'instrument de 1550 à 1100 grammes.

On peut donc en conclure, ce qu'il était naturel de penser, que la *variation de la largeur d'un diapason prismatique, toutes*

choses égales d'ailleurs, n'a pas d'influence sensible sur le nombre de ses vibrations.

II. *Variation de l'épaisseur.* — Si l'on fait les mêmes expériences en diminuant successivement l'épaisseur sans toucher aux autres dimensions et en ayant bien soin que ces épaisseurs soient constantes en tous les points, on reconnaît que le nombre des vibrations change beaucoup.

Voici un tableau des résultats obtenus avec un diapason de 30 centimètres de longueur environ :

Épaisseurs	^{mm} 10,25	^{mm} 9,25	^{mm} 8,58	^{mm} 7,70	^{mm} 6,02	^{mm} 4,37
Nomb. de périodes.	87,98	81,18	74,32	67,43	54,88	40,00

Si l'on construit une courbe dont les abscisses représentent les épaisseurs, et les ordonnées les nombres de périodes, en remarquant d'ailleurs que l'origine doit être un point de la courbe, on voit que cette courbe ne diffère pas sensiblement d'une ligne droite.

Donc le nombre des vibrations d'un diapason prismatique est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel à son épaisseur.

III. *Variation de la longueur.* — Les deux branches d'un diapason ont des mouvements identiques : il ne s'agit donc que de la longueur d'une branche ; mais comment définir cette longueur ? Est-ce la projection l sur l'axe de l'instrument de la ligne médiane de la branche, ou bien sa longueur L rectifiée ? J'ai considéré ces deux longueurs simultanément ; j'ai déterminé pour chacune d'elles le produit de son carré par le nombre des périodes, en réduisant successivement un long diapason de 30 centimètres à 6 centimètres environ. Voici le tableau des résultats obtenus dans treize expériences consécutives :

Longueurs (l)	Nombre (n) de périodes par seconde.	nl^2	nL^2
^{mm} 295,4	40,00	3485720	3767480
275,2	45,95	3480023	3782236
255,7	53,24	3481937	3806819

Longueurs (l) mm	Nombre (n) de périodes par seconde.	nl^2	nL^2
216,2	74,11	3464050	3847567
196,1	89,80	3453259	3877654
176,5	110,25	3434508	3904945
156,5	139,54	3417614	3947726
136,2	182,62	3387601	3994630
116,4	247,05	3350245	4057055
96,6	354,54	3308567	4158400
86,4	438,07	3274135	4219928
76,4	549,37	3231944	4293327
57,0	974,00	3142124	4570008

Il résulte de l'examen de ce tableau que les produits nl^2 et nL^2 ne sont pas constants; ils varient d'une manière continue: l'un décroît, l'autre croît; mais la variation de nL^2 est deux fois plus rapide que celle de nl^2 . Considérons donc ce dernier.

On voit qu'on peut couper un tiers du diapason sans que l'erreur qui consiste à admettre que nl^2 est constant dépasse 0,01: en coupant le second tiers, cette erreur n'arrive qu'à 0,03 environ; à partir de ce moment, elle arrive assez rapidement à 0,1; mais il faut considérer qu'alors, si l'on a en vue l'assimilation d'un diapason à une verge droite, l'influence de la partie courbe sur la partie droite augmente rapidement.

On peut déjà conclure de cela, au point de vue pratique, qu'un diapason étant donné, dépassant 10 centimètres de longueur, si l'on veut diminuer sa période d'une petite quantité, on peut parfaitement admettre que le nombre des vibrations varie en raison inverse du carré de la longueur, et calculer *a priori*, en conséquence, la longueur du diapason à couper pour obtenir la diminution de période que l'on veut.

