JOURNAL DE PHYSIQUE

THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

SUR LES MESURES ÉLECTROSTATIQUES;

PAR M. A. CORNU.

La plupart des questions d'électrométrie, c'est-à-dire des problèmes concernant la mesure de l'agent électrique, sont corrélatifs des problèmes de calorimétrie. Comme dans l'étude de la chaleur, on a à considérer l'agent électrique sous un double aspect, la *quantité* et la *qualité*. La quantité d'électricité, comme la quantité de chaleur, se définit aisément; la qualité de l'électricité (on ne parle pas ici du signe conventionnel ou de l'apparence binaire de cet agent) n'est pas au premier abord aussi facile à définir que la qualité de la chaleur ⁽¹⁾, c'est-à-dire la température. La raison de cette différence est aisée à comprendre. Dans notre organisation, nous avons un sens, le toucher, qui nous a révélé la notion de qualité de la chaleur, la température, et nous a conduit à l'invention du thermomètre, instrument qui la mesure jusqu'à un certain point, sans qu'on ait besoin d'en connaître l'essence. Dans l'étude pour ainsi dire organoleptique de l'électricité, le sens correspondant manque à notre organisme; c'est la considération attentive des phénomènes, aidée surtout de l'analyse mathématique, qui a fait découvrir la propriété correspondant à la température : on l'appel-

(¹) Ce mot de *qualité* de la chaleur est quelquefois usité dans le sens de thermochrose : ce n'est point dans ce sens qu'il est employé ici.

lerait volontiers la *température électrique*, si les géomètres ne l'avaient pas définie par un nom spécial, le *potentiel*.

Le but du présent travail est d'exposer, sous une forme facilement intelligible aux physiciens expérimentateurs, les résultats du calcul relatifs aux propriétés les plus simples du potentiel électrique; on verra la nécessité d'introduire cette notion dans la pratique expérimentale, et spécialement dans le langage ordinaire de la physique, et l'on reconnaîtra que, faute de l'avoir introduite dès le début, on laisse subsister, dans les ouvrages qui traitent d'électricité, des complications inutiles et même des erreurs.

L'exposé rapide des procédés de mesures paraît le cadre le plus convenable pour préciser les principes fondamentaux de l'électricité et bien faire comprendre l'enchaînement des idées qui ont amené à la notion que nous avons en vue. Cet exposé est divisé en deux parties : la première comprend l'étude rapide de l'électricité au point de vue de la *quantité*; la seconde, au point de vue de la *qualité*, c'est-à-dire de son potentiel.

I. — QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ.

Mesure des quantités d'électricité. — On parvient assez aisément à produire des quantités égales d'électricité, comme des quantités égales de chaleur, indépendamment de toute connaissance, non-seulement sur la nature de l'agent électrique, mais même de toute loi empirique concernant sa distribution, en s'appuyant sur la répétition d'un phénomène identique continu ou discontinu. Ainsi, en tournant uniformément le plateau d'une machine électrique, on produit des quantités d'électricité égales dans des temps égaux, de même qu'on produit des quantités égales de chaleur, en faisant brûler un jet de gaz combustible réglé pour un écoulement constant.

On est habitué à répéter, d'après d'anciennes formules scolastiques, que, lorsqu'on parvient à constater l'égalité de deux parties d'une certaine *grandeur*, on peut *mesurer* cette grandeur. Ce prétendu axiome, visiblement fondé sur la considération des quantités géométriques, est ici complètement en défaut, et met en évidence l'une des difficultés qu'a dû rencontrer Coulomb, lorsqu'il posa les bases de l'électrométrie.

