



Les corrélations dans un plasma en équilibre

J. Yvon

► To cite this version:

J. Yvon. Les corrélations dans un plasma en équilibre. Journal de Physique et le Radium, 1958, 19 (10), pp.733-738. 10.1051/jphysrad:019580019010073300 . jpa-00235922

HAL Id: jpa-00235922

<https://hal.science/jpa-00235922>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

LES CORRÉLATIONS DANS UN PLASMA EN ÉQUILIBRE

Par J. YVON,

C. E. N. de Saclay, Gif-sur-Yvette (Seine-et-Oise).

Résumé. — Un plasma complètement ionisé est en équilibre thermodynamique. On tente une mise au point du calcul des corrélations de position dans ce plasma. On utilise les équations de récurrence et le principe de superposition. On expose d'abord l'approximation linéaire. Dans le cas d'un plasma neutre homogène et isotrope l'étude est poursuivie à l'approximation suivante.

Abstract. — This paper treats of a fully ionized plasma in thermodynamic equilibrium. An attempt is made at reviewing the calculation of spatial correlations in such a plasma. The equations of recurrence and the principle of superposition are used. The linear approximation is first treated. The next higher approximation is studied in the case of a neutral homogeneous and isotropic plasma.

I. Le problème. — On considère un milieu constitué par des ions positifs et des électrons. Des atomes et même des molécules, et aussi des ions complexes, peuvent se former dans ce milieu. Nous supposons que la température est assez élevée pour qu'il n'en soit rien. Le milieu constitue donc un plasma complètement ionisé. La température n'est néanmoins pas assez élevée pour provoquer l'apparition de phénomènes relativistes.

Divers champs statiques peuvent être appliqués au plasma : un champ de gravitation, un champ électrique, un champ magnétique. Il est parfois commode — ici le point de vue est purement théorique — de supposer que le plasma est confiné dans un volume déterminé par des parois appropriées. L'effet de ces parois peut se traduire par un champ répulsif convenable. On pourrait aussi envisager un système en rotation uniforme qui serait en équilibre dans un système d'axes tournants.

L'ionisation complète du plasma suppose une température telle qu'il y règne un rayonnement intense. Pour que le plasma puisse rester en équilibre il est nécessaire qu'il ne perde pas d'énergie par rayonnement. Le plus simple est de supposer que le rayonnement est confiné comme le plasma par les parois dont il vient d'être question : elles sont parfaitement réfléchissantes. Dans ces conditions on admet que les échanges d'énergie entre le plasma et le rayonnement sont faibles et on néglige l'inter-

action entre les particules chargées et le champ électromagnétique. Le traitement de l'équilibre ainsi défini paraît à première vue se prêter à un traitement non quantique. C'est ce traitement que nous allons tenter. Le plasma en équilibre ne comporte aucun courant de matière. Les conditions où nous nous sommes placés, les approximations faites sont probablement surabondantes pour entraîner cette conclusion. Un champ magnétique appliqué n'a aucun effet sur l'état du système si bien qu'il n'en sera pas fait mention davantage ⁽¹⁾.

Les forces coulombiennes qui s'exercent entre les particules créent des corrélations entre leurs positions. Ces corrélations ne peuvent être calculées, même dans le cas d'un milieu dilué, par la formule élémentaire de la théorie cinétique des gaz par ce que les forces coulombiennes sont à longue portée. L'importance de ce problème a été reconnue autrefois par Debye et Hückel qui en ont donné la solution : en fait ces auteurs s'intéressaient aux cas des électrolytes mais le cas des plasmas n'est pas essentiellement différent.

Je me propose d'exposer ici un traitement de la question qui permette d'en faire complètement le

⁽¹⁾ En fait les raisonnements classiques sur la question (Becker [38]) négligent le rôle du champ magnétique induit et ne tiennent compte que du champ magnétique appliqué. Ce point semble demander quelques recherches supplémentaires.

tour. Le principe de la méthode a déjà été indiqué ailleurs (Yvon [36]). On se limite à un plasma d'hydrogène.