Mais on peut chercher à diminuer cette restriction en augmentant en même temps l'approximation que donnerait cette loi. A cet effet, déterminons la longueur y qu'il faut ajouter à l pour que les deux produits $n(l+y)^2$, relatifs à la treizième et à la première expérience, soient égaux. Il suffit de poser

$$n'(l' + y)^2 = n(l + y)^2,$$

équation dans laquelle

$$n' = 974, \quad n = 40, \quad l' = 57,0, \quad l = 295,4.$$

En résolvant cette équation, on trouve $\gamma = 3^{\text{mm}}, 8$. Ainsi il suffit d'ajouter à chaque valeur de l cette petite longueur de $3^{\text{mm}}, 8$, qui n'est que les 0,012 environ de la longueur totale du diapason, pour que les produits $n(l + \gamma)^2$ soient constants; ils sont alors égaux à 3576040.

On peut conclure de ce qui précède que *le nombre des vibrations d'un diapason prismatique est, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse du carré de la longueur*, en prenant pour longueur la projection sur l'axe de la ligne médiane d'une branche augmentée d'une petite longueur auxiliaire, qui ne dépasse pas le 0,01 de la longueur totale, et qu'on peut négliger quand il s'agit de diapasons dont la longueur dépasse 12 à 15 centimètres.

On a donc, pour représenter les lois du mouvement des diapasons prismatiques, la formule suivante, semblable à celle qui se rapporte au mouvement des verges élastiques droites :

$$n = k \frac{e}{(l + \gamma)^2} \quad \text{ou} \quad n = k \frac{e}{(1,012l)^2},$$

n étant le nombre de périodes, e l'épaisseur, l et γ les longueurs précédemment indiquées, k une constante qu'on peut déterminer à l'aide d'une expérience quelconque.

Pour les diapasons en acier, j'ai trouvé $k = 818270$.

Le coefficient qui affecte la valeur de l est purement empirique. Il paraît difficile de le déterminer autrement que par l'expérience. On ne doit pas s'attendre d'ailleurs à obtenir dans les applications de la formule une grande précision, en songeant à la complexité du système représenté par un diapason, aux différences que peuvent présenter deux diapasons en apparence identiques, par suite des différences dans la qualité de l'acier, dans la façon dont ils sont recourbés, forgés, trempés. On ne s'étonnera donc pas de trouver, entre les valeurs de n observées et les valeurs calculées d'après la formule ci-dessus, des divergences sensibles.

Voici les résultats obtenus pour trois diapasons d'épaisseurs et de largeurs différentes :

DIAPASONS.	e	$1,012 l$	n		DIFFÉRENCES.	ERREURS relatives moyennes.
			calculé.	observé.		
N° 1.....	^{mm} 10,2	^{mm} 238,73	146,4	144,7	— 1,7	0,011
N° 2.....	7,0	269,2	79,0	77,7	— 1,3	0,016
N° 3.....	3,75	325,5	29,0	29,7	+ 0,7	0,023

Il y a là des erreurs relatives, variant de 1 à 2 pour 100, qui ne paraîtront pas considérables, je pense, si l'on a égard aux observations précédentes, et qui, d'ailleurs, n'ont pas d'importance au point de vue pratique de la construction des diapasons. En ce cas, en effet, il suffit parfaitement de pouvoir calculer *a priori* les dimensions à donner à un instrument pour qu'il ait, à 1 ou 2 pour 100 près, le nombre de périodes par seconde que l'on veut.

IV. Pour comparer les résultats ainsi obtenus expérimentalement à ceux que peut donner la théorie mathématique de l'élasticité, considérons une verge prismatique droite de longueur l et d'épaisseur ε . La théorie donne, pour le nombre n' de vibrations d'un pareil corps,

$$n' = \frac{\lambda a \varepsilon}{2 \pi \sqrt{3} l^2},$$

a étant la vitesse du son dans la lame élastique considérée et λ étant une racine positive de l'équation

$$(e^{ml} + e^{-ml}) \cos ml + 2 = 0,$$

les valeurs diverses de ml correspondant aux harmoniques successifs de la lame. En résolvant cette équation par approximations successives, on trouve ⁽¹⁾, pour la valeur de la première racine relative au son fondamental,

$$\lambda = 1,87011.$$

On en conclut

$$n' = \frac{(1,87011)^2 a \varepsilon}{2 \pi \sqrt{3} l^2},$$

(1) POISSON, *Mécanique*, t. II, p. 390.

et, pour la valeur du coefficient k mentionné ci-dessus,

$$k = \frac{(1,87011)^2 a}{2\pi\sqrt{3}}.$$

Mais, pour appliquer ces formules au cas d'un diapason, l doit être remplacé par $1,012 l$ et par suite λ par $1,012 \lambda$, c'est-à-dire $1,89255$.

