



Méthode nouvelle pour la discussion des problèmes de diffraction dans le cas d'une onde cylindrique

M.A. Cornu

► To cite this version:

M.A. Cornu. Méthode nouvelle pour la discussion des problèmes de diffraction dans le cas d'une onde cylindrique. J. Phys. Theor. Appl., 1874, 3 (1), pp.5-15. 10.1051/jphystap:0187400300500 . jpa-00237010

HAL Id: jpa-00237010

<https://hal.science/jpa-00237010>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

JOURNAL DE PHYSIQUE

THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

MÉTHODE NOUVELLE POUR LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DE DIFFRACTION DANS LE CAS D'UNE ONDE CYLINDRIQUE;

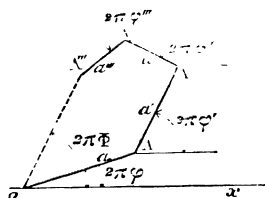
PAR M. A. CORNU.

Je me propose de résumer ici une nouvelle méthode géométrique qui permet de résoudre presque intuitivement la plupart des problèmes classiques de la diffraction d'une onde cylindrique, et de déterminer par un tracé graphique les valeurs numériques approchées des éléments inconnus.

On suppose familière au lecteur la *règle de Fresnel*, sur la composition de deux ou plusieurs mouvements vibratoires parallèles, de même période T , mais différant par l'amplitude et la phase, dont voici l'énoncé :

Si l'on représente symboliquement (fig. 1) chaque mouvement

Fig. 1.



vibratoire par une droite dont la longueur OA , comptée à partir d'une origine fixe O , est égale à l'amplitude a , et dont la di-

rection avec un axe fixe représente la phase Ox (la phase φ , étant une fraction de vibration complète, est représentée par $AOx = 2\pi\varphi$, angle ou arc, fraction de circonférence complète), le mouvement vibratoire, résultant de la superposition de tous les mouvements a, a', a'', a''' , est représenté symboliquement par la **RÉSULTANTE** de toutes ces droites : la longueur OA''' , représentant l'amplitude A , et l'angle $A'''Ox$ que cette résultante fait avec l'axe représentant la phase Φ multipliée par 2π .

En un mot, on compose les droites représentatives des mouvements vibratoires comme on compose les droites représentatives des forces.

La démonstration de ce théorème de Cinématique s'obtient, dans le cas de deux ou plusieurs mouvements, par l'identification des coefficients de $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ et de $\cos 2\pi \frac{t}{T}$, dans l'équation qui exprime que la superposition des mouvements périodiques produit un mouvement de même nature :

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) + a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi' \right) + \dots = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi \right).$$

C'est sur l'emploi de cette représentation symbolique qu'est fondée la méthode de discussion des phénomènes de diffraction.

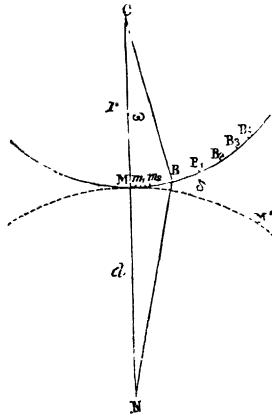
I. — *Ligne représentative de la composition des mouvements vibratoires envoyés en un point par une onde cylindrique partielle ou totale.*

Considérons une onde cylindrique (*fig. 2*) dont la base $MBB_1B_2B_3$ est un cercle ayant son centre en C , et un point extérieur N dans le plan de la base, sur lequel on veut calculer la résultante des mouvements vibratoires d'une portion de l'onde ou de l'onde tout entière. Décomposons la base de l'onde en arcs infiniment petits égaux, $Mm_1, m_1m_2, \dots$, à partir du point M le plus voisin de N , point que nous appellerons pour abrégé le *pôle de l'onde*.

On admet : 1° que chaque élément d'arc, tel que $Mm_1 = ds$, fonctionne comme une véritable source lumineuse (principe d'Huyghens), et qu'elle envoie au point N un mouvement de même période que

lui, dont l'amplitude est proportionnelle à sa longueur et dont la phase est variable avec la distance de l'élément.

Fig. 2.



