HAL
open science

Le filtrage mathématique dans la spectroscopie par transformation de fourier

J. Connes, V. Nozal

To cite this version:

J. Connes, V. Nozal. Le filtrage mathématique dans la spectroscopie par transformation de fourier. Journal de Physique et le Radium, 1961, 22 (6), pp.359-366. 10.1051/jphysrad:01961002206035900 . jpa-00236463

HAL Id: jpa-00236463

https://hal.science/jpa-00236463

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE FILTRAGE MATHÉMATIQUE DANS LA SPECTROSCOPIE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

Par J. CONNES (*) et V. NOZAL,
Laboratoire Aimé-Cotton, Bellevue.

Résumé. — On est conduit pour obtenir le rapport signal/bruit maximum dans le spectre calculé numériquement à partir d'un interférogramme à utiliser un nombre de points très supérieur au nombre d'éléments spectraux, d'où un temps de calcul très élevé. Dans la méthode du filtrage mathématique on calcule d'abord la convolution de l'interférogramme enregistré par la réponse percussionnelle du filtre idéal isolant les fréquences Fourier. Il suffit ensuite de faire la transformée de Fourier du nouvel interférogramme avec un nombre de points minimum d'où une réduction considérable du temps de calcul total.

Abstract. — In order to obtain the maximum signal to noise ratio when computing a spectrum from an interferogram, the number of points that have to be measured is much greater that the number of spectral elements; hence the computing time is excessive. With the method of " mathematical filtering " one first compute the convolution of the interferogram by the impulse response of an ideal filter isolating the wanted domain of Fourier frequencies. Then one computes the Fourier transform of the new interferogram with a smaller number of points ; the computing time is thus much reduced.

Une étude précédente de la méthode de spectroscopie par transformation de Fourier a montré dans quelles conditions le spectre pouvait être calculé en faisant la transformée de Fourier de l'interférogramme à partir de valeurs discrètes relevées sur cet interférogramme [1]. En l'absence de bruit, il suffit pour reconstituer le spectre de relever un nombre de points égal au nombre d'éléments spectraux à étudier. Mais on montre que pratiquement le spectre du bruit étant plus étendu que celui des fréquences de Fourier, pour obtenir un rapport signal/bruit dans le spectre calculé voisin du rapport signal/bruit maximum qu'on obtiendrait en calculant le spectre par une intégrale de Fourier, le nombre de points à utiliser est beaucoup plus grand. La durée et le prix de revient du calcul d'une transformée de Fourier étant proportionnels au nombre de points d'entrée sont augmentés d'autant. On a donc intérêt à limiter le spectre du bruit au domaine du spectre à étudier. Plusieurs méthodes d'enregistrement de l'interférogramme sont alors possibles pour obtenir ce résultat : emploi d'un filtre passe bande, méthode du changement de fréquence de Mertz [2]. Mais elles présentent toutes une certaine complication instrumentale. Par exemple, un filtre passe bande avec une bande passante centrée sur la valeur moyenne des fréquences à étudier est difficile à réaliser aux fréquences basses généralement utilisées.

La méthode de filtrage mathématique utilise l'interférogramme $I'(\delta)$ enregistré à travers un simple filtre passe bas. A partir de valeurs discrètes de $I'(\delta)$ on calcule un second interférogramme $I''(\delta)$ en effectuant la convolution de $I(\delta)$ par la réponse percussionnelle d'un filtre dont la bande passante coïncide avec le domaine des fréquences de Fourier à étudier. Il suffit de faire ensuite la transformée de Fourier de $I''(\delta)$ avec le nombre de points minimum pour obtenir dans le spectre un rapport signal/bruit maximum. Comme le temps de calcul du produit de composition est faible par rapport à celui de la transformée de Fourier, le temps de calcul est voisin du temps de calcul minimum.

(*) Adresse actuelle : Service de Calcul Numérique. Observatoire de Meudon.

I. Principe de la méthode. — Considérons un interférogramme $I'(\delta)$ enregistré à travers un simple filtre passe-bas. C'est la superposition de l'interférogramme $I(\delta)$ qu'on aurait en l'absence de bruit et d'un bruit $x(\delta)$ (*fig.* 1). Le spectre correspondant $B'p(\sigma)$ obtenu par calcul de l'intégrale de Fourier donc avec le rapport s/b maximum compatible avec le temps d'enregistrement T de l'interférogramme, est composé du spectre optique à étudier $Bp(\sigma)$ limité au domaine $\Delta\sigma_0$ compris entre

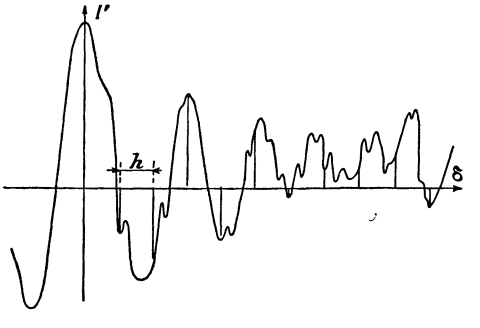

FIG. 1. — Interférogramme enregistré $I'(\delta)$.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01961002206035900

σ_1 et σ_2 auquel se superpose un bruit $X(\sigma)$ (*fig.* 2). La figure 3 indique la position relative du spectre

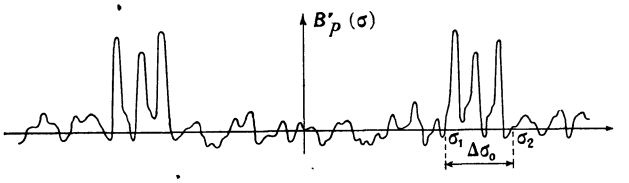

FIG. 2. — Spectre correspondant à $I'(\delta)$.

