raient. On énumère les faits que cette théorie interprète aisément, absence de viscosité, effet thermomécanique, et surtout la vitesse limite d'écoulement des films de Rollin.

Abstract. — We give an interpretation of London's theory. The superfluid should be formed of unlocalized helium atoms, with the same wave functions. Facts which this theory can explain easily are listed: Absence of viscosity, thermomechanical effect, and, especially, the critical speed of Rollin films.

Des diverses interprétations des phénomènes de superfluidité, aucune ne nous paraît satisfaisante. Les unes, basées sur les idées de M. Landau et le concept de roton (rotation quantifiée d'un ensemble d'atomes d'hélium II) conviennent au voisinage du zéro absolu, mais ne rendent pas compte des phénomènes de la transition λ (à 2°18 absolu, sous la pression atmosphérique), les autres basées sur les idées de M. London, qui assimilent l'hélium II à un gaz de Bose-Einstein, cherchent à expliquer la transition λ et les phénomènes au voisinage de 2°18, mais conviennent mal aux très basses températures, voisines de 0°.

I. Idée fondamentale de M. London. — La superfluidité n'existe pas pour l'isotope ^3He qui est un fermion. Donc, ces propriétés sont liées aux caractères du boson. Écrivons la loi de distribution statistique de N bosons, à la température T ($\beta = 1/kT$) sur des niveaux d'énergie ε_i , g_i étant la multiplicité de chaque niveau.

$$N = \sum N_i = \sum_i \frac{g_i}{e^{\beta\varepsilon_i + \alpha}}. \quad (1)$$

α est une constante que l'équation (1) doit permettre de déterminer. Elle doit être positive, sinon certains des N_i seraient négatifs (pour $\varepsilon_i < -\alpha/\beta$), et est proportionnelle au potentiel de Gibbs.

Si l'on considère des particules sans spin, de masse M , dans un volume V on admet en général :

$$\varepsilon_p = p^2/2M \quad g(p) dp = 4\pi(V/h^3) p^2 dp.$$

p étant la quantité de mouvement. En remplaçant la somme de (1) par une intégrale :

$$N = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\alpha + \beta p^2/2M} - 1} = \frac{V}{h^3} (2\pi M k T)^{3/2} F(\alpha), \quad (2)$$

avec

$$F(\alpha) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \frac{Z^{1/2} dZ}{e^{\alpha + Z} - 1},$$

pour $\alpha = 0$, $F = 2,612$ et décroît pour $\alpha > 0$.

Pour

$$T < T_0, \quad T_0 = \left(\frac{N}{2,612 V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi M K} = 3^{\circ},13.$$

SUR LA THÉORIE DE L'ÉTAT SUPERFLUIDE

Par M. Jacques WINTER,

Examinateur à l'École Polytechnique,

Résumé. — On expose une interprétation de la théorie de London : Le superfluide serait constitué d'atomes d'hélium délocalisés dont les fonctions d'ondes coïncide-

l'équation (2) ne permet plus de calculer α . Mais, bien évidemment (1) doit toujours avoir une racine en α , avec valeurs positives des N_i . En effet, le remplacement de la somme par l'intégrale, pour de très petites valeurs de T , explique cette contradiction. M. London a séparé un terme, le premier de la somme et a discuté l'équation ainsi obtenue. Il a cru mettre en évidence une discontinuité dans les dérivées des fonctions thermodynamiques par rapport à la température

au point $T = T_0$, et a vu là, l'origine du point λ , passage à la superfluidité. C'était une erreur. L'équation (1) n'introduit aucune discontinuité et c'est au croisement de 2 expressions approchées de la fonction N qu'on a cru voir une discontinuité.

Telle qu'elle était exposée dans son mémoire de la *Physical Review*, de 1938 (t. 54, p. 747) cette théorie était erronée, mais la nature de fermion de l'hélium intervient certainement. L'explication du point λ en assimilant l'hélium II à un solide paraît vraiment paradoxale et nous avons cherché à réexprimer autrement la théorie de M. London.

II. Nouvelle expression de cette théorie. — Est-il possible de prendre littéralement l'expression « gaz de Bose-Einstein » ? Autrement dit, est-il possible de considérer l'Hélium II comme un ensemble d'atomes délocalisés ou étalés dans l'espace, comme ceux d'un gaz dans l'interprétation de la mécanique quantique ? Ou devons-nous les considérer comme localisés, ce qui est le cas d'un liquide ?

