



Formation de l'image d'un point dans un spectrographe magnétique utilisant un champ en r^{-1}

C. Bastard, J. Lafoucrière

► To cite this version:

C. Bastard, J. Lafoucrière. Formation de l'image d'un point dans un spectrographe magnétique utilisant un champ en r^{-1} . Journal de Physique et le Radium, 1958, 19 (7), pp.674-676. 10.1051/jphys-rad:01958001907067400 . jpa-00235912

HAL Id: jpa-00235912

<https://hal.science/jpa-00235912>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FORMATION DE L'IMAGE D'UN POINT DANS UN SPECTROGRAPHE MAGNÉTIQUE UTILISANT UN CHAMP EN r^{-1}

Par C. BASTARD et J. LAFOUCRIÈRE,
Institut de Physique Nucléaire de l'Université de Lyon.

Résumé. — On étudie les trajectoires du type trochoïdal de corpuscules chargés dans un champ magnétique inhomogène à rH constant en vue de la construction d'un spectrographe β à grande luminosité.

L'étude des trajectoires gauches montre que l'image d'un point est représenté par un segment de droite perpendiculaire au plan de symétrie du champ.

Abstract. — A study of the paths of trochoidal type described by charged particles in an inhomogeneous magnetic field of constant rH , with a view to the construction of a high-luminosity β -spectrograph.

The study of the twisted paths shows that the image of a point is represented by a straight segment perpendicular to the plane of symmetry of the field.

L'intérêt des études de spectrographie β n'est plus à démontrer en physique nucléaire. Les deux types de spectrographes, les plus utilisés, spectrographes à lentilles et spectrographes plats, possèdent des qualités différentes. Les premiers ont une bonne luminosité, les seconds sont surtout intéressants par leur pouvoir séparateur. L'appareil étudié ici possède l'avantage de la luminosité des lentilles et de la définition des prismes. Il utilise un champ magnétique de révolution, possédant un plan de symétrie, tel que le produit rH soit constant, r étant la distance à l'axe de révolution et H la valeur du champ dans le plan de symétrie. Précisons, dès maintenant, la différence essentielle avec le spectrographe dit à « double focalisation » dû à Siegbahn. Dans ce spectrographe les trajectoires des particules sont les orbites stationnaires ; dans notre cas, les orbites stationnaires ne sont pas stables au point de vue radial et ne peuvent donc pas être utilisées.

I. Trajectoires planes. — Le corpuscule de masse au repos m_0 , de charge e , placé dans un champ magnétique à symétrie de révolution défini par le potentiel vecteur $A_r = A_z = 0$ $A_\varphi = A(rz)$ décrit, comme il est bien connu, des trajectoires gauches données par le système

$$\begin{cases} mr'' = mr' \varphi'^2 + e \varphi' \frac{\partial}{\partial r} (rA) \\ mr^2 \varphi' + e rA = C \\ mz'' = e \varphi' \frac{\partial}{\partial z} (rA). \end{cases} \quad (1)$$

Soit en introduisant l'intégrale première $v^2 = \text{constante}$:

$$\begin{cases} v^2 = r'^2 + r^2 \varphi'^2 + z'^2 = v_0^2 \\ mr^2 \varphi' + e rA = C \\ mz'' = e \varphi' \frac{\partial}{\partial z} (rA) \end{cases} \quad (2)$$

où m est la masse relativiste $m_0[1 - (v^2/c^2)]^{-1/2}$.

Si $z_0 = 0$ le corpuscule reste dans le plan de symétrie du champ magnétique et le mouvement décrit par les deux équations

$$\begin{cases} r'^2 + r^2 \varphi'^2 + z'^2 = v_0^2 \\ mr^2 \varphi' + e rA = C \end{cases} \quad (3)$$

s'effectue suivant des trajectoires trochoïdales [1] ou des trajectoires présentant des branches infinies. Seules les premières nous intéressent, nous verrons par la suite la condition pour obtenir ces trajectoires.

La forme particulière du champ magnétique rend d'une part le problème complètement intégrable et donne lieu, d'autre part à une focalisation radiale parfaite [2].