Pour pouvoir calculer cette phase, Fresnel admet encore :

2° Que chacun des points de l'onde possède exactement le même mouvement vibratoire; ce synchronisme parfait est précisément la définition de la forme de l'onde;

3° Que le mouvement vibratoire de l'onde est *permanent*, c'est-à-dire que chaque point de l'onde exécute une série de vibrations identiques dans le temps, et représentées exactement par la formule

$$u = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right),$$

u étant le déplacement de la molécule vibrante et φ une constante. Grâce à ces restrictions, qui ne sont, en somme, que la définition d'un mouvement ondulatoire en régime permanent, la loi qui lie la phase avec la distance se trouve entièrement déterminée : en effet, si l'on considère les mouvements qui parviennent *au même moment* au point N, c'est-à-dire ceux que l'on a à composer, on verra qu'ils sont partis à des époques différentes des divers points de l'onde, parce qu'ils ont des chemins inégaux à parcourir. En appelant V la vitesse de propagation du mouvement vibratoire, on aura

$$t_0 = \frac{x}{V},$$

t_0 étant le temps qui représente l'*avance au départ* du mouvement vibratoire d'un point de l'onde plus éloigné de toute la longueur x ; par suite, les mouvements vibratoires parvenus simultanément en N sont compris dans la formule

$$(1) \quad u = h ds \sin 2\pi \left(\frac{t + \frac{x}{V}}{T} \right) = h ds \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right),$$

en posant $\lambda = VT$, λ étant ce qu'on appelle la *longueur d'ondulation*, et h étant une constante. Ainsi la différence de phase des mouvements envoyés par deux points, dont la différence de marche est x , est $\frac{x}{\lambda}$.

Comme ce sont les différences seules qui intéressent, nous prendrons comme origine des phases celle du mouvement qui, parti du pôle de l'onde, arrive en N; alors x représente les différences de distance au point N des divers points de l'onde et du pôle. Cette différence de marche, par suite la phase, grandit d'une manière continue à partir de ce pôle. On se rendra un compte plus exact de la manière dont elle varie, en marquant les points successifs $B_1, B_2, B_3, \dots$, intersections de la base de l'onde avec des cercles décrits du point N comme centre, et ayant respectivement pour rayons

$$MN + \frac{\lambda}{2}, \quad MN + \frac{2\lambda}{2}, \quad MN + \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

Les phases des mouvements vibratoires, envoyés respectivement par les arcs infiniment petits placés en ces points, seront $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, par rapport à celle du pôle.

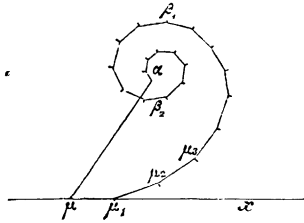
Les arcs MB_1, B_1B_2, B_2B_3 vont en décroissant rapidement, puisque l'élément de courbe, normal au pôle au rayon recteur MN, tend à la limite à lui devenir tangent. La valeur limite de B_nB_{n+1} est donc $\frac{\lambda}{2}$, c'est-à-dire une longueur de l'ordre des dix-millièmes de millimètre; car la longueur moyenne d'ondulation de la lumière est environ $0^{\text{mm}},0005$; on peut donc dire que ces arcs tendent rapidement vers zéro.

A l'aide de ces remarques préliminaires, il est aisé de se rendre un compte très-approximatif de la résultante des mouvements envoyés au point N par une portion de la demi-onde commençant au pôle.

Construisons la courbe symbolique destinée à représenter cette

résultante : à cet effet, soit μx (*fig. 3*) la direction origine des angles représentant les phases; portons l'élément $\mu\mu_1$ proportionnel

Fig. 3.



à l'arc infiniment petit Mm_1 suivant μx (les points correspondants sont représentés par les lettres grecques correspondantes), puisque la phase du point M est prise pour origine; portons bout à bout les arcs $\mu_1\mu_2, \mu_2\mu_3, \dots$, tous égaux au premier, mais de plus en plus inclinés sur la direction μx , parce que la phase des mouvements envoyés par ces arcs élémentaires au point N grandit progressivement. On obtient ainsi une ligne polygonale dont les éléments font un angle de plus en plus grand avec la direction Ox ; sa longueur totale est toujours proportionnelle à la portion correspondante de l'arc d'onde, et elle jouit de la propriété que l'amplitude et la phase résultantes des mouvements, envoyés par un nombre quelconque d'éléments consécutifs de l'onde, sont fournies par la droite qui joint les extrémités des arcs représentatifs correspondants.

Les points de repère $B_1, B_2, B_3, \dots$ correspondent sur la ligne polygonale aux éléments parallèles à l'axe μx ; en effet, ces points ayant pour phases $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, les éléments contigus à ces points sont représentés par des arcs faisant des angles $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, avec le premier élément; on les a désignés (*fig. 3*) par $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$.