De plus, n' représente le nombre de *vibrations* de la verge par seconde; pour avoir le nombre de *périodes* n que nous avons considéré, il faut prendre la moitié des valeurs précédentes.

Il en résulte définitivement

$$k = \frac{(1,89255)^2 a}{2\pi\sqrt{3}}, \quad n = k \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{(1,012 l)^2}.$$

En prenant pour la vitesse du son dans l'acier le nombre donné par Wertheim et se reportant à la valeur ci-dessus de k déduite de l'expérience, on a

$$a = 4985^m, \quad k \left\{ \begin{array}{l} \text{calculé} \dots\dots 820131 \\ \text{observé} \dots\dots 818270 \end{array} \right\}.$$

Différence entre les deux valeurs, 1861; erreur relative moyenne, $\frac{1861}{819200} = 0,002$ environ.

La concordance est donc complète entre les résultats de l'observation et ceux de la théorie.

V. *Variation de l'amplitude*. — Lorsqu'on veut employer un diapason entretenu électriquement à produire des interruptions de courants parfaitement égales, ou à exécuter un petit travail mécanique, ou enfin à produire des figures acoustiques qu'on veut projeter, on est forcé de lui donner d'assez grandes amplitudes. Il y a lieu de se demander alors si l'*isochronisme* des vibrations que suppose la formule mathématique et que j'ai démontré expérimentalement (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 1256), quand on ne dépasse pas 2 ou 3 millimètres d'amplitude, existe encore.

On peut employer trois procédés pour faire cette étude.

1° Le premier procédé consiste à donner à l'électrodiapason en

expérience des amplitudes de moins en moins grandes, en maintenant chacune d'elles constante pendant dix ou vingt secondes. On enregistre chaque fois les vibrations sur le cylindre tournant, ainsi que les battements de la palette de l'électro-aimant qui bat la seconde.

D'ailleurs, pour pouvoir mesurer facilement et exactement l'amplitude, on ralentit le mouvement du cylindre au commencement et à la fin de l'expérience, afin que le style du diapason décrive une courbe à spires si serrées qu'elles ressemblent à des hachures contiguës.

Parmi les nombreuses séries d'expériences que j'ai faites, je donnerai comme type le tableau suivant ; tous les autres donnent des résultats analogues :

Amplitudes	^{mm} 9,0	^{mm} 5,6	^{mm} 5,2	^{mm} 4,6	^{mm} 2,6	^{mm} 1,5
Nombre de périodes par seconde	27,89	27,91	27,915	27,92	27,92	27,92

On voit nettement par ce tableau que le nombre de périodes augmente pendant que l'amplitude décroît depuis 9 millimètres jusque vers 5 millimètres ou 4^{mm},5 ; à partir de ce moment, ce nombre se maintient constant. La variation est très-faible : elle ne porte que sur le quatrième chiffre. Elle s'élève au maximum à 0,03 ; en la rapportant à la moyenne des valeurs extrêmes 27,89 et 27,92, on obtient $\frac{0,03}{27,90}$ ou $\frac{3}{2790} = \frac{1}{930}$, variation très-petite, mais néanmoins incontestable.

2° Le second procédé expérimental consiste à donner au diapason l'amplitude maximum possible, puis à supprimer brusquement l'entretien électrique du mouvement en interrompant le courant de la pile. Le diapason vibre alors uniquement en vertu de son élasticité ; son amplitude décroît graduellement depuis la valeur maximum qu'on lui a donnée jusqu'à zéro.

On mesure sur les graphiques les nombres de vibrations par seconde correspondant à 2, 4, 6, ..., 10, ..., 20, ... secondes successives.