Le potentiel vecteur décrivant un tel champ magnétique est solution de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (rA) = 0.$$

La fonction $rA(rz)$ définie par $rA(r0) = Kr$ dans le plan de symétrie vérifiant l'équation (4) est

$$rA(rz) = Kr \left(1 + \frac{z^2}{r^2} \right)^{1/2}.$$

Les lignes de force du champ sont donc des cercles [3]. L'équation des trajectoires planes des corpuscules chargés est dans ce cas :

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{(C - eKr) dr}{C[(m^2 v_0^2 - e^2 K^2) r^2 + 2eKCr - C^2]^{1/2}}.$$

Introduisons les quantités suivantes :

$$r_1 = \frac{C}{eK + mv_0} \quad r_2 = \frac{C}{eK - mv_0} \quad r_m = \frac{C}{eK} \quad k = \frac{eK}{mv_0}.$$

Les trajectoires trochoïdales sont obtenues pour

$k > 1$, l'équation de ces trajectoires s'écrivant :

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{k(r_m - r) dr}{(k^2 - 1)^{1/2} [(r_2 - r)(r - r_1)]^{1/2}}$$

intégrale qui s'intègre facilement.

La précession à la valeur simple

$$\delta = 2\pi \left(1 - \frac{k}{(k^2 - 1)^{1/2}} \right)$$

cette quantité ne dépendant que de $k = K/\rho H$, avec $\rho H = m_0 v/e$ la focalisation a lieu quel que soit l'angle de tir α . D'autre part, le pouvoir séparateur qui peut être défini par l'expression $d\delta/dk = 2\pi/(k^2 - 1)^{-3/2}$ peut être pris aussi grand que l'on veut en choisissant k voisin de 1.

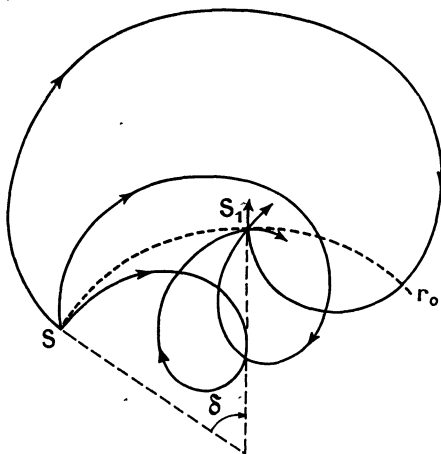


FIG. 1.

L'aspect des trajectoires est le suivant (fig. 1) : Toutes ces trajectoires sont homothétiques par rapport au centre de symétrie du champ dans le rapport : $\frac{r_m}{r'_m} = \frac{\cos \alpha' + k}{\cos \alpha + k}$ α et α' étant les angles de tir de deux corpuscules.

II. Trajectoires gauches. — Le système [2] ne se ramenant pas à des quadratures, nous avons eu recours à une méthode d'approximation en nous bornant à des trajectoires voisines du plan $z = 0$.

La troisième équation du système (2) s'écrit en remplaçant φ' par sa valeur

$$z'' = \frac{e}{m^2} \frac{C - e r A}{r} \frac{\partial A}{\partial z}.$$

Nous développons alors $\frac{C - e r A}{r} \frac{\partial A}{\partial z}$ en série de Taylor au voisinage du plan de symétrie en négligeant les termes du second ordre

$$\begin{aligned} \frac{C - e r A}{r} \frac{\partial A}{\partial z} &= \left(\frac{C - e r A}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right)_{z=0} \\ &+ z \left[\frac{C - e r A}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - e \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right]_{z=0} \end{aligned}$$

$$\text{comme } \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = - \frac{\partial H_r}{\partial z} = - \frac{\partial H_z}{\partial r}.$$

On obtient finalement :

$$z'' = - \frac{ze}{m^2} \left(\frac{C - e r A}{r} \right)_{z=0} \left(\frac{\partial H_z}{\partial r} \right)_{z=0}.$$

soit plus simplement :

$$z'' = k^2 v_0^2 z \frac{r_m - r}{r^3}$$

équation du second ordre en t , r étant une fonction de t obtenue en intégrant le système (3).

Passant à la variable r on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} r(r - r_1)(r - r_2) \\ + \frac{k^2}{k^2 - 1} (r - r_m) \left(r_m \frac{dz}{dr} - r \right) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est l'équation différentielle des méridiennes de révolution sur lesquelles se trouve située chaque trajectoire gauche. C'est une équation linéaire du second ordre qui n'est pas d'un type connu et ne se ramène pas à la forme hypergéométrique. Si on exprime les conditions initiales par les coordonnées $r_0 \theta_0 \varphi_0$ de la source, θ_0 angle du plan de symétrie avec la vitesse initiale, u_0 angle de la tangente au cercle de rayon r_0 avec la projection de la vitesse initiale sur le plan de symétrie, la forme des coefficients de l'équation (6) montre que les méridiennes correspondant aux mêmes r_0 et θ_0 mais à des u_0 différents, sont les mêmes. Nous pouvons donc prendre un u_0 particulier $u_0 = 90^\circ$.