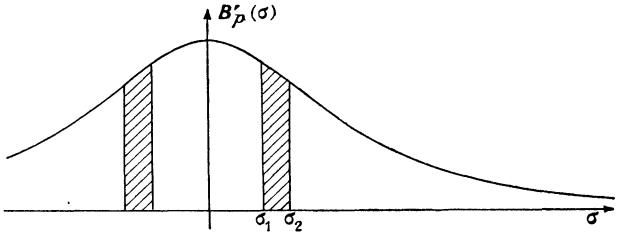

FIG. 3. — Position relative du spectre du bruit et du spectre optique.

optique $Bp(\sigma)$ et du spectre de puissance du bruit contenu dans $I'(\delta)$. Dans une transformée de Fourier numérique la fonction d'appareil est constituée d'une série de pics semblables distants de $1/h$ si h est la distance entre 2 points relevés sur l'interférogramme (*fig.* 1). Si on choisit h le plus grand possible pour reconstituer le spectre sans ambiguïté : $h = 1/2\Delta\sigma_0$ (1), un seul pic de la fonction d'appareil explore le spectre à étudier, mais plusieurs pics de la fonction d'appareil explorent le spectre du bruit, d'où une augmentation du bruit

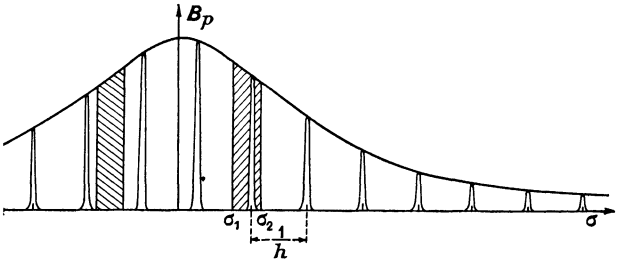

FIG. 4. — Fonction d'appareil explorant le spectre optique et le spectre du bruit.

dans le spectre calculé (*fig.* 4). Dans ce cas, avec apodisation (2), le nombre de points utilisés pour faire la transformée de Fourier est $n = 2M$, M étant le nombre d'éléments spectraux à étudier. Ce que nous nous proposons, c'est d'obtenir à partir de $I'(\delta)$ un interférogramme $I''(\delta)$ dont le spectre calculé par une intégrale de Fourier serait

$$B''p(\sigma) = B'p(\sigma) \,.\, G(\sigma) \quad (\textit{fig. } 5) \tag{1}$$

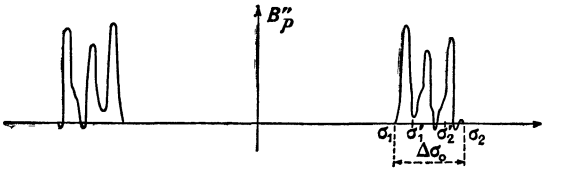

FIG. 5. — Transformée de Fourier de $I''(\delta)$.

$G(\sigma)$ étant une fonction créneau qui vaut 1 dans les domaines $\Delta\sigma_0$ symétriques par rapport à l'origine et est nulle ailleurs (*fig.* 6). Le bruit qu'il

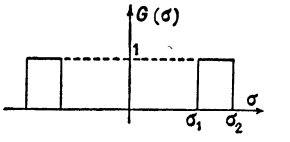

FIG. 6. — Filtre idéal.

contient est donc bien nul pour toutes les fréquences extérieures au domaine σ_1, σ_2. Si, momentanément, on ne s'intéresse qu'aux fréquences comprises entre σ_1 et σ_2, le gain du filtre qu'on choisira aura la forme représentée par la figure 7*a* et le

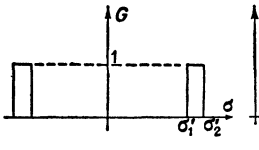

FIG. 7*a*

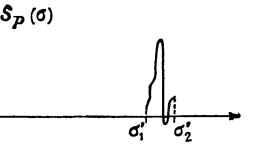

FIG. 7*b*.

spectre $Sp(\sigma)$ sera nul en dehors des fréquences σ'_1, σ'_2 (*fig.* 7*b*).

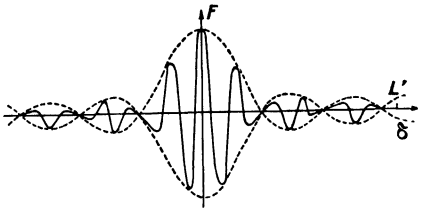

FIG. 8. — Réponse percussionnelle du filtre idéal.

Soit $F(\delta)$ la réponse percussionnelle du filtre dont la courbe de gain est $G(\sigma)$. C'est par définition la transformée de Fourier de $G(\sigma)$.

$$F(\delta) = \Delta\sigma \frac{\sin \pi\Delta\sigma\delta}{\pi\Delta\sigma\delta} \cos 2\pi\sigma_m \delta \tag{2}$$

$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ étant la fréquence moyenne du spectre à étudier (*fig.* 8).

(1) Pour choisir le pas h convenant à chaque cas, il faut tenir compte de la largeur du spectre optique et de sa position par rapport à l'origine. Si $\sigma_2 = k\Delta\sigma_0$, on a $h = 1/2\Delta\sigma_0$; dans les autres cas h est légèrement inférieur [1].

(2) La fonction d'appareil est une fonction en $\sin \alpha/\alpha$ qui présente des pieds qui peuvent être gênants. Pour l'apodiser il faut pondérer l'interférogramme par une fonction $A(\delta)$. Si c'est une fonction en triangle, pour obtenir la même résolution que sans apodisation, il faut employer un interférogramme 2 fois plus long et le nombre de points à relever est double.