Si la grandeur de l'amplitude n'avait pas d'influence sur la durée de la période, tous les nombres ainsi obtenus devraient être égaux. Or il n'en est rien ; ils sont graduellement croissants jusqu'à une certaine limite, ainsi que le montre la série suivante, prise comme exemple :

Nombre de secondes	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Nombre de périodes par seconde	27,82	27,825	27,83	27,83	27,83	27,83	27,83	27,835	27,833	27,835

Nombre de secondes	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
Nombre de périodes par seconde	27,835	27,833	27,835	27,84	27,84	27,84	27,84	27,84	27,84	27,84

On a ici une variation du nombre de périodes de même sens que celle que le tableau précédent met en évidence. Elle est de $\frac{2}{2780} = \frac{1}{1390}$ environ, plus petite que la précédente, mais l'amplitude au départ était aussi plus petite, 7^{mm}, 50. On voit encore que le nombre de périodes tend vers une limite constante, qui est ici 27,84, et qui est atteinte dès que l'amplitude arrive à 3 millimètres environ.

3° Enfin on peut employer un procédé optique qui consiste à produire avec deux diapasons semblables armés de miroirs une figure acoustique, l'ellipse qui caractérise l'unisson par exemple. On les désaccorde légèrement, de façon que l'ellipse se déforme graduellement en passant par toutes ses variétés successives. Appelons *durée de la période de déformation* le temps mis par la courbe à repasser dans le même sens par l'une de ses variétés, par exemple par l'une des diagonales du rectangle circonscrit.

On pointe électriquement sur un cylindre tournant tous les passages de la courbe à cette diagonale, de façon à pouvoir ensuite relever sur le graphique les durées de chaque période de déformation.

Cela posé, maintenant constante l'amplitude de l'un des diapa-

sons, on donne à l'autre une amplitude aussi grande que possible et on la laisse ensuite décroître graduellement.

Si l'amplitude n'avait pas d'influence sur l'isochronisme, la durée des périodes de déformation devrait rester constante. Le tableau suivant, qui est le relevé d'une expérience, montre qu'il n'en est rien : l'amplitude γ a varié de 8 millimètres à zéro.

N ^{os} des périodes de dé- formation.....	1 ^{re}	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e	...	12 ^e	...	15 ^e	...
Durée de ces périodes en secondes	5,54	5,55	5,54	5,55	5,55	...	5,56	...	5,58	...

De la quinzième période à la cinquantième, la durée reste égale à 5^s,58.

Cette méthode d'observation conduit donc au même résultat que les précédentes.

On doit donc conclure de ce qui précède : 1^o *que la durée de la période du mouvement vibratoire des diapasons augmente ou diminue avec l'amplitude*; 2^o *que cette variation, même par des amplitudes considérables de 1 centimètre, est très-faible et ne porte que sur le quatrième chiffre*; 3^o *que, si l'on ne dépasse pas une certaine limite qu'on peut fixer à 4 millimètres, on peut regarder la durée de la période comme constante*.

Cette dernière loi vient donc confirmer la conclusion pratique que j'avais déduite d'études précédentes.

La théorie mathématique de l'élasticité indique que les vibrations d'un diapason doivent être *isochrones*; mais les résultats ci-dessus ne sont qu'en apparence en contradiction avec les indications de la théorie. En effet, la théorie repose sur deux hypothèses : on admet : 1^o *que les vibrations sont rectilignes*; 2^o *que leur amplitude est très-petite*. Or, si ces deux hypothèses peuvent être regardés comme très-suffisamment satisfaites quand l'amplitude ne dépasse pas 3 ou 4 millimètres, il n'en est pas de même évidemment quand elle dépasse cette limite, et surtout quand on arrive à des amplitudes de 7, 8, 9, 10 millimètres. Le désaccord, si faible d'ailleurs, entre l'expérience et la théorie n'est plus alors étonnant : c'est le contraire qui le serait.