Cette ligne polygonale, ou plutôt cette ligne continue (car la subdivision en éléments rectilignes ne sert que pour faciliter la démonstration), présente évidemment des spires de plus en plus resserrées, car l'arc représentatif s'enroule de 180 degrés à chaque point $B_n, \dots$. On peut même prévoir que les spires successives ne se coupent pas et forment une véritable spirale, d'après la considération suivante : dans l'intervalle de deux points B consécutifs, d'un ordre un peu élevé, les différences de phase croissent à très-peu près proportionnellement à l'arc. Si cette proportionnalité était

On pose

$$(5) \quad zs = \frac{\pi}{2} v^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{2(r-d)}{rkd} s^2 = v^2;$$

les limites deviennent 0 et ε ,

$$\varepsilon = v \sqrt{\frac{rkd}{2(r+d)}},$$

et les intégrales

$$(6) \quad x = k \sqrt{\frac{rkd}{2(r+d)}} \int_0^\varepsilon dv \cos \frac{\pi}{2} v^2, \quad y = h \sqrt{\frac{rkd}{2(r+d)}} \int_0^\varepsilon dv \sin \frac{\pi}{2} v^2.$$

Les Tables ne comprennent, bien entendu, que l'intégrale définie, sans le facteur constant qui la multiplie.

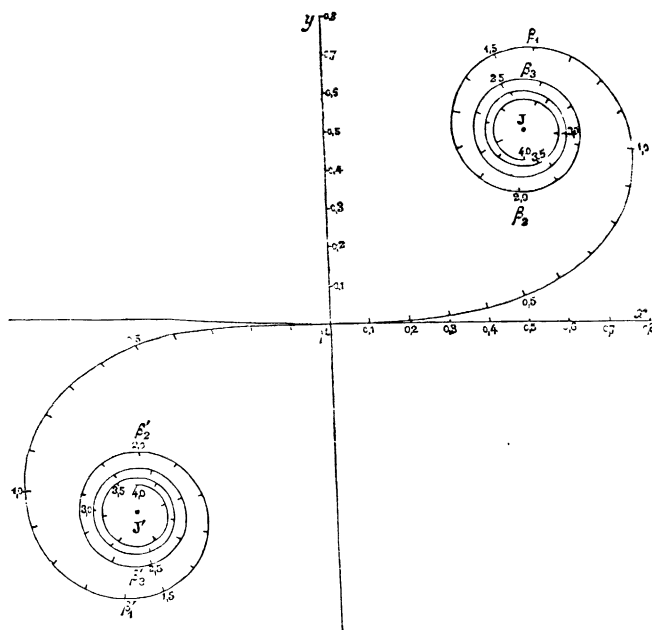
Table des intégrales de Fresnel ().*

ε	$\int_0^\varepsilon \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv$	$\int_0^\varepsilon \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv$	ε	$\int_0^\varepsilon \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv$	$\int_0^\varepsilon \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv$
0,0	0,0000	0,0000	2,6	0,3889	0,5500
0,1	0,1999	0,0005	2,7	0,3926	0,4529
0,2	0,1999	0,0042	2,8	0,4675	0,3915
0,3	0,2994	0,0141	2,9	0,5624	0,4102
0,4	0,3975	0,0334	3,0	0,6057	0,4963
0,5	0,4923	0,0647	3,1	0,5616	0,5818
0,6	0,5811	0,1105	3,2	0,4663	0,5933
0,7	0,6597	0,1721	3,3	0,4057	0,5193
0,8	0,7230	0,2493	3,4	0,4385	0,4297
0,9	0,7648	0,3398	3,5	0,5326	0,4153
1,0	0,7799	0,4383	3,6	0,5880	0,4923
1,1	0,7638	0,5365	3,7	0,5419	0,5750
1,2	0,7154	0,6234	3,8	0,4481	0,5656
1,3	0,6386	0,6863	3,9	0,4223	0,4752
1,4	0,5431	0,7135	4,0	0,4984	0,4205
1,5	0,4453	0,6975	4,1	0,5737	0,4758
1,6	0,3655	0,6383	4,2	0,5417	0,5632
1,7	0,3238	0,5492	4,3	0,4494	0,5540
1,8	0,3363	0,4509	4,4	0,4383	0,4623
1,9	0,3945	0,3734	4,5	0,5258	0,4342
2,0	0,4883	0,3434	4,6	0,5672	0,5162
2,1	0,5814	0,3743	4,7	0,4914	0,5669
2,2	0,6362	0,4556	4,8	0,4338	0,4968
2,3	0,6268	0,5545	4,9	0,5002	0,4351
2,4	0,5550	0,6107	5,0	0,5636	0,4992
2,5	0,4574	0,6192	∞	0,5000	0,5000

(*) Extrait abrégé des Tables calculées par M. Gilbert dans ses *Recherches analytiques sur la diffraction* (Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique, t. XXXI).