En effet, il ne suffit pas de constater l'égalité de deux parties

d'une même grandeur pour en concevoir la mesure, il faut aussi connaître les lois de l'addition et de la soustraction de deux parties de cette grandeur, afin de pouvoir composer à volonté un multiple ou un sous-multiple de l'unité choisie. Cette seconde condition ne se trouve justement pas remplie par l'agent électrique ; ainsi, quoiqu'on puisse produire, par exemple avec l'électrophore, autant d'unités d'électricité que l'on veut, il est complètement inexact de supposer qu'en faisant jaillir du plateau une série d'étincelles sur un même conducteur, on accumule sur lui des quantités d'électricité proportionnelles au nombre des étincelles.

Ainsi, faute de connaître la loi de partage de l'électricité entre deux conducteurs quelconques, on se trouve arrêté dès le début pour la mesure des quantités d'électricité, malgré la possibilité de produire une série indéfinie de quantités identiques.

La loi élémentaire, découverte par Coulomb, résout complètement le problème de la mesure des quantités d'électricité (ou, comme on le dit également, des *masses électriques*), non-seulement en valeur relative, mais même en fonction d'unités absolues, c'est-à-dire ne dépendant que des unités mécaniques de force, de longueur et de temps.

En effet, au lieu de choisir arbitrairement comme unité la quantité d'électricité produite par un appareil donné, on prend la quantité qui, concentrée en un point, repousse une quantité identique placée à l'unité de distance avec une force égale à l'unité. Deux masses quelconques d'électricité m, m' , concentrées respectivement en deux points situés à la distance r , exercent, suivant la loi de Coulomb, une action réciproque représentée par la formule

$$F = k \frac{mm'}{r^2}.$$

Il est évident qu'avec l'unité choisie, on doit supposer $k = 1$, afin que F devienne égal à 1 pour $m = m'$ et $r = 1$.

La balance de Coulomb réalise pratiquement, avec une grande exactitude, la définition théorique de la mesure d'une masse électrique. Les deux boules égales en diamètres, l'une fixe, l'autre mobile attachée à l'extrémité du levier suspendu au fil de torsion, se partagent par moitié la quantité d'électricité apportée à la boule fixe par le plan d'épreuve : souvent même il est préférable de faire fonctionner cette boule fixe comme plan d'épreuve. La force ré-

pulsive est déterminée en valeur absolue, d'après l'angle de torsion et la grandeur du couple de torsion du fil; elle représente la valeur de $\frac{1}{4} \frac{m^2}{p^2}$: connaissant r , on en déduit $m = 2r\sqrt{F}$, laquelle se trouve naturellement exprimée en unités absolues ⁽¹⁾.

(¹) *Exemple numérique.* — Une balance de Coulomb, formée par un levier de 10 centimètres de longueur depuis le centre de la boule jusqu'au fil de torsion (fil de laiton doré de 0^{mm},05 de diamètre environ, 42 centimètres de longueur), a donné, pour la répulsion mutuelle des deux boules égales, une force mesurée par un angle total de torsion égal à $\tau + \delta = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$; le levier étant dévié de $30^\circ = \delta$, on demande quelle est la quantité d'électricité répartie sur les deux boules, exprimée en unités absolues.

Pour déterminer la grandeur du couple de torsion C du fil, on a enlevé le levier et on l'a remplacé par un gros fil de cuivre (1^{mm},5 de diamètre environ) de 12 centimètres de longueur, pesant 28^g,65, suspendu en son milieu: le temps d'une oscillation simple déduit du temps de dix oscillations doubles valait 5^s,53. De la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{C}},$$

et de la suivante, qui donne le moment d'inertie d'un fil de longueur l et de poids p ,

$$\Sigma mr^2 = \frac{pl^3}{12g},$$

on déduit

$$C = \frac{\pi^2}{g} \frac{pl^3}{12t^2}.$$

Prenant le centimètre, le gramme et la seconde pour unités de longueur, de force et de temps,

$$C = \frac{3,1416^2}{980,88} \times \frac{2,65 \times 12^3}{12 \cdot (5,53)^2} = 0,010423.$$

Ce qui veut dire que, pour tordre le fil d'un angle égal à l'unité (57° 17' 41"), il faudrait employer un couple dont le moment serait 0,010423, la force étant exprimée en grammes et le bras de levier en centimètres.