De l'équation (1) on déduit immédiatement la relation intéressante entre $I''(\delta)$ et $I'(\delta)$.

$$I''(\delta) = I'(\delta)\, A(\delta) \ast F(\delta) \qquad (3)$$

$A(\delta)$ étant la fonction d'apodisation utilisée pour calculer $B'p(\sigma)$ à partir de $I'(\delta)$ (éventuellement égale à l'unité s il n'y a pas d'apodisation). Il suffit donc de faire la convolution de $I'(\delta)$ avec la réponse percussionnelle d'un filtre passe-bande centré sur le domaine à étudier pour obtenir un interférogramme dans lequel le spectre du bruit est nul en dehors des fréquences intéressantes.

Pratiquement pour calculer $I''(\delta)$ on utilise une réponse percussionnelle $F'(\delta)$ limitée à $\delta = L'$ soit

$$F'(\delta) = F(\delta).D(\delta) \qquad (4)$$

$D(\delta)$ étant une fonction créneau valant 1 pour $|\delta| < L'$ et 0 ailleurs.

Les courbes de gain G' des filtres pratiquement réalisés ont pour expression :

$G'(\sigma) = G(\sigma) \ast d(\sigma)$ avec $d(\sigma) = T[D(\delta)]$ (*fig.* 8*a* et 8*b*).

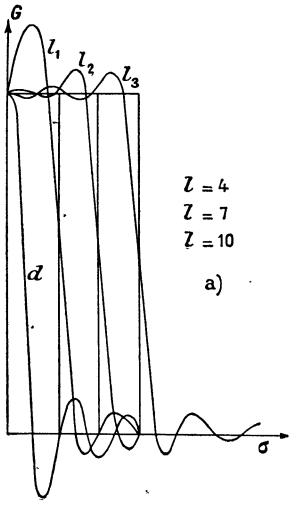

FIG. 8*a*. — Filtres non apodisés.

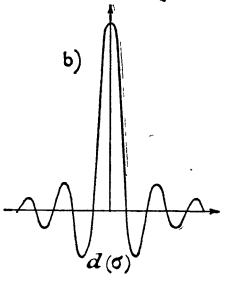

FIG. 8*b*. — $d(\sigma)$.

Elles présentent donc des oscillations (phénomènes de Gibbs) et s'éloignent d'autant plus des courbes théoriques que le quotient $l = \Delta\sigma_0 / 1/2L'$ est plus petit. Pour amortir ces oscillations, il faut pondérer la réponse percussionnelle $F'(\delta)$ par une fonction convenable, par exemple

$$A'(\delta) = [1 - (\delta / L')^2]^2.$$

Alors :

$G''(\sigma) = G(\sigma) \ast a(\sigma)$ avec $a(\sigma) = T[A'(\sigma)]$ (*fig.* 9*a* et 9*b*).

Pour les fréquences limites le filtre introduit une altération de l'amplitude. Si on appelle $\Delta\sigma$ la zone utilisable du filtre pour laquelle l'altération est, par

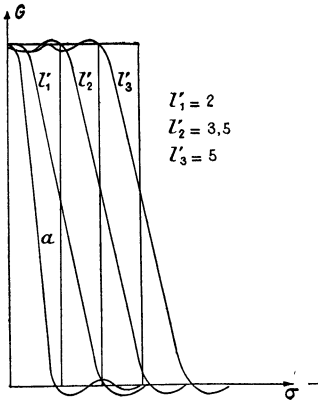

FIG. 9*a*. — Filtres apodisés.

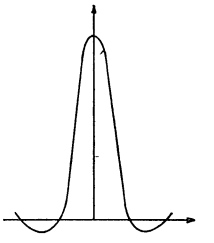

FIG. 9*b*. — $a(\sigma)$.

exemple, inférieure à 1/100 (*fig.* 10*a*), on peut définir un facteur de qualité du filtre par :

$$\varphi = \Delta\sigma / \Delta\sigma_0.$$

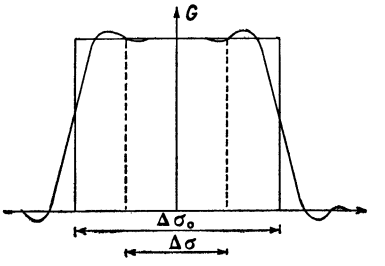

FIG. 10*a*.

Par exemple avec la fonction de pondération $A'(\delta)$ envisagée :

$$\varphi = \frac{L'\Delta\sigma_0 - 2,2}{L'\Delta\sigma_0} \quad (\textit{fig. } 10b).$$

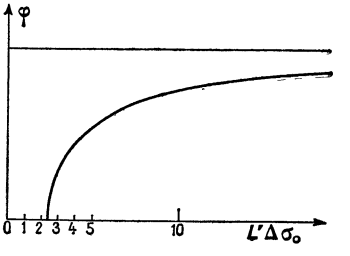

FIG. 10*b*.

II. **Réalisation.** — Pour réaliser avec un ordinateur la convolution :

$$I''(\delta) = I'(\delta).A(\delta) \ast F(\delta).A'(\delta) \qquad (5)$$

on ne peut utiliser que des valeurs discrètes de l'interférogramme et de la réponse percussionnelle.

Nous allons montrer que lorsqu'on fait avec des valeurs discrètes équidistantes la convolution de 2 fonctions à spectre limité on obtient bien des valeurs discrètes du produit de composition ; mais si les fonctions ont un spectre illimité, on ne peut obtenir par cette méthode que des valeurs approchées du produit de composition, l'approximation étant d'autant meilleure que le pas h' est choisi plus petit.