II. Notations. — Celles-ci dérivent des notations utilisées pour le traitement d'un fluide à un seul constituant. Nous désignons par :

$$n_{1i} = n_i(x_1, y_1, z_1),$$

la densité moléculaire des particules de l'espèce i au point de coordonnées x_1, y_1, z_1 — point que nous désignerons par x_1 seul pour abrégé. Nous désignerons de même par

$$n_{12ij} = n_{ij}(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2),$$

la densité de présence simultanée de deux particules, l'une d'espèce i en x_1 , l'autre d'espèce j en x_2 . Une relation de symétrie est évidente :

$$n_{12ij} = n_{21ji}. \quad (1)$$

L'absence de toute corrélation se traduirait par la relation :

$$n_{12ij} = n_{1i} n_{2j}. \quad (2)$$

Ces relations sont toujours correctes à grande distance (en toute rigueur si le système est ouvert au sens thermodynamique, ce que nous supposons) : c'est une évidence physique. On envisagera également des densités triples, telles que :

$$n_{123ijk}.$$

Nous désignerons par

$$\zeta_i e$$

la charge de la particule d'espèce i , en posant :

$$\zeta_i = \pm 1.$$

Nous désignerons par

$$F_{1i}$$

la composante suivant Ox de la force subie de la part du champ appliqué résultant par une particule i située en x_1 . La force électrique, au même point, sera désignée par

$$\zeta_i X_1.$$

De même la force coulombienne exercée par une particule j située en x_2 sur une particule i située en x_1 s'écrira :

$$\zeta_i \zeta_j X_{12},$$

avec :

$$X_{12} = e^2 \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}. \quad (3)$$

III. Équations de récurrence. — Les densités simples et multiples sont liées par les relations de

récurrence suivantes (nous écrirons seulement celles qui concernent l'axe Ox) :

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} n_{1i} = F_{1i} n_{1i} + \zeta_i \sum_j \zeta_j \int n_{12ij} X_{12} d\tau_2, \quad (4)$$

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} n_{12ij} = (F_{1i} + \zeta_i \zeta_j X_{12}) n_{12ij} + \zeta_i \sum_k \zeta_k \int n_{123ijk} X_{13} d\tau_3 \quad (2)$$

$$kT \frac{\partial}{\partial x_2} n_{12ij} = (F_{2j} - \zeta_i \zeta_j X_{12}) n_{12ij} + \zeta_j \sum_k \zeta_k \int n_{123ijk} X_{23} d\tau_3. \quad (3)$$

T est la température absolue, k la constante de Boltzmann, $d\tau$ un élément de volume. Les intégrations portent sur tout le volume occupé par le plasma.

On désignera par :

$$v_1 = \sum n_{1i}, \quad (4)$$

la densité résultante et par

$$\sigma_1 = \sum \zeta_i n_{1i} \quad (5)$$

la densité de charge électrique. En fait il manque à cette grandeur, pour répondre à sa définition, un facteur e . Aussi vaut-il mieux l'appeler la « densité électrique abstraite ».

Revenons sur les intégrales qui figurent dans les équations de récurrence. Considérons par exemple la suivante :

$$\zeta_i \sum_k \zeta_k \int n_{123ijk} X_{13} d\tau_3.$$

Les points 1 et 2 étant fixés, le point 3 décrit tout le volume offert. Il est en général éloigné de l'un et l'autre des deux premiers points. C'est-à-dire que presque partout :

$$n_{123iij} = n_{12ii} n_{3i}, \quad n_{123ijk} = n_{12ij} n_{3k}. \quad (6)$$

Utilisons l'identité :

$$\begin{aligned} \zeta_i \sum_k \zeta_k \int n_{123ijk} X_{13} d\tau_3 \\ = \zeta_i \sum_k \zeta_k \int (n_{123ijk} - n_{12ij} n_{3k}) X_{13} d\tau_3 \\ + \zeta_i n_{12ij} \int \sigma_3 X_{13} d\tau_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Le premier terme du second membre correspond maintenant à une intégration dans un petit volume, cependant que le second terme fait apparaître la force électrique moyenne sur la charge $+1$:

$$\bar{X}_1 = \int \sigma_3 X_{13} d\tau_3. \quad (8)$$

Il y a intérêt à incorporer la force électrique moyenne dans la force appliquée, en introduisant la force résultante :

$$F'_{1i} = F_{1i} + \zeta_i \bar{X}_1. \quad (9)$$

Les équations de récurrence s'écrivent maintenant :

(10)