Il est habituel de considérer l'hélium II comme un mélange de deux liquides de densités ρ_n (normal) et ρ_s (superfluide), en suivant les idées de M. Tisza. Mais on ne peut pas définir deux espèces différentes d'atomes d'hélium. On admet donc que les quanta d'excitation, de vibrations et rotations d'ensemble, se comportent comme des fluides et que ce sont les quanta de rotation (rotons) qui constituent le fluide normal. Mais il est difficile de comprendre ce qui arrive aux rotons à $T = 2,18^\circ$, ni pourquoi ils s'écartent des parois des tubes fins, tout en adhérant aux parois des disques en rotation.

Dans quelles conditions peut-on considérer l'hélium comme un gaz ? Si l'on veut calculer les ondes propres, associées aux atomes de He, par la mécanique quantique, il faut faire intervenir l'interaction coulombienne J des deux atomes ; elle donnera un potentiel répulsif important pour des distances $|R_1 - R_2| < 2$ Ångströms environ, R_1 et R_2 étant les rayons vecteurs des noyaux, en fonction desquelles s'exprimeront les ψ des deux atomes. Si cet espace de recouvrement est une fraction négligeable du volume total, l'énergie d'interaction :

$$\int \psi_1^* \psi_1 J \psi_2^* \psi_2 dV_1 dV_2 \Big/ \int \psi_1^* \psi_1 \psi_2^* \psi_2 dV_1 dV_2,$$

$$|R_1 - R_2| < 2 \text{ Å}$$

sera négligeable, mais s'il y a N atomes, il faudra combiner tous les atomes 2 à 2 et l'interaction ne sera négligeable que si le remplissage total du volume V est négligeable. Pour le cas de l'hélium II, sa densité est 0,14. Même en prenant un remplissage de l'ordre de 1/100, cela divisera l'énergie J par 10^4 , ce qui donnera des énergies de plusieurs centièmes d'électron-volts, par atome, en admettant que l'énergie de répulsion soit de l'ordre de quelques dizaines d'électron-volts (la répulsion des 2 électrons de l'hélium est de l'ordre de 4 à 5 électron-volts). Cette énergie de répulsion est beaucoup trop forte pour le but que nous recherchons. Il y a donc là une grosse objection à cette théorie, à laquelle nous répondons à la fin du paragraphe III.

Reprenons donc l'examen de notre exposé de 1958 ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ *Journal de Physique*, 1958, 19, 532.

III. — Modèle mathématique. — On suppose que l'atome d'hélium se déplace dans un potentiel périodique, dont on ne considérera pour simplifier qu'une dimension. Soit N le nombre de périodes. Ce champ périodique sera constitué par l'ensemble des autres atomes d'hélium dont il représentera l'interaction moyenne. Soit E_0 l'énergie de cet atome supposé renfermé, dans une seule période. E_0 sera une valeur propre du champ d'une seule cuvette de potentiel. Si U est la hauteur de la cuvette, l'atome aura une quantité de mouvement p donnée par :

$$p^2 = 2M(E - U).$$

(M , masse de l'atome). Si l'on juxtapose les N cuvettes, on cherche ce que devient la fonction propre et la valeur propre E_0 d'une seule cuvette. On suppose la quantité de mouvement très lentement variable dans le champ et pour les applications numériques, on remplace les cuvettes par un potentiel en créneau. Ce qui permet de remplacer $|p|$ par une valeur moyenne $p = \sqrt{2MH}$ (H , valeur moyenne de $E - U$).

FIG. 1.

Alors, le niveau E_0 est coupé en N niveaux voisins. Ceci correspond au fait général qu'à un domaine plus étendu (les domaines de propagation des ondes étant assimilés aux fonds de cuvette) correspondent plus de valeurs propres ; à la limite, pour de grands domaines, le nombre des niveaux étant proportionnels aux domaines. Les uns sont déplacés vers le haut et les autres vers le bas ; ils sont équidistants, et le niveau moyen n'est pas déplacé. Mais le niveau le plus bas est déplacé par rapport à E_0 d'une quantité

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 \bar{p}}{2Ml} e^{-\bar{p}l/\hbar}. \quad (3)$$

$\hbar = h/2\pi$, l , longueur d'une 1/2 période. Ce calcul est très grossier. L'adoption d'un potentiel rectiligne est rajoutée à la fin pour simplifier l'estimation des valeurs numériques.