D'autre part, on a

$$m = 2r\sqrt{F};$$

en y substituant les valeurs

$$r = 2a \sin \frac{1}{2} \delta, \quad F = \frac{aC(\tau + \delta)}{\cos \frac{1}{2} \delta},$$

où $\delta = 30^\circ$ représente la déviation du levier de longueur a (= 10 centimètres), τ la torsion au micromètre supérieur (= 45°), et multipliant par le facteur $\frac{\pi}{180}$ pour réduire les degrés ($\tau + \delta = 75^\circ$) en parties du rayon

$$m^2 = \frac{4\pi a^3}{45} C(\tau + \delta) \tan \frac{\delta}{2} \sin \frac{\delta}{2},$$

$$m^2 = 15,140 \quad \text{d'où} \quad m = 3,891.$$

En prenant le milligramme et le millimètre pour unités (unités de Gauss et Weber), on aurait

$$m'^2 = m^2 \times 100 \times 1000 = 1514000, \quad \text{d'où} \quad m' = m \cdot 100 \sqrt{10} = 1230,5.$$

Dans ce qui précède, la mesure d'une quantité d'électricité n'a été indiquée que pour des conducteurs de dimensions assez petites pour qu'on puisse les confondre avec leur centre de figure.

Le problème plus général consiste à déterminer la quantité totale d'électricité qui se trouve répartie sur un conducteur donné, sans aucune restriction de forme ni de dimensions.

La méthode du *plan d'épreuve* de Coulomb en donne théoriquement la solution complète : en effet, le petit disque métallique qu'on amène en coïncidence avec la surface du corps électrisé se recouvre sur sa face externe d'une quantité d'électricité égale à celle qui se trouve à la place qu'il occupe ; or comme la distribution exclusivement superficielle de l'électricité est démontrée aussi bien par l'expérience que par la théorie, comme conséquence de la loi de Coulomb, on peut donc à l'aide de la balance ⁽¹⁾ déterminer sur chaque centimètre carré la quantité d'électricité qui s'y trouve : en faisant la somme de toutes ces masses, on peut théoriquement exprimer en unités absolues la masse totale d'électricité répartie sur tout le conducteur.

Nous n'entrerons bien entendu dans aucun des détails expérimentaux qui sont certainement connus du lecteur ; mais il est nécessaire de bien préciser les définitions relatives à la distribution de l'électricité.

Dans le cas d'une sphère électrisée soustraite à toute influence extérieure, le plan d'épreuve accuse une distribution uniforme ; la condition de symétrie l'exige en effet. Mais sur un conducteur de forme différente, par exemple sur un ellipsoïde, les indications de la balance montrent que sur chaque centimètre carré de surface ne se trouve pas la même quantité d'électricité ; Coulomb exprime ce fait en disant que la *densité électrique* est variable : elle a pour mesure en unités absolues le quotient de la quantité d'électricité par la surface sur laquelle elle est répartie : le mot *charge électrique* en un point (c'est-à-dire sur un élément de surface) est souvent usité dans le même sens.

Poisson emploie une expression figurative équivalente : il suppose que l'électricité forme à la surface des conducteurs une couche de

(1) Pour faire des mesures absolues, il est nécessaire de substituer à la boule mobile un petit disque de mêmes dimensions que le plan d'épreuve qui remplace la boule fixe, afin que l'électricité se partage en deux masses égales.

densité constante, mais d'*épaisseur variable*. La masse électrique sur une surface donnée est évidemment proportionnelle à son épaisseur; il en résulte que la *densité électrique* de Coulomb et l'*épaisseur électrique* de Poisson ont des expressions numériques proportionnelles.