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} n_{1i} = F'_{1i} n_{1i} + \zeta_i \sum_j \zeta_j \int (n_{12ij} - n_{1i} n_{1j}) X_{12} d\tau_2,$$

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} n_{12ij} = (F'_{1i} + \zeta_i \zeta_j X_{12}) n_{12ij} + \zeta_i \sum_k \zeta_k \int (n_{123ijk} - n_{12ij} n_{3k}) X_{13} d\tau_3, \quad (11)$$

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} n_{12ij} = (F'_{2i} - \zeta_i \zeta_j X_{12}) n_{12ij} + \zeta_j \sum_k \zeta_k \int (n_{123ijk} - n_{12ij} n_{3k}) X_{23} d\tau_3. \quad (12)$$

Il est commode d'exprimer les corrélations à l'aide de grandeurs sans dimensions. Nous posons :

$$n_{12ij} = n_{1i} n_{2j} a_{12ij}. \quad (13)$$

C'est simplement une définition de la grandeur sans dimensions a_{12ij} . Nous poserons de même :

$$n_{123ijk} = n_{1i} n_{2j} n_{3k} a_{123ijk}. \quad (14)$$

En combinant les équations (10), (11), (12) on fait disparaître des deux dernières la force résultante. Il vient :

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} a_{12ij} = \zeta_i \zeta_j X_{12} a_{12ij} + \zeta_i \sum_k \zeta_k \int n_{3k} (a_{123ijk} - a_{12ij} a_{13ik}) X_{13} d\tau_3, \quad (15)$$

$$kT \frac{\partial}{\partial x_2} a_{12ij} = -\zeta_i \zeta_j X_{12} a_{12ij} + \zeta_j \sum_k \zeta_k \int n_{3k} (a_{123ijk} - a_{12ij} a_{23jk}) X_{23} d\tau_3. \quad (16)$$

On notera que dans ces équations la masse des particules n'intervient nulle part.

IV. Approximation. Principe de superposition.

— Nous supposons désormais que la densité du plasma est modérée, quitte à préciser plus tard ce que nous entendons par là. Si les forces entre les particules étaient à courte portée il suffirait alors de négliger dans les équations (10), (11), (12) du paragraphe précédent les termes intégraux pour obtenir des relations satisfaisantes. Une telle simplification est excessive dans le cas des forces coulombiennes. Nous essaierons une approximation meilleure, qui consiste à appliquer le principe dit de superposition (Kirkwood).

Le principe de superposition — il s'agit en fait d'une approximation et non d'un principe — consiste à admettre que les corrélations des particules trois à trois se déduisent des corrélations entre les particules deux à deux par la formule :

$$a_{123ijk} = a_{12ij} a_{13ik} a_{23jk}. \quad (3)$$

Cette formule paraît intuitivement assez satis-

faisante. Elle devient notamment exacte lorsque l'un des points s'éloigne des deux autres. Si c'est le cas du point x_3, y_3, z_3 par exemple ; les deux membres deviennent en effet égaux à a_{12ij} simultanément.

Compte tenu du principe de superposition, les équations III(15) et III (16) s'écrivent maintenant :

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} \log a_{12ij} = \zeta_i \zeta_j X_{12} + \zeta_i \sum_k \zeta_k n_k \int a_{13ik} (a_{23jk} - 1) X_{13} d\tau_3, \quad (1)$$

$$kT \frac{\partial}{\partial x_2} \log a_{12ij} = -\zeta_i \zeta_j X_{12} + \zeta_j \sum_k \zeta_k n_k \int a_{23jk} (a_{13ik} - 1) X_{23} d\tau_3. \quad (2)$$

V. Situation homogène. — Examinons ce qui se passe dans une région où le fluide est : 1° homogène, 2° isotrope, 3° neutre.

a_{12ij} ne dépend que la distance r_{12} . La symétrie sphérique fait disparaître un certain nombre de termes. De plus, étant donné que la masse n'intervient pas, les électrons se comportent comme des ions changés de signe, ce qui conduit à admettre sans risquer de contradiction que :

$$\begin{aligned} a_{12--} &= a_{12++}, \\ a_{12+-} &= a_{12-+}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nous désignerons pour abréger la première de ces quantités par a_{12} et la seconde par b_{12} . Il y a finalement à retenir seulement deux équations :