Pour $H = 1/3200$ eV, $l = 2$ Å, on a

$$\Delta E = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ eV}.$$

Or, si l'on estime la valeur TS , S entropie de l'hélium au point λ que l'on peut mesurer expérimentalement, d'après les expériences de Kapitza, on trouve la même valeur. Il n'est donc pas absurde d'envisager la superfluidisation comme un changement d'état, entraînant une diminution d'énergie ΔE et une disparition d'entropie, les énergies libres $E - TS$ restant les mêmes au point λ . Comme la superfluidisation entraîne une légère dilatation, il eût été correct d'écrire :

$$\begin{aligned} TS &= E_n - E_s + P(V_n - V_s) \\ TS &= \Delta E - P\Delta V, \end{aligned} \quad (4)$$

(V_n , V_s volumes spécifiques)

P pression. Ceci suppose le volume d'ensemble variable et les pressions et températures données. Mais pour connaître ΔV , il faut connaître la proportion exacte de superfluide.

Tout ceci présente donc un caractère qualificatif et hypothétique et l'on voit, comme $\Delta E \sim 10^{-4}$ eV, qu'il faut que l'effet de la répulsion coulombienne des charges d'hélium, de l'ordre des dixièmes de eV, soit éliminé.

Supposons que l'étalement mette en cause un nombre d'atomes beaucoup plus grand que 1 000 et le phénomène n'a de sens que dans ce cas. Soit par exemple 10^8 . Le niveau énergétique fondamental localisé sera coupé, comme nous l'avons dit en 10^8 composantes, la moitié activée, la moitié rabaisée. Distribuons les atomes sur les 1 000 niveaux les plus stables. La répulsion des atomes, placés sur le même niveau, qui sera étalé dans tout le volume V , vaudra celle de 2 atomes dans une case du réseau semi-cristallin $\times (10^5)^2 / (10^8)^2$, pour tenir compte de toutes les attractions 2 à 2, et de l'étalement (au carré) du volume V . Elle sera, très inférieure à 10^{-3} eV (de l'ordre de 10^{-8} eV) et n'interviendra plus. Quant à l'interaction des atomes de niveaux différents, leurs ondes doivent être orthogonales, donc décalées dans l'espace; les répulsions qui sont dues aux recouvrements seront très diminuées et pourront être compensées par l'effet VAN DER WAALS, attractif, qui se produit pour des distances supérieures à 2 Å. Ces considérations sont très grossières, mais un calcul paraît impossible.

Quant à la stabilisation globale elle sera un peu réduite, mais comme les niveaux sont distribués d'une manière uniforme autour du niveau fondamental perturbé, elle ne sera réduite que de $2 \cdot 10^{-5}$ environ, c'est-à-dire d'une valeur négligeable. L'objection du recouvrement qui serait dirimante pour quelques centaines d'atomes, s'évanouit donc pour 10^7 ou 10^8 atomes. Cette distribution sur des solutions orthogonales les unes aux autres pourra redonner pour la densité globale une structure périodique, qui est effectivement observée. Le niveau fondamental seul donnant une structure uniforme.

On voit que la superfluidisation ne se produira que pour les bosons, les fermions devant se distribuer sur tous les niveaux provenant de la coupure de E_0 et la valeur moyenne de l'énergie restera inchangée. Il n'y aura donc plus d'effet d'énergie, tendant à la superfluidisation. On voit aussi que si P est assez grand, d'après (4), l'effet disparaîtra ce qui est conforme à l'expérience.

IV. Applications. — Il reste à montrer que cette théorie de l'étalement des ondes, dont les faiblesses ne nous échappent pas, rend compte des phénomènes paradoxaux de l'hélium II.