VI. *Influence de la température sur la durée de la période.*
 — On a vu plus haut que le nombre de périodes par seconde d'un diapason dont la longueur dépasse 13 centimètres était représenté par la formule suivante, identique à celle que fournit la théorie de l'élasticité par les tiges élastiques :

$$n = k \frac{\varepsilon}{l^2}.$$

En remplaçant la vitesse du son a par $\sqrt{\frac{q}{d}}$, k , quantité constante pour un même diapason, est représentée par

$$k = \frac{(1,89255)^2 \sqrt{q}}{2\pi \sqrt{3} \sqrt{d}},$$

q étant le coefficient d'élasticité de l'acier et d sa densité; de telle sorte que la valeur définitive de n est

$$n = \frac{1}{2} \frac{(1,892255)^2 \sqrt{q}}{2\pi \sqrt{3} \sqrt{d}} \frac{\varepsilon}{l^2}.$$

Lorsque la température de l'instrument varie, les dimensions ε et l de l'instrument varient suivant les lois connues de la dilatation: il en est de même de la densité d . Le coefficient d'élasticité q varie aussi, mais la loi de cette variation n'est pas connue; on n'a sur ce sujet, au point de vue expérimental, que des expériences de Wertheim qui manquent certainement de précision et auxquelles on ne peut se fier sans réserve.

Dans ces conditions, je me suis d'abord occupé de chercher expérimentalement l'influence approximative de la température.

J'ai exposé un diapason dans une chambre ouverte, à une température assez basse; j'ai ensuite fermé la chambre et l'ai chauffée graduellement, en inscrivant de temps en temps pendant dix secondes les vibrations de l'instrument, à une température constante indiquée par un bon thermomètre appliqué à l'une des branches.

Voici, par exemple, les résultats de quatre mesures :

Températures.....	3°,5	10°,0	18°,0	26°,0
Nombre de périodes par sec.	27,90	27,89	27,86	27,84

Ainsi le nombre des périodes décroît à mesure que la température s'élève.

La variation est faible; elle ne porte que sur le quatrième chiffre, comme celle qui résulte de la variation d'amplitude.

En admettant que le coefficient d'élasticité ne change pas avec la température, en se rappelant que l'épaisseur ε et la longueur l d'un diapason varient proportionnellement au binôme de dilatation linéaire de l'acier $(1 + \lambda t)$, que la densité d varie en raison inverse du binôme de dilatation cubique $(1 + \alpha t)$, et en exprimant que $\alpha = 3\lambda$, on peut calculer le rapport $\frac{n'}{n''}$ des nombres de périodes du diapason à deux températures t' et t'' .

On trouve ainsi, toutes simplifications faites, en négligeant des termes qui contiennent λ^2 ,

$$n' = n'' [1 + \frac{1}{2} \lambda (t'' - t')].$$

Cette formule montre bien que le nombre n' , qui correspond à la température la plus basse, est plus grand que celui n'' , qui correspond à la température la plus élevée, conformément à l'expérience.

Mais, si l'on fait le calcul pour les températures $t' = 3^{\circ}, 5$, $t'' = 26^{\circ}$, en prenant pour λ la moyenne des valeurs trouvées par divers observateurs pour l'acier, et rapportées dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, $\lambda = 0,00011268$, on trouve que, si $n'' = 27,84$, valeur donnée par l'expérience,

$$n' = 27,84 \times 1,000141 = 27,8439 \dots$$

de telle sorte que le quatrième chiffre n'est pas altéré.

La conclusion remarquable qui paraît ressortir de là, c'est que la variation dans le nombre de périodes qui se produit quand on fait varier la température est principalement due à l'influence de la température sur le coefficient d'élasticité que nous avons supposé constant dans les calculs ci-dessus.

En résumé, il résulte de cette étude de l'influence de l'amplitude et de la température sur le mouvement vibratoire d'un diapason les conséquences suivantes :

L'isochronisme des vibrations d'un diapason n'est pas absolument rigoureux; la durée de sa période dépend de l'amplitude et de la température.

Au point de vue pratique de l'emploi d'un diapason comme chronographe ou interrupteur, *un instrument ne donnera des résultats absolument identiques à des époques différentes que si l'on opère à la même température, et si l'on donne aux vibrations la même amplitude.*

Si l'on n'a pas besoin d'une identité complète, et de grandes amplitudes, ce qui est le cas le plus ordinaire, *pourvu qu'on ne dépasse pas une amplitude de 3 à 4 millimètres et qu'on opère à des températures peu différentes, on est certain d'avoir le même nombre de périodes par seconde à 0,0001 près.*