1° Convolution de 2 fonctions a spectre limité. — Soient 2 fonctions $E(\delta)$ et $K(\delta)$ ayant des spectres limités $e(\sigma)$ et $k(\sigma)$ comme l'indiquent les figures 11*a* et 11*b*. Leur convolution s'écrit :

$$P(\delta) = E(\delta) * K(\delta). \tag{6}$$

Comparons $P(\delta)$ et la convolution :

$$P'(\delta) = h'[E(\delta).R_{h'}(\delta) * K(\delta).R_{h'}(\delta)] \tag{7}$$

$R_{h'}(\delta)$ étant une distribution de Dirac à support périodique de pas h'. La transformée de Fourier de ce produit de composition s'écrit :

$$p'(\sigma) = \frac{1}{h'}[e(\sigma) * R_{1/h'}(\sigma)].[k(\sigma) * R_{1/h'}(\sigma)]$$

(*fig.* 11*c*, 11*d*, 11*e*).

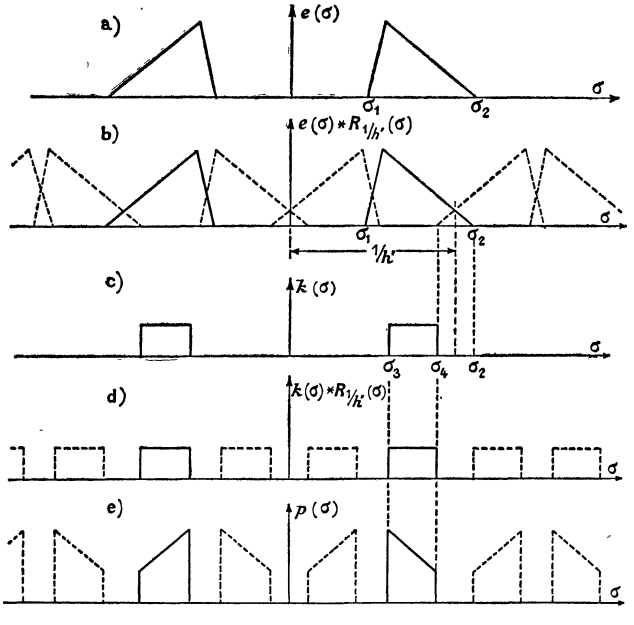

Fig. 11*a*, 11*b*, 11*c*, 11*d*, 11*e*.

C'est une fonction périodique de pas h'. Supposons que h' ait été choisi de telle sorte que les zones qui se recouvrent de la fonction

$$e(\sigma) * R_1/h'(\sigma)$$

ne pénètrent pas dans le domaine occupé par $k(\sigma) * R_1/h'(\sigma)$, ce qui correspond dans notre cas à : $1/h' = (\sigma_2 - \sigma_4)/2$. On voit immédiatement que dans ce cas :

$$p'(\sigma) = \frac{1}{h'}[e(\sigma) * k(\sigma)].R_{1/h'}(\sigma).$$

On en déduit que sa transformée de Fourier a pour expression :

$$P'(\delta) = P(\delta).R_{h'}(\delta). \tag{8}$$

Les nombres calculés $P'(\delta)$ sont donc bien une série de valeurs discrètes équidistantes du produit de composition cherché $P(\delta)$.

2° Convolution de deux fonctions a spectre illimité. — Quand les deux fonctions ont des spectres illimitées les relations entre $P(\delta)$ et $P'(\delta)$ sont beaucoup plus complexes. Nous examinerons en détail uniquement un cas particulier, celui de la convolution d'un interférogramme $I'(\delta)$ enregistré à travers un simple filtre RC, de constante de temps $\tau = R\,C$, et de la fonction $F'(\delta)$ définie précédemment, puisque c'est celui qui nous intéresse. La fonc tion calculée a alors la forme :

$$P'(\delta) = I''(\delta).R_{h'}(\delta). \tag{8 bis}$$

Elle ne prend que des valeurs discrètes et a évidemment un spectre périodique. L'interférogramme continu $I''(\delta)$ qui aurait les valeurs précédemment calculées pour des points d'abscisse $\delta = ph'$ a lui un spectre non périodique.

Sans nous préoccuper de l'expression exacte de $I''(\delta)$ ainsi défini nous allons préciser le spectre du bruit contenu dans $I''(\delta)$ et dans sa transformée de Fourier.

La courbe de gain correspondant à la réponse percussionnelle $F'(\delta).R_{h'}(\delta)$ est une fonction périodique de période I/h' (*fig.* 12). Le spectre du bruit

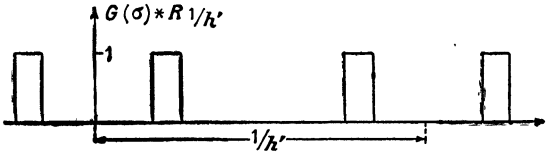

Fig. 12. — Filtre périodique.

contenu dans l'interférogramme continu $I''(\delta)$ a alors pour expression :

$$\mathcal{B}''_p(\sigma) = \mathcal{B}_p(\sigma)\,[|G(\sigma)|^2 R_{1/h'}(\sigma)] \quad (\textit{fig. } 13) \tag{9}$$

et l'écart moyen quadratique des fluctuations dans $I''(\delta)$ vaut :

$$\sigma'^2_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}''_p(\sigma)\,d\sigma.$$