A. DISPARITION DE L'ENTROPIE DU SUPERFLUIDE. — Nous avons déjà utilisé ce fait dans le calcul du § III, écrivant S_n pour ΔS . Le remplacement d'un ensemble d'atomes localisés, par un ensemble délocalisé entraîne une grosse diminution d'entropie, à température suffisamment basse. La présence d'un seul phonon sur N atomes localisés, donne N niveaux

soit une entropie $K \log N$, et un seul niveau s'ils sont délocalisés. Cette question soulève une difficulté, signalée dans notre article cité.

B. DISPARITION DE LA VISCOSITÉ. — La viscosité sur les parois est due à une interaction des molécules de la paroi et des molécules du fluide. Si celles-ci sont délocalisées ou étalées, l'interaction est diminuée en proportion. De même, à l'intérieur d'une masse délocalisée, on ne peut plus définir d'attraction entre deux atomes voisins et, donc, plus de viscosité.

C. EFFET FONTAINE OU FORCE THERMIQUE. — Pourquoi l'atome superfluide est-il attiré vers les zones chaudes de l'hélium, ce qui caractérise l'effet thermomécannique ? Dans une expérience d'effet fontaine, considérons les atomes superfluides, qui passent du récipient froid au récipient chauffé. Une dépression doit exister du côté chauffé. Quelle est son origine ? Une attraction créée par les rotons, ou le rayonnement électromagnétique ? Une telle force n'est pas expliquée. Avec les hypothèses faites, un atome peut se relocaliser dans une zone chauffée, ce qui provoquera un déplacement comme dans toute transition quantique, et un vide au voisinage de la jonction des récipients, d'où une dépression. L'abondance des quantités d'énergie dans la zone chauffée provoquera les relocalisations.

D. FILMS SUPERFICIELS. — Pourquoi le superfluide vient-il se placer au voisinage des parois, ce qui crée tous les phénomènes dus aux films de Rollin ? Au voisinage d'une paroi fixe, les molécules fixes font régner un champ électrostatique qui limite le nombre des états propres possibles des atomes d'hélium. Donc l'entropie S_n à température donnée, décroît au voisinage des parois. Donc, la superfluidisation se produira plus facilement dans la couche limite puisque S_n est le terme qui l'empêche. Il y aura donc une couche de superfluide au voisinage des parois fixes, qui constituera les films de Rollin, et explique les expériences de passage par les ouvertures capillaires.

E. VITESSES LIMITES D'ÉCOULEMENT DES FILMS SUPERFICIELS. — Ces vitesses sont de l'ordre de 50 cm à 1 m seconde et sont trop faibles pour que les énergies cinétiques du courant puissent provoquer une relocalisation et une rupture du film d'hélium. Il s'agit là de l'effet le plus délicat à expliquer. Ce que nous avons dit à ce sujet (dernier paragraphe de notre article cité) doit être annulé : il faut porter son attention non pas sur le terme ΔE , mais sur le terme TS_n .

Quelle est la durée moyenne du séjour d'un atome d'hélium normal dans son volume du réseau liquide, dans sa case, dirons-nous ? Posons : (1)

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{h}{kT}}. \quad (5)$$

τ_0 est la durée obtenue en divisant par sa vitesse $\sqrt{kT/M} = v$, la largeur de la case, 2 Å environ.

$$v = \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 2,2}{3,34 \cdot 10^{-24}}} = 10^4.$$

1. Voir FRENKEL, *Introduction à la théorie des métaux* (p. 256, édition russe).

Donc

$$\tau_0 = 2 \cdot 10^{-12},$$

H hauteur de la barrière de potentiel limitant la case est prise égale à $1/3200$ eV = $5 \cdot 10^{-16}$ C. G. S. Mais il faut doubler ce chiffre car c'est la hauteur totale de la barrière qu'il faut prendre ici et non la valeur moyenne de $(p^2/2M)$. De plus, $kT \approx 2,8 \cdot 10^{-16}$.

On a donc : $\tau \sim 2 \cdot 10^{-12} \text{ e}^4 \sim 10^{-10} \text{ s}$.

Pour des vitesses relatives liquide-paroi de l'ordre de 50-100 cm/s, nous voyons qu'une molécule de la paroi traverse la largeur $2 \text{ \AA} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ dans un temps de l'ordre de $2 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.