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} \log a_{12} = X_{12} + n \int (a_{13} a_{23} - b_{13} b_{23}) X_{13} d\tau_3 \quad (2)$$

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} \log b_{12} = -X_{12} + n \int (a_{13} b_{23} - b_{13} a_{23}) X_{13} d\tau_3. \quad (3)$$

VI. Approximation linéaire. — Les équations IV (1) et (2), qui ne sont pas linéaires, présentent d'évidentes difficultés de résolution même après les simplifications du paragraphe précédent. Mais, comme a_{12ij} tend vers l'unité quand la distance augmente, on imagine de poser :

$$a_{12ij} = 1 + \varepsilon_{12ij} \quad (1)$$

et d'essayer l'approximation où l'on considère les ε comme des quantités petites du premier ordre. Il vient, en négligeant les termes du second ordre,

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} n_{1i} = F'_{1i} n_{1i} + \zeta_i \sum_j \zeta_j \int n_{2j} \varepsilon_{13ij} X_{12} d\tau_2, \quad (2)$$

$$\begin{cases} kT \frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon_{12ij} = \zeta_i (\zeta_j X_{12} + \sum_k \zeta_k \int n_{3k} \varepsilon_{23jk} X_{13} d\tau_3), \\ kT \frac{\partial}{\partial x_2} \varepsilon_{12ij} = \zeta_j (-\zeta_i X_{12} + \sum_k \zeta_k \int n_{3k} \varepsilon_{13ik} X_{23} d\tau_3). \end{cases} \quad (3)$$

De la première des équations (3) on déduit aisément :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\varepsilon_{12+j} + \varepsilon_{12-j}) = 0, \quad (4)$$

ce qui veut dire que la somme

$$\varepsilon_{12+j} + \varepsilon_{12-j}$$

ne dépend que des coordonnées de 2, c'est une certaine fonction f_{2j} :

$$\varepsilon_{12+j} + \varepsilon_{12-j} = f_{2j},$$

mais comme les ε_{12} sont nuls, lorsque la distance 1-2 est grande, cette fonction ne peut être que nulle. Donc :

$$\varepsilon_{12+j} + \varepsilon_{12-j} = 0.$$

De même, à l'aide de la dernière équations (3) on montre que :

$$\varepsilon_{12j+} + \varepsilon_{12j-} = 0.$$

Les quatre grandeurs ε_{12ij} peuvent donc se déduire de l'une d'entre elles :

$$\begin{cases} \varepsilon_{12-+} = \varepsilon_{12+-} = -\varepsilon_{12++} \\ \varepsilon_{12--} = \varepsilon_{12++} \end{cases} \quad (5)$$

Nous désignerons désormais ε_{12++} par la notation abrégée ε_{12} . Le système (2)-(3) se ramène maintenant aux équations suivantes :

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} n_{1i} = F'_i n_{1i} + \zeta_i \int v_2 \varepsilon_{12} X_{12} d\tau_2, \quad (6)$$

$$\begin{cases} kT \frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon_{12} = X_{12} + \int v_3 \varepsilon_{23} X_{13} d\tau_3, \\ kT \frac{\partial}{\partial x_2} \varepsilon_{12} = -X_{12} + \int v_3 \varepsilon_{13} X_{23} d\tau_3. \end{cases} \quad (7)$$

Il est remarquable que les corrélations, représentées par ε_{12} , ne dépendent que de la densité : elles ne dépendent pas de la charge électrique. On étudiera en particulier le cas où le fluide est homogène et isotrope. ε_{12} ne dépend que de la distance r_{12} . Le système (7), intégré membre à membre, donne :

$$kT \varepsilon_{12} = -\frac{e^2}{r_{12}} - v \int \frac{e^2}{r_{13}} \varepsilon_{23} d\tau_3. \quad (8)$$

Cette équation a une solution qui s'écrit, en supprimant les indices,

$$\varepsilon = -\frac{r_0}{r} e^{-\alpha r}, \quad (9)$$

avec :

$$r_0 = \frac{e^2}{kT}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{4\pi v e^2}{kT}}. \quad (10)$$

A titre d'indication calculons ces paramètres r_0 et α pour un plasma tel que (2) :

$$1^\circ \quad v = 10^{15} \text{ cm}^{-3},$$

$$2^\circ \quad T = 10^8 \text{ }^\circ\text{K}.$$

(2) Rappel : $e = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ cgs}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg deg}^{-1}$.