Il est évidemment inférieur à l'écart moyen quadratique des fluctuations dans $I'(\delta)$ qui vaut

$$\sigma^2_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_p(\sigma)\,d\sigma$$

et sera d'autant plus faible que I/h' sera plus grand donc que le pas h' utilisé pour faire la convolution sera plus petit. Étant donnée la méthode de calcul, le pas h utilisé pour faire la transformée de Fourier de $I''(\delta)$ qui ne dépend plus que de la largeur $\Delta\sigma$ du spectre optique à étudier et de sa position par rapport à l'origine est obligatoirement un multiple de h' :

$$h = \chi h'.$$

La distance séparant deux pics de la fonction d'appareil est alors :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\chi}\frac{1}{h'}.$$

C'est un sous-multiple de I/h'. Rappelons que la puissance moyenne des fluctuations dans le spectre obtenu par transformation de Fourier de l'interférogramme est égale à l'énergie découpée dans le spectre du bruit par le carré de la fonction d'appareil [1]. L'écart moyen quadratique des fluctuations dans le spectre calculé à partir de $I''(\delta)$ avec un pas h est rigoureusement le même que celui qu'on aurait obtenu avec un pas h' puisque les pics supplémentaires de la fonction d'appareil tombent en des endroits où le spectre du bruit est nul (*fig.* 13).

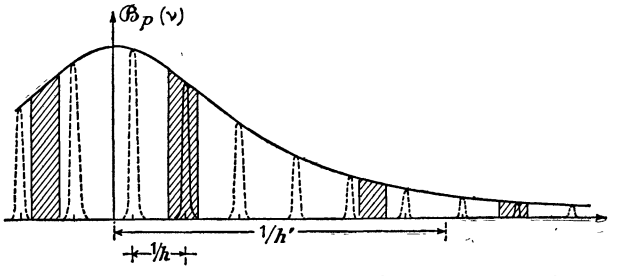

FIG. 13. — Fonction d'appareil de période $1/h$. explorant le spectre du bruit contenu dans $I''(\delta)$.

Le problème du calcul de l'écart moyen quadratique des fluctuations dans le spectre obtenu par transformée de Fourier numérique d'un interférogramme enregistré à travers un simple filtre RC a déjà été traité [1]. On montre que la variance dans le spectre calculé avec un pas h : $\sigma_x'^2$ est liée à la variance σ_x^2 qu'on aurait dans le spectre calculé par une intégrale de Fourier par la relation :

$$\sigma_x'^2 = \sigma_x^2\, \Phi_{\nu_0}(h/\tau)$$

avec

$$\Phi_{\nu_0}(h/\tau) = \frac{h}{2\tau}\frac{\sin h\, h/\tau}{\cos h\, h/\tau - \cos 2\pi\nu_0 h}$$

ν_0 étant la fréquence particulière envisagée.

Donc, dans notre cas, l'écart moyen quadratique des fluctuations dans le spectre final $\sigma_x''^2$ sera lié à l'écart moyen quadratique minimum qu'on aurait eu en calculant directement par une intégrale la transformée de Fourier de $I'(\delta)$ par la relation :

$$\sigma_x''^2 = \sigma_x^2\, \Phi_{\nu_0}(h'/\tau)$$

avec

$$\Phi_{\nu_0}(h'/\tau') = \frac{h'}{2\tau}\frac{\sin h\, h'/\tau}{\cos h\, h'/\tau - \cos 2\pi\nu_0 h'} \quad (\textit{fig. } 14) \qquad (10)$$

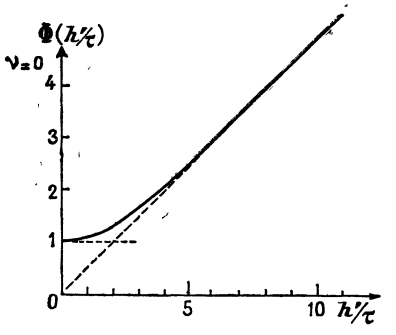

FIG. 14. — Fonction $\Phi_0(h'/\tau)$.

h' étant cette fois le pas choisi pour faire la convolution (1).

Donc pour obtenir à partir de $I''(\delta)$ le même rapport s/b dans le spectre que lorsqu'on fait directement la transformée de $I'(\delta)$, il faut relever autant de valeurs sur $I'(\delta)$. Mais le nombre de valeurs de $I''(\delta)$ qu'on calculera et qu'on utilisera pour faire la transformée de Fourier sera notablement inférieur. Il sera déterminé uniquement par la largeur du spectre optique et sa position par rapport à l'origine.

On peut évaluer la perte S en rapport s/b qui résulte du fait que h' est fini en faisant le quotient du rapport s/b obtenu avec h' ayant une valeur déterminée à celui qu'on obtiendrait avec h' infiniment petit :

$$S = \sqrt{\frac{\Phi(0)}{\Phi_{\nu_0}(h'/\tau')}} \quad (\textit{fig. } 14\ \textit{bis}).$$

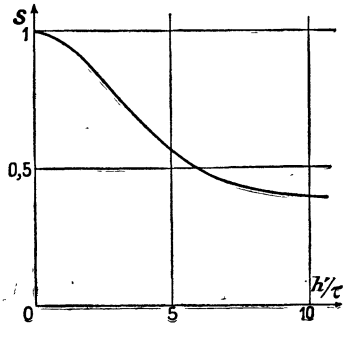

FIG. 14 *bis*. — Variation du rapport s/b dans le spectre final en fonction du pas h' avec lequel est faite la convolution.

On voit d'après la figure 14 *bis* qu'il y a intérêt,

(1) Les courbes $\Phi_{\nu_0}(h/\tau')$ sont pratiquement indépendantes de ν_0.

comme dans le cas d'une transformée de Fourier directe, à choisir h' de l'ordre de τ.

Méthode de calcul. — Le calcul comprend 5 parties distinctes :

1° Calcul des N' valeurs de la réponse percussionnelle $F'(\delta)$ du filtre avec $N' = L'/h'$.