La dénomination adoptée par Poisson, liée moins directement aux unités absolues, a l'avantage de représenter aux yeux la distribution électrique : ainsi, dans le cas de l'ellipsoïde, la couche électrique est théoriquement définie par l'intervalle compris entre l'ellipsoïde et un ellipsoïde semblable concentrique et infiniment voisin. Il n'est pas difficile d'en conclure géométriquement que l'épaisseur ou la densité électrique en chaque point de l'ellipsoïde est mesurée par la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en ce point.

La quantité totale d'électricité s'obtient aisément d'après la définition figurative de l'épaisseur électrique : elle est égale à la différence des volumes des deux ellipsoïdes semblables qui limitent la couche $\frac{4}{3} \pi abc [(1 + \varepsilon)^3 - 1]$ multipliée par la densité constante ρ_0 de l'électricité; comme ε est très-petit ($1 + \varepsilon$ est le rapport de similitude des deux ellipsoïdes),

$$Q = 4\pi abc \varepsilon \rho_0.$$

Pour passer de là aux unités absolues, il suffit d'obtenir l'expression du facteur $\varepsilon \rho_0$: pour cela, on mesurera avec un plan d'épreuve de surface ω la quantité q d'électricité sur le sommet à l'extrémité de l'axe a : elle sera $q = a\omega : \varepsilon \rho_0$; d'où l'on conclura Q .

Partage de l'électricité. — Dans le cas des sphères, on peut aisément déterminer par expérience, ainsi que Coulomb l'a fait, la loi de partage entre deux sphères de rayon différent : problème important, car dans tous les cas où les mesures absolues sont nécessaires, on a recours à ces conducteurs pour éviter des complications inutiles.

Poisson ⁽¹⁾ est parvenu à retrouver par le calcul les résultats expérimentaux de Coulomb, à savoir que l'épaisseur de la couche électrique (ou la densité) est toujours plus grande sur la plus petite des deux sphères et qu'elle augmente à mesure que le rayon dimi-

(¹) *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques de l'Institut*, t. XII, année 1811.

nue ; la valeur relative de cette épaisseur tend vers une limite qu'elle atteindrait si le rayon devenait infiniment petit, en sorte qu'elle devient sensiblement constante pour des sphères de rayon très-petit et indépendante de la grandeur du rayon.

De l'épaisseur, c'est-à-dire de la densité électrique, on passe à la quantité totale en multipliant par la surface ; le résultat précédent s'énonce, sous une autre forme, en disant que le partage d'une même quantité d'électricité entre deux sphères ne s'effectue pas proportionnellement à leurs surfaces, la surface de la petite sphère entrant dans le partage comme multipliée par un facteur d'autant plus grand que l'unité que son rayon est plus petit, et croissant jusqu'à la limite 1,6449 (théoriquement $\frac{\pi^2}{6}$) quand le rayon devient nul. Ce facteur numérique représente évidemment le rapport des densités.

Le tableau suivant est emprunté à un Mémoire de Plana ⁽¹⁾, dans lequel l'auteur a développé et simplifié sous quelques rapports les calculs de Poisson.

RAPPORT DES RAYONS des sphères.	RAPPORT DES DENSITÉS électriques.
1	1,00000
$\frac{1}{2}$	1,16017
$\frac{1}{3}$	1,25421
$\frac{1}{4}$	1,31702
$\frac{1}{5}$	1,35906
$\frac{1}{10}$	1,47666
$\frac{1}{20}$	1,55008
0	1,64493

Voici un exemple de l'utilité de ces conducteurs sphériques, emprunté au travail de Weber et Kohlrausch sur la comparaison des quantités de l'électricité statique et dynamique. Il s'agit d'obtenir la mesure absolue de la quantité d'électricité répartie sur l'arma-

(1) *Mémoires de l'Académie de Turin*, année 1845.

ture externe d'une bouteille de Leyde de forme quelconque, dont l'armature externe est en communication avec le sol : l'opération se divise en deux.