Nous donnons au lieu de α la longueur, dite longueur de Debye, $h = \alpha^{-1}$ et aussi la distance qui définit la densité :

$$d = v^{-1/3}.$$

Les résultats sont les suivants :

	cm
r_0	$1,66 \cdot 10^{-11}$
d	10^{-5}
h	$2,18 \cdot 10^{-3}$

Les corrélations s'étendent assez loin dans le fluide, à des distances de l'ordre de h , cependant qu'elles ne deviennent importantes — et alors l'approximation n'est plus valable — qu'à des distances très courtes, de l'ordre de r_0 .

VII. Corrélations à faible distance. — D'après V nous posons ici :

$$\begin{aligned} a_{12++} &= a_{12--} = a_{12} = 1 + \varepsilon_{12} \\ a_{12-+} &= a_{12+-} = b_{12} = 1 + \eta_{12}. \end{aligned}$$

La formule obtenue en milieu homogène

$$a_{12} = 1 - (r_0/r) e^{-\alpha r}, \quad (1)$$

est justifiée aux grandes distances. Aux petites distances elle conduit à une densité simultanée négative, ce qui est un non sens. Imaginons un instant qu'aux faibles distances les effets coulombiens dus aux actions ternaires s'effacent ; deux ions très voisins réagissent l'un sur l'autre sans trop s'occuper de ce qui se passe autour d'eux. Il est alors naturel d'appliquer à la densité simultanée la formule qui convient pour les forces à courte portée, dans le cas des faibles densités :

$$a_{12} = \exp - r_0/r. \quad (2)$$

Il n'est pas difficile de trouver, empiriquement, une formule qui couvre (1) et (2). C'est :

$$a_{12} = \exp [-(r_0/r) e^{-\alpha r}]. \quad (3)$$

Le même raisonnement, appliqué à la corrélation ion-électron, conduit à la formule suivante :

$$b_{12} = \exp [(r_0/r) e^{-\alpha r}]. \quad (4)$$

Mais cette formule est inacceptable par ce qu'elle prévoit une accumulation infinie d'électrons autour d'un ion positif. On pourrait rejeter entièrement une formule établie de manière purement intuitive. Mais la singularité qui figure dans notre dernier résultat est inévitable : c'est une conséquence de la forme de l'énergie potentielle. Seul un traitement quantique pourrait nous en débarrasser.

Essayons d'autre part d'améliorer l'approximation du paragraphe précédent. Revenons aux

équations V (1) et (2) que nous récrivons en les combinant :

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} \log (1 + \varepsilon_{12}) (1 + \eta_{12}) = n \int (\varepsilon_{13} - \eta_{13}) (\varepsilon_{23} + \eta_{13}) X_{13} d\tau_3, \quad (5)$$

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{1 + \varepsilon_{12}}{1 + \eta_{12}} = 2X_{12} + n \int (2 + \varepsilon_{13} + \eta_{13}) (\varepsilon_{23} - \eta_{13}) X_{13} d\tau_3. \quad (6)$$

Ce système peut être résolu par approximations successives en considérant X_{12} (mais non pas X_{13}) comme du premier ordre — ou, plus précisément, en négligeant

$$e^2/kT \text{ devant } n(e^2/kT) d\tau_3.$$

La solution d'ordre zéro est :

$$\varepsilon_{12} = \eta_{12} = 0. \quad (7)$$

Au premier ordre on retrouve les résultats déjà obtenus. Au second ordre il vient :

$$\varepsilon_{12} - \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^2 + \eta_{12} - \frac{1}{2} \eta_{12}^2 = 0, \quad (8)$$

$$kT \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\varepsilon_{12} - \eta_{12} - \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{2} \eta_{12}^2 \right) = 2X_{12} + n \int (2 + \varepsilon_{13} + \eta_{13}) (\varepsilon_{23} - \eta_{23}) X_{13} d\tau_3. \quad (9)$$

On remplace dans les quantités du second ordre les ε par leur expression du premier ordre. Il vient d'abord :

$$\varepsilon_{12} + \eta_{12} = (r_0/r)^2 e^{-2\alpha r}. \quad (10)$$

Ensuite on trouve que $\varepsilon_{12} - \eta_{12}$ a la même expression qu'au premier ordre. Ainsi, au troisième ordre près :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{r_0}{r} e^{-\alpha r} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 e^{-2\alpha r}, \\ \eta_{12} &= \frac{r_0}{r} e^{-\alpha r} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 e^{-2\alpha r}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ces résultats sont conformes aux formules empiriques (3) et (4), ce qu'on peut considérer comme satisfaisant.