2° Pondération de ces N' valeurs de $F'(\delta)$ par $A'(\delta)$.

3° Pondération de l'interférogramme $I'(\delta)$ par $A(\delta)$.

4° Calcul du produit de composition

$$I''(\delta) = I'(\delta).A(\delta) * F'(\delta).A'(\delta).$$

5° Calcul de la transformée de Fourier en cosinus de $I''(\delta)$.

La durée des 3 premières opérations est négligeable devant celle des deux dernières (1). Le temps du calcul du produit de composition peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{T}_c = kN'n \text{ secondes}$$

N' étant le nombre de valeurs discrètes de $F'(\delta)$ utilisées, n le nombre de points de $I''(\delta)$ calculées et k un coefficient numérique qui dépend de la machine utilisée. Nous donnons sa valeur pour l'ordinateur 704 IBM utilisé dans un problème pour lequel le nombre de points d'entrée N (qui n'intervient pas directement dans le calcul de $\mathcal{T}_c$, mais seulement par l'intermédiaire de n) est supérieur au nombre de mémoires rapides. Ceci oblige à faire entrer les valeurs N en plusieurs fois et augmente considérablement le temps de calcul. Dans ces conditions : $k = 10^{-3}$. Rappelons que le temps de calcul d'une transformée de Fourier classique à partir des N valeurs relevées sur l'interférogramme serait :

$$\mathcal{T}_F = 0{,}8.10^{-3}\, NN_1 \text{ secondes}$$

N_1 étant le nombre de points de sortie ; on peut l'évaluer en fonction de n, nombre minimum de points utilisés pour faire la transformée de Fourier n est de l'ordre de $2M$, M étant le nombre d'éléments spectraux. Si on calcule 3 points par élément spectral pour faciliter le tracé du spectre :

$$N_1 = 3M = (3/2)n.$$

Dans ce cas :

$$\mathcal{T}_F = 1{,}2.10^{-3}\, Nn \text{ secondes}$$

ce qui conduit avec l'ordinateur 704 utilisé dans les conditions que nous avons précisées à :

$$\mathcal{T}_c/\mathcal{T}_F = 0{,}8\, N'/N.$$

(1) Les sinus et cosinus qui interviennent dans le calcul de $F'(\delta)$ aussi bien que dans le calcul de la transformée de Fourier de $I''(\delta)$ sont calculés par récurrence à l'aide des formules de Tchébicheff :

$$\cos(p+1)x = 2\cos x \cos px - \cos(p-1)x$$
$$\sin(p+1)x = 2\cos x \sin px - \cos(p-1)x.$$

Examinons dans un cas particulier le gain de temps qu'on peut réaliser en faisant un filtrage mathématique. Supposons que le spectre à étudier s'étende sur un domaine

$$\Delta\sigma = \sigma_M - \sigma_m = \sigma_M/5 \quad (\textit{fig. } 15)$$

et que l'interférogramme soit enregistré à travers un simple filtre passe-bas. Ce filtre introduit des déphasages pour les diverses fréquences contenues dans le signal. Ces déphasages se traduisent dans le spectre reconstitué par une dissymétrie de la fonction d'appareil [1]. Si on tolère une dissymétrie de 1/100 entre les hauteurs de deux premiers pieds négatifs on peut choisir une constante de temps :

$$\tau = 1/2\pi\sigma_M.$$

Le spectre optique et le spectre du bruit ont alors la position indiquée dans la figure 15. Si on

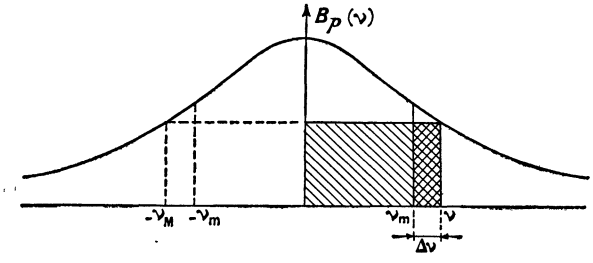

FIG. 15. — $h' = 1/2\nu_M$ $h/\tau = \pi$ $S = 0{,}7$ $h = 5h'$.

veut obtenir dans le spectre final un rapport s/b qui soit les 7/10 du rapport s/b maximum, il faut choisir h' tel que [1] :

$$h'/\tau = \pi$$

c'est à dire :

$$h' = 1/2\sigma_M.$$

Supposons de plus que nous voulions traiter ce problème à la résolution 6 000 ; des relations :

$$N = 1/h' \quad \text{et} \quad R = L\sigma_M.$$

On déduit que :

$$N = 12\,000.$$

L'élément spectral vaut :

$$\delta\sigma = \sigma_M/6\,000$$

et le spectre à étudier contient :

$$M = \Delta\sigma/\delta\sigma = 12\,000 \text{ éléments spectraux.}$$

Si on calcule 3 points par élément spectral, le calcul de la transformée de Fourier directe durerait :

$$\mathcal{T}_F = 0{,}8.10^{-3} \times 12\,000 \times 3\,600 = 9 \text{ heures } 36 \text{ minutes.}$$

Pour réaliser un filtrage numérique pratiquement parfait : $\varphi = 0{,}98$, il faut d'après la figure 10*b* choisir

$$\Delta\sigma\, L' = 60 \quad \text{soit} \quad L' = 300/\sigma_M \quad \text{et} \quad N' = L'/h' = 600.$$

Le temps de calcul du produit de composition correspondant est

$$\mathcal{T}_c = 600 \times 2\,400 \times 10^{-3}\ \mathrm{s} = 24 \text{ minutes.}$$

La nouvelle transformée de Fourier demande alors :

$$\mathcal{T}_F = 0{,}8.10^{-3} \times 2\,400 \times 3\,600\,\mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 55 \text{ minutes.}$$

d'où une réduction du temps de calcul total par un facteur 4,15.