1° On met une sphère conductrice de grand diamètre en communication avec l'armature interne qui, au début, contient une quantité q_0 . On l'éloigne : il reste sur l'armature une quantité q_1 ; on mesure à la balance de Coulomb la quantité d'électricité qu'enlève à la sphère une petite boule servant de plan d'épreuve ; le rapport des diamètres déterminant le rapport des densités électriques, on en conclut la quantité d'électricité $q_0 - q_1$, exprimée en unités absolues, répartie sur la grande sphère.

2° On cherche le *rapport* des quantités d'électricité q_0 et q_1 de la bouteille de Leyde avant et après le contact avec la grande sphère. Weber et Kohlrausch se servaient d'un électromètre particulier, mais il est évident que le plan d'épreuve peut donner le même résultat ; soit m ce rapport. Connaissant le rapport $\frac{q_0}{q_1} = m$ de ces quantités et leur différence $q_0 - q_1 = n$, en unités absolues, on en conclut $q_0 = \frac{mn}{m-1}$ et $q_1 = \frac{n}{m-1}$ également en unités absolues.

On a choisi à dessein le cas d'un condensateur comme étant le plus complexe en apparence : il est évident que la méthode précédente s'appliquerait à toutes les formes de conducteurs ; la seule difficulté qui subsiste peut-être dans l'esprit du lecteur, c'est la validité de la méthode du plan d'épreuve pour la détermination du rapport de deux charges d'un conducteur de forme quelconque. Or Coulomb a démontré, et c'est un véritable principe expérimental, que *le rapport des densités électriques en deux points d'un conducteur quelconque* est indépendant de la charge totale ; de sorte que c'est la loi de répartition relative, caractéristique de la forme du conducteur, qui est l'élément important et non pas la charge totale. On en conclut, par un raisonnement très-simple, qu'en chaque point *la densité électrique est proportionnelle à la quantité totale répartie sur toute la surface* ; il en résulte qu'en touchant avec un plan d'épreuve un point déterminé d'un conducteur quelconque, on enlève une quantité d'électricité proportionnelle à la charge totale. Nous allons en faire une application au cas indiqué précédemment de la charge d'un conducteur à l'aide de l'électrophore.

Supposons qu'on touche avec le plateau de l'électrophore un conducteur de forme quelconque, de façon à partager sa charge électrique avec lui. On répète cette opération plusieurs fois, de telle manière que la position relative des deux conducteurs soit toujours la même au moment de leur séparation; on les éloigne à une distance telle qu'ils ne puissent plus réagir l'un sur l'autre. On demande quelle quantité d'électricité possèdera le conducteur, après n contacts du plateau qui apporte chaque fois une même quantité q d'électricité.

Soient $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ les quantités totales d'électricité réparties sur l'ensemble du conducteur et du plateau au moment du 1^{er}, du 2^e, ..., du $n^{\text{ième}}$ contact. La distribution relative étant toujours la même, on peut affirmer, sans connaître cette distribution, que la charge Q_n , quelle qu'elle soit, se partagera dans un rapport constant entre le conducteur et le plateau, le conducteur retenant $Q_n \alpha$, le plateau $Q_n (1 - \alpha)$; or le plateau, revenant toujours avec la même charge, ajoutera toujours la même quantité q à celle du conducteur, de telle sorte qu'on aura

$$\begin{aligned} Q_1 &= q, \\ Q_2 &= Q_1 \alpha + q = q (1 + \alpha), \\ Q_3 &= Q_2 \alpha + q = q (1 + \alpha + \alpha^2), \\ &\dots\dots\dots, \\ Q_n &= Q_{n-1} \alpha + q = q (1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1}). \end{aligned}$$

Après le $n^{\text{ième}}$ contact, le conducteur retient la quantité $Q_n \alpha$; donc la charge du conducteur croît comme la somme des termes d'une progression géométrique décroissante

$$q(\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n),$$

et la masse électrique tend évidemment vers la limite

$$\frac{q\alpha}{1-\alpha}.$$

Si le conducteur atteint cette charge, le plateau de l'électrophore ne lui cèdera plus rien. En effet, il apporte la quantité q , de sorte que la masse à partager est

$$\frac{q\alpha}{1-\alpha} + q = \frac{q}{1-\alpha};$$

le conducteur en retient la fraction α , c'est-à-dire $\frac{q\alpha}{1-\alpha}$, de sorte que le plateau remporte sa charge sans avoir rien cédé.