Le champ électrostatique qui s'exercera sur un atome d'hélium localisé et qui le bloque, varie pendant un intervalle de temps de l'ordre de la durée de séjour moyen de l'atome dans son volume élémentaire, dans sa case. L'effet ordonnateur disparaît, S augmente et les atomes délocalisés se relocalisent, en vertu des lois de la mécanique statistique. *L'apparition et la disparition du film superfluide sont donc essentiellement des effets d'entropie et non d'énergie.*

V. Vérifications. — Est-il possible de vérifier cette théorie directement, autrement que par ses conséquences, décrites ci-dessus ?

a) Des expériences de *diffraction*, qui étudient directement la structure du liquide semblent être le moyen le plus indiqué. Mais la théorie délocalisée laisse subsister une structure du potentiel moyen ; ce point a été admis par nous, plus que démontré. Cette structure serait irrégulière comme celle d'un liquide et le moyen de faire une distinction paraît difficile, en l'état actuel de la théorie délocalisée.

b) L'existence du *mouvement brownien* semble être le meilleur critère. Si l'on peut immerger dans l'hélium des particules colloïdales aussi petites que possible, le mouvement brownien doit subir une décroissance subite au point λ , lorsque la température décroît et doit pratiquement disparaître dès qu'on s'est écarté de la température λ , dans la théorie délocalisée, puisque l'onde délocalisée enveloppe la particule et que les chocs, à la base du mouvement brownien n'ont plus de raison de se produire.

DISCUSSION

M. Chapouthier demande à M. Winter dans quelle mesure la théorie de l'hélium superfluide explique l'effet Prandtl de nullité de vitesse à la paroi pour les fluides courants : c'est un dogme classique en hydraulique que de dire qu'il n'y a pas de glissement d'un fluide en contact de l'obstacle, or, M. Winter a montré que, dans certains cas, il peut y en avoir.

M. Winter n'a vu aucun ouvrage donnant une théorie physique de l'effet Prandtl, mais il pense que le dogme est valable pour un fluide normal à atomes localisés : entre les atomes du liquide et ceux de la paroi, il est probable qu'il y a une attraction qui explique que le liquide reste en contact, c'est le blocage de la vitesse, qui est constaté expérimentalement pour un liquide et même pour un gaz (effet Prandtl autour d'une hélice d'avion).

Mais cet effet disparaît pour le superfluide parce que l'atome du superfluide est étalé sur 10^4 fois la largeur

de l'atome de la paroi. A partir du moment où l'atome se reconcentre et où il n'est plus superfluide, l'effet Prandtl reparaît et l'atome se bloque.

M. le Président ajoute que c'est simplement le choc sur les parois qui, pour les gaz, ramène les vitesses dans tous les sens. Pour les liquides, c'est plus mystérieux, car on n'a pas de moyen d'analyse précis.

M. le Président demande des explications sur les courbes de London et le livre de Sommerfeld.

M. Winter répond qu'il n'y a pas de courbes dans le livre de Sommerfeld, mais que la courbe de London se trouve dans le mémoire de celui-ci et qu'elle est reproduite dans une quinzaine de traités de physique théorique, aussi bien américains que soviétiques. Or, d'après M. Rideau, Maître de recherches au C. N. R. S., Américains et Soviétiques se seraient trouvés d'accord pour reconnaître l'inexactitude de cette courbe dans le cas d'un très grand domaine grâce à des calculs faits par machine électronique. Mais, au point de vue de M. Winter, l'allure de l'équation donnant la constante (α) correspond à une équation régulière et à une série rapidement convergente, et on ne voit pas très bien comment une discontinuité pourrait s'établir.

M. le Président rappelle que, d'après l'exposé de M. Winter, la paroi et ses aspérités peuvent avoir un effet sur la vitesse tangentielle et demande à M. Kramers s'il a connaissance d'expériences mettant en évidence des phénomènes de ce genre.

M. Kramers fait un signe négatif et indique qu'on n'est pas très sûr de l'existence de la vitesse limite.

M. Winter ajoute que seules des expériences de mouvements browniens permettraient de vérifier directement la théorie qu'il a exposée.

M. le Président rappelle que CARERI, en Italie, fait une série d'expériences intéressantes sur la diffusion des particules chargées dans l'hélium.

M. le Président remercie vivement M. Winter.