Il serait assez difficile de passer à l'approximation du troisième ordre : mais comme le principe de superposition, sur lequel sont fondées nos équations de départ, n'est pas rigoureux, une telle entreprise n'est peut-être pas indispensable.

VIII. Situation inhomogène. — Nous désirons maintenant savoir ce que deviennent les corrélations lorsque le plasma n'est pas homogène. Pour ce problème plus difficile nous serons moins exigeants et nous nous contenterons de l'approximation linéaire du principe de superposition. On

revient donc aux équations VI (7), qui s'intègrent et donnent :

$$kT \varepsilon_{12} = -\frac{e^2}{r_{12}} - \int \frac{e^2}{r_{13}} v_3 \varepsilon_{23} d\tau_3, \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{r_{13}} v_3 \varepsilon_{23} d\tau_3 = \int \frac{1}{r_{23}} v_3 \varepsilon_{13} d\tau_3. \quad (2)$$

On notera d'abord qu'aux grandes valeurs de la distance r_{12} le paramètre de corrélation ε_{12} est nul. Il en résulte d'après (7) la condition :

$$\frac{1}{r_{12}} + \int \frac{1}{r_{13}} v_3 \varepsilon_{23} d\tau_3 = 0 \text{ pour } r_{12} \text{ grand.} \quad (3)$$

ce qui peut encore s'énoncer de la manière suivante :
1° par la relation :

$$1 + \int v_2 \varepsilon_{12} d\tau_2 = 0; \quad (4)$$

2° par le fait que

$$\int_0^\infty r_{12}^{l+2} v_2 \varepsilon_{12} dr_{12} \quad (5)$$

est orthogonal aux harmoniques sphériques centrés sur x_1 d'ordre l — sauf pour $l = 0$ (il n'est pas facile de dire jusqu'à quel ordre en l cette condition doit être retenue).

Ceci dit, si on admet que la densité globale varie lentement de point en point de manière que seul son gradient détermine les corrélations, l'expression de ε_{12} peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_{12} = -\frac{r_0}{r} e^{-\alpha r} \sqrt{2\pi r_0 (v_1 + v_2)}.$$

IX. Répartition macroscopique. — Nous sommes en état maintenant d'appliquer l'équation VI (6) à la répartition des particules dans un champ de forces. A l'approximation du paragraphe précédent et compte tenu du peu d'influence des corrélations aux distances de l'ordre de r_0 on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} n_+ kT - \frac{2}{3} n_+ e^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = n_+ F_+, \\ \frac{\partial}{\partial x} n_- kT - \frac{2}{3} n_- e^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = n_- F_-. \end{cases} \quad (1)$$

On en déduit l'équation d'équilibre entre pressions et forces :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v kT - 4e^3 \sqrt{\frac{\pi}{kT}} v^{3/2} \right) = n_+ F_+ + n_- F_-, \quad (2)$$

ce qui signifie qu'à la pression propre aux gaz parfaits s'ajoute une pression due aux interactions coulombiennes. C'est une pression scalaire qui se formule :

$$-4e^3 \sqrt{\frac{\pi}{kT}} v^{3/2}. \quad (3)$$

Étant donné que cette quantité est négative, il est d'ailleurs plus physique de dire que les actions coulombiennes créent une tension. Il est inutile d'y insister car, dans le domaine physique qui nous intéresse, cette tension est négligeable⁽³⁾. Désignons par $W_{\pm}$ l'énergie potentielle d'où dérive la force résultante. Les équations (1) s'intègrent :

$$\begin{cases} kT \log \frac{n_+}{C_+} = -W_+ + \frac{2}{3} e^2 \alpha, \\ kT \log \frac{n_-}{C_-} = -W_- + \frac{2}{3} e^2 \alpha. \end{cases} \quad (4)$$

Les constantes d'intégration C_+ et C_- laissent à notre gré le choix de l'origine des énergies potentielles.