Insuffisance des notions précédentes. — Les considérations précédentes constituent, dans les traités les plus répandus, toute la théorie élémentaire de l'électricité; aussi l'exposé des méthodes de mesure relatives à la quantité et à la distribution laisse-t-il croire que ces deux éléments sont seuls utiles à considérer comme renfermant tout le reste. Quelques exemples bien simples vont montrer que les notions de quantité et de distribution sont insuffisantes pour rendre compte d'un très-grand nombre de phénomènes.

1° Imaginons une sphère électrisée d'un grand diamètre (par exemple 40 centimètres); on prend comme plan d'épreuve une petite boule (de 1 centimètre de diamètre), avec laquelle on touche la sphère et qu'on porte dans la balance de torsion. Supposons, pour simplifier, que la quantité d'électricité apportée par la boule d'épreuve soit juste égale à une unité absolue; on en déduira la quantité totale Q , répartie sur la grande sphère, en la multipliant par le carré du rapport des rayons divisé par le coefficient limite 1, 6449; d'où $Q = \frac{1}{1,6449} \frac{R^2}{r^2}$ (ici environ 1000 unités).

On peut opérer d'une autre manière : la sphère ayant la même charge que précédemment, c'est-à-dire 1000 unités, on fixe la boule d'épreuve dans la balance et on la met un instant en communication par un fil conducteur avec la grande sphère placée assez loin pour ne pas réagir par influence. On a soin, par une torsion convenable, d'empêcher la boule suspendue de toucher la boule fixe pendant la communication; on enlève le fil conducteur et l'on ramène la boule mobile qui est repoussée, et témoigne que la quantité d'électricité est toute différente : au lieu d'une unité, la balance accuse environ 25 (théoriquement $\frac{1}{1,6449} \frac{R}{r}$).

Ainsi, suivant le mode de charge de la boule fixe, par contact direct ou par communication lointaine, on a des résultats complètement différents.

2° Au lieu d'une sphère électrisée, prenons un ellipsoïde, sur lequel le plan d'épreuve constate des densités variables suivant le point touché; le même plan d'épreuve, maintenu fixe dans la ba-

lance et mis par un fil en communication à grande distance avec l'ellipsoïde, donne un angle de torsion constant et indépendant du point de la surface touché par le fil conducteur : tout se passe comme si la distribution sur l'ellipsoïde était uniforme.

Qu'est-ce donc qui détermine le passage de l'électricité? Est-ce la quantité totale répartie sur le conducteur? Est-ce la densité?

Ces deux exemples montrent que ce n'est ni l'une ni l'autre exclusivement : car, dans le premier cas, la charge électrique et la densité restaient les mêmes, la distance seule des conducteurs variait ; dans le cas de l'ellipsoïde, la densité était variable d'un point à l'autre, et pourtant la quantité d'électricité transmise à la balance par communication lointaine restait la même, quel que fût le point touché.

La loi de partage ne dépend donc pas seulement de la valeur des masses électriques, mais aussi de leurs distances mutuelles : on voit ainsi clairement la nécessité d'introduire un élément nouveau, fonction à la fois des quantités et des distances. Cette notion nouvelle, corrélatrice de la notion de température, qui joue le rôle principal dans le partage des masses électriques, est celle qu'on va maintenant définir et étudier sous le nom de *potentiel électrique* des conducteurs.

(*A suivre.*)