C'est avec les nombres consignés dans cette Table que la *fig. 4* a été construite en prenant pour abscisses et ordonnées les va-

Fig. 4.



leurs des deux intégrales définies et supposant égal à l'unité le facteur constant qui figure dans les valeurs (6); on a laissé subsister l'indication de la construction de chaque point, de sorte que l'arc de courbe présente une graduation qui n'est autre que la valeur ε de la limite à laquelle le point correspond. Cette graduation est formée par des arcs égaux en longueur, qui représentent comme l'échelle des axes coordonnés $\nu = 0, 1$. Grâce à cette disposition, on n'a plus à s'occuper de l'échelle de proportionnalité entre la courbe et l'onde; on discute les problèmes en prenant ν pour variable, et l'on repasse à la valeur de s lorsque d , r et δ sont donnés par la formule (5).

Remarque. — On n'a tracé que les premières spires et les points asymptotiques J , J' , qui correspondent à la limite $\varepsilon = \infty$; comme les deux intégrales convergent vers la même valeur $\frac{1}{2}$, ces points ont pour coordonnées $x = y = \pm 0,5$.

II. — Usage de la ligne représentative pour la discussion des phénomènes usuels de la diffraction.

L'avantage que présente cette ligne est de peindre, en quelque sorte, aux yeux le résultat de calculs assez complexes et de remplacer complètement la Table numérique à l'aide de laquelle elle a été construite. En effet, on obtient à la fois l'amplitude et la phase résultante des mouvements transmis par une portion de l'onde en joignant les extrémités de la portion correspondante de la ligne représentative; l'usage de cette ligne devient extrêmement facile lorsqu'on s'est exercé à reconnaître quels sont les arcs qui correspondent aux portions efficaces de l'onde. La règle à appliquer est très-simple: elle ressort des conditions mêmes des problèmes, qu'on peut poser ainsi.

On donne une onde cylindrique $T T' M'$ à base circulaire (*fig. 6*), dont une portion seule TT' est efficace (on ne suppose qu'une seule

Fig. 5.

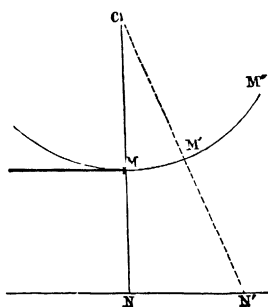
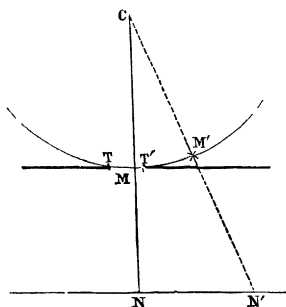


Fig. 6.



portion efficace pour simplifier le raisonnement); on se propose de déterminer, en chaque point d'un tableau NN' parallèle aux génératrices du cylindre, l'intensité de la lumière qui y parvient.

Soit N' le point désigné du tableau: joignons CN' ; cette droite coupe l'onde en M' , qui est le pôle correspondant au point N' . Le point M' est, dans tous les cas, représenté par le centre μ de la double spirale; aussi est-il commode de considérer le déplacement relatif de la portion TT' par rapport à M' et d'imaginer que, pour

les différents points N' , ce sont les points correspondants τ, τ' de la ligne représentative qui se déplacent par rapport à l'origine μ .

La règle est donc celle-ci : on détermine les valeurs des arcs de l'onde s_0 et s'_0 , et par suite de ν_0 et ν'_0 (5), qui définissent les points τ_0, τ'_0 limitant la portion efficace de l'onde rapportée au pôle M, c'est-à-dire à la perpendiculaire CN abaissée sur l'écran : puis on déplace les points τ_0, τ'_0 par rapport à l'origine μ de la ligne représentative d'une même longueur d'arc. Le déplacement commun ν représente l'arc MM'; d'où l'on conclut, d'après les triangles semblables CMM', CNN', en posant $NN' = x$ et $MM' = s$:

$$(7) \quad \frac{s}{x} = \frac{r}{r+d}, \quad \text{d'où} \quad x = s \frac{r+d}{r} = \nu \sqrt{\frac{(r+d)\lambda d}{2r}},$$

en ayant égard à l'équation (5). Cette équation (7) permet de calculer x en fonction du déplacement ν , ou réciproquement. La distance des deux points τ, τ' représente dans chaque cas la racine carrée de l'intensité.

Dans un prochain article, nous ferons des applications de cette méthode.