Nous nous intéresserons aux situations où la densité électrique abstraite est faible devant la densité globale. Les équations précédentes conduisent à l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} kT \left(\log \frac{v}{2C_+} + \frac{\sigma}{v} \right) &= -W_+ + \frac{2}{3} e^2 \alpha \\ kT \left(\log \frac{v}{2C_-} - \frac{\sigma}{v} \right) &= -W_- + \frac{2}{3} e^2 \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

en continuant il vient :

$$kT \log \frac{v}{2\sqrt{C_+ C_-}} = -\frac{1}{2} (W_+ + W_-) + \frac{1}{3} e^2 \alpha, \quad (6)$$

$$\sigma = -\frac{v}{kT} \frac{W_+ - W_-}{2} - v \log \frac{C_+}{C_-}. \quad (7)$$

L'énergie potentielle électrique disparaît dans la combinaison $W_+ + W_-$. $\frac{1}{3} \frac{e^2}{kT} \alpha$ est petit devant l'unité, on en profite pour remplacer cette quantité par

$$\log \left(1 + \frac{1}{3} \frac{e^2 \alpha}{kT} \right).$$

⁽³⁾ En astrophysique, température plus basse, densité plus élevée, la situation est un peu différente.

La répartition de la densité globale est donc donnée par l'équation :

$$v \left[1 - \frac{2}{3} \sqrt{\pi v} \left(\frac{e^2}{kT} \right)^{3/2} \right] = 2 \sqrt{C_+ C_-} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{W_+ + W_-}{kT} \right). \quad (8)$$

Au laboratoire on ne saurait obtenir que de faibles variations de la densité globale.

Supposons donc celle-ci uniforme. Séparons dans W_+ ou W_- l'énergie de gravitation de l'énergie électrique :

$$\begin{cases} W_+ = W_{0+} + eV \\ W_- = W_{0-} - eV. \end{cases} \quad (9)$$

Étant donné que :

$$\Delta V = -4\pi e \sigma, \quad (10)$$

l'application du Laplacien aux deux membres de la relation (7) nous conduit au résultat suivant :

$$\Delta \sigma = -\frac{v}{kT} \Delta \frac{W_{0+} - W_{0-}}{2} + \alpha^2 \sigma. \quad (11)$$

Cette relation montre comment un champ gravifique sépare les charges électriques d'un système neutre. Elle donne aussi la loi de décroissance des charges dans un système purement électrostatique et elle permet d'estimer comment un plasma forme écran aux champs électriques qui lui sont appliqués.

X. Conclusion. — Cette étude est en soi académique, étant donné le faible effet des corrélations dans un plasma très chaud et modérément dense en équilibre thermodynamique. Toutefois elle présente un certain intérêt si on veut bien la considérer comme une introduction à l'étude des plasmas hors d'équilibre.

Manuscrit reçu le 29 mai 1958.

BIBLIOGRAPHIE

- BECKER (R.), *Théorie des Électrons* (traduit de l'allemand), Paris, 1938, p. 181.
- BUFF (F. P.) et STILLINGER (F. M., Jr.), Surface Tension of Ionic Solutions. *J. Chem. Phys.*, 1956, **25**, 312.
- EDWARDS (S. F.), A variational calculation of the equilibrium properties of a classical plasma. *Phil. Mag.*, 1958, **3**, 119.
- EDWARDS (S. F.), Correlations in the charge density of a classical plasma. *Phil. Mag.*, 1958, **3**, 302.
- Los Alamos Scientific Laboratory, Series of Lectures on Physics of Ionised Gases ; Rapport L. A. 2055, U. S., A. E. C.
- ONO (S.), Statistical Thermodynamics of Solutions of Electrolytes and non Electrolytes. *Progress. Theor. Physics*, 1951, **VI**, 447.
- YVON (J.), Le potentiel thermodynamique à volume constant dans les solutions d'électrolytes forts. *J. Physique Rad.*, 1936, **VII**, 93.
- TIABLIKOV (S. V.) et TOLMACHEV (V. V.), Distribution functions for a classical electron gas, *Soviet Physics « Doklady »*, 1957, **2**, 299.