Pour construire les méridiennes nous avons résolu numériquement l'équation (5)

$$z'' = v_0^2 k^2 z \frac{r_m - r}{r^3}.$$

Nous avons utilisé une formule polynomiale due à Milne [4],

$$z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1} + t^2 z_n''$$

t étant l'intervalle de temps entre deux points consécutifs, le 1^{er} point étant obtenu en supposant le mouvement uniforme, ce qui est légitime puisque $z_0'' = 0$ et $r_0'' = 0$.

La précision donnée par cette formule a été jugée satisfaisante en l'appliquant à la construction de la trochoïde plane qui était calculable au moyen de transcendentes élémentaires de l'algèbre.

Le calcul montre que pour des angles θ_0 allant jusqu'à 10° la méthode précédente était applicable. L'aspect des méridiennes est alors la suivante. Nous avons pris

$$r_0 = 20 \text{ cm} \quad \rho H = 10^3 \quad k = 2 \text{ (fig. 2).}$$

Nous observons une concentration au voisinage des points $z = 0$ pour $C \approx 13,5 \text{ cm}$ il y a donc deux focalisations : une focalisation radiale et une

focalisation axiale, mais les angles de focalisation ne sont pas égaux et la seconde se produit pour $r \neq r_0$.

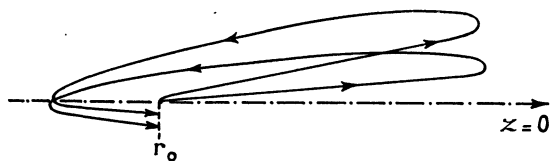


FIG. 2.

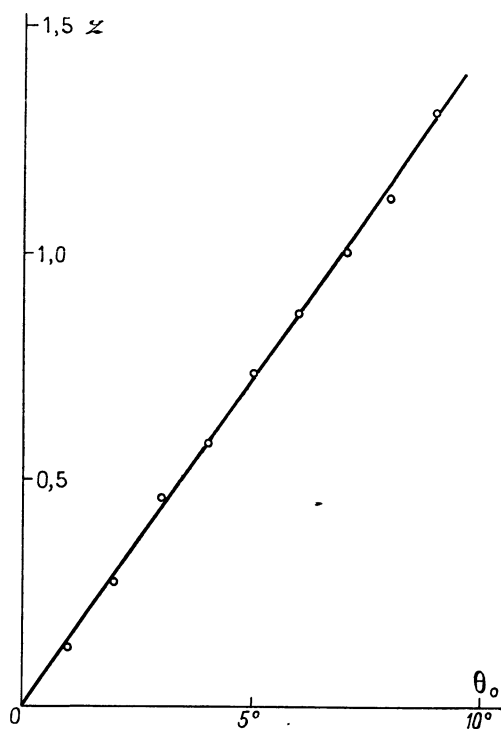


FIG. 3.

Pour obtenir la forme de l'image d'un point source, il reste à étudier la variation de la précession δ en fonction de l'angle θ_0 . Pour cela nous avons résolu numériquement le système (1) en utilisant comme précédemment les deux formules

$$z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1} + t^2 z_n''$$

$$r_{n+1} = 2r_n - r_{n-1} + t^2 r_n''$$

Nous avons trouvé que pour les trajectoires voisines du plan de symétrie, δ reste constant lorsque θ_0 varie, l'image d'un point source S situé sans le plan $z = 0$ est de ce fait un petit segment de droite perpendiculaire au plan $z = 0$ et situé sur le cylindre $r = r_0$ à la distance angulaire δ de S .

En reprenant l'exemple considéré plus haut $r_0 = 20$ cm, $\rho H = 10^3$, $k = 2$ les points d'impact des trajectoires gauches se situent sur ce segment à des distances z données en fonction de θ_0 par la courbe (3).

Le domaine de validité de l'équation (5) s'étend ainsi jusqu'à $\theta_0 \simeq 10^\circ$. L'allure des trajectoires gauches est alors la suivante :