III. **Vérifications expérimentales.** — Elles portent sur deux points précis : calcul de l'écart moyen quadratique des fluctuations dans $I''(\delta)$ et comparaison de deux spectres obtenus à partir d'un même interférogramme, l'un par transformée de Fourier directe avec un pas h', l'autre après filtrage numérique, le pas utilisé pour faire la convolution étant également h'.

1° Écart moyen quadratique des fluctuations dans $I''(\delta)$. — Soit un interférogramme $I'(t)$ constitué uniquement par du bruit (*fig.* 16*a*) (1).

Constante de temps : $\tau = 2s$.

Spectre de puissance du bruit :

$$\mathcal{B}_p(\nu) = \frac{\mathcal{B}_p(0)}{1 + (2\pi\nu\tau)^2} \quad (\textit{fig. } 16b).$$

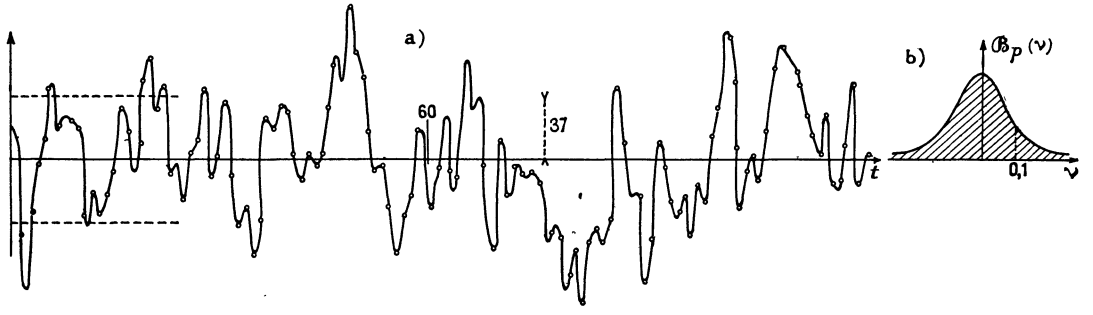

Fig. 16*a*. — $I'(t)$, $h' = 1{,}2$ s. Fig. 16*b*.

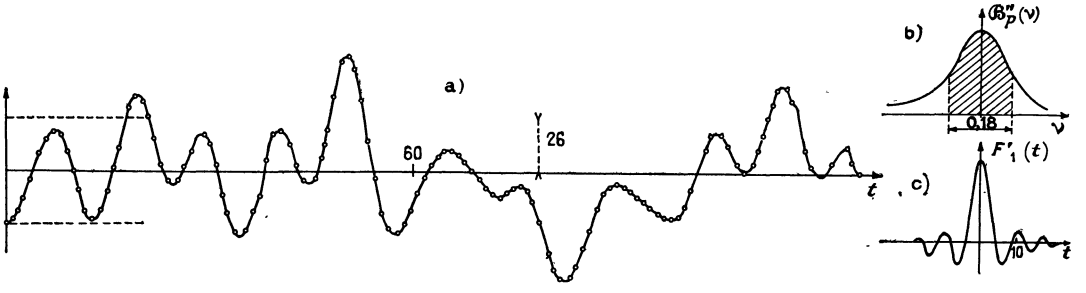

Fig. 17*a*. — $I_1(t)$, Fig. 17*b*. — Courbe de gain du filtre, Fig. 17*c*. — Réponse percussionnelle du filtre.

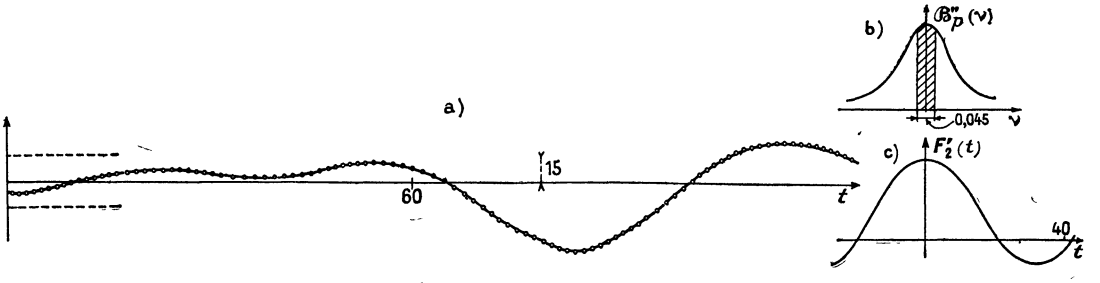

Fig. 18*a*. — $I_2(t)$, Fig. 18*b*, Fig. 18*c*.

Écart moyen quadratique des fluctuations :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_p(\nu)\, d\nu = \mathcal{B}_0/4.$$

Avec l'échelle arbitraire employée : $\sigma_x = 37$ u.

(1) Les variables sont ici t et ν, proportionnelles à δ et σ puisqu'on a $\delta = Vt$ et $\nu = \sigma V$, V étant le double de la vitesse du miroir mobile de l'interféromètre à 2 ondes employé.

a) 1er *filtrage.* — Le filtre est centré sur l'origine ; largeur du filtre : $\Delta\nu_0 = 0{,}09$ Hz (*fig.* 17*b*).

Sa réponse percussionnelle est représentée par la figure 17*c*.

Si h' était nul, l'écart moyen quadratique des fluctuations dans $I_1''(t)$ aurait pour valeur :

$$\sigma_x'^2 = \mathcal{B}_p(0) \int_{-\frac{\Delta\nu_0}{2}}^{+\frac{\Delta\nu_0}{2}} \frac{d\nu}{1 + (4\pi\nu)^2}$$

$$= \mathcal{B}_p(0)\ [\text{Arc tg } 4\pi\nu]_{-\Delta\nu/2}^{+\Delta\nu/2}.$$

Avec les unités choisies on trouverait :

$$\sigma_x'^2 = \sigma_x^2\, 1{,}68/\pi \quad \text{et} \quad \sigma_x' = 27 \text{ u}.$$

Le pas utilisé h' étant de 1,2 s, le bruit dans $I_1''(t)$ est légèrement supérieur. D'après la courbe 14 *bis* pour $h'/\tau = 0{,}6$, $S = 0{,}98$ donc σ_x' devrait être :

$$\sigma_x' = 27 \times 1{,}02 = 27{,}54.$$

La valeur expérimentale est : 26 u (*fig.* 17*a*).

b) 2e *filtrage.* — Le filtre est centré sur l'origine ; largeur du filtre $\Delta\nu_0 = 0{,}0225$ Hz (*fig.* 18*b*). Sa réponse percussionnelle est représentée sur la figure 18*c*.

Écart moyen quadratique des fluctuations prévues avec $h' = 1{,}2$ s.

$$\sigma_x' = 14{,}5 \text{ u}.$$

Valeur expérimentale : 15 *u* (*fig.* 18*a*).

Les 2 interférogrammes $I_1''(t)$ et $I_2''(t)$ paraissent lissés par rapport à $I'(t)$. Leurs rayons de corrélation sont de l'ordre de l'inverse du double des fréquences de coupure soit 6 s pour le premier et 24 s pour le second.

2° Comparaison d'un spectre obtenu par transformée de Fourier directe avec un spectre obtenu après filtrage mathématique. — Soit un interférogramme synthétique $\mathcal{J}'(t)$ obtenu en ajoutant au bruit précédent $I'(t)$ une constante. Le spectre correspondant se compose d'une raie à la fréquence 0 à laquelle se superpose un bruit $X(\sigma)$.

Dans le spectre $B_p'(\nu)$ obtenu par transformée de Fourier directe avec le pas $h' = 1{,}2$ s, l'écart moyen quadratique des fluctuations mesuré sur le spectre vaut $\sigma_x' = 1\,280$ u (*fig.* 19*a*).

La transformée de Fourier de l'interférogramme $I_2''(t)$ obtenu avec le filtre de largeur 0,0225 Hz donne le spectre 19*b*. Elle a été effectuée avec le pas h maximum soit $h = 18\ h'$.

Le spectre $B_p''(\nu)$ est évidemment périodique de période 0,045 Hz, donc il est différent dans son ensemble de $B_p'(\nu)$, mais les parties comprises entre $\nu = 0$ et $\nu = 0{,}0225$ Hz sont rigoureusement identiques et l'écart moyen quadratique des fluctuations σ_x' vaut aussi 1 280 u.

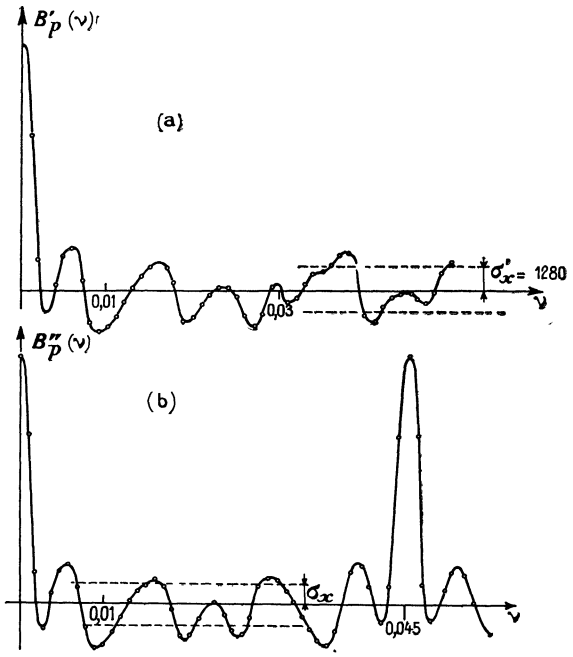

Fig. 19*a*. — Spectre obtenu par TF directe : $h' = 1{,}2$ s.
Fig. 19*b*. — Spectre obtenu après filtrage numérique : $h' = 1{,}2$ s ; $h = 18\ h'$.

IV. **Conclusion.** — Pour obtenir, avec un filtrage mathématique, un rapport s/b donné dans le spectre, le pas h' qui est à utiliser pour faire la convolution est exactement le même que celui qui serait utilisé pour faire la transformée de Fourier directe. On doit donc choisir h' de l'ordre de τ, constante de temps qui a servi à enregistrer l'interférogramme. Donc on relève autant de points sur l'interférogramme. Mais la transformée de Fourier est faite à partir du nombre de points minimum pour qu'il n'y ait pas recouvrement des spectres optiques, la valeur du pas h ne dépendant plus que de la largeur du spectre optique et de sa position par rapport à l'origine, d'où une réduction considérable du temps de calcul (1).

Les auteurs remercient le Comité Européen de Calcul Scientifique pour ses attributions d'heures de calcul à l'ordinateur 704 IBM.

Manuscrit reçu le 14 janvier 1961.

(1) La méthode du filtrage numérique a permis d'étudier dans un temps raisonnable, par transformation de Fourier, la lumière de recombinaison intrinsèque dans le germanium.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Connes (J.), *Revue d'Optique*, à paraître, février 1961.

[2] Mertz (L. W.), Symposium de Stockholm, 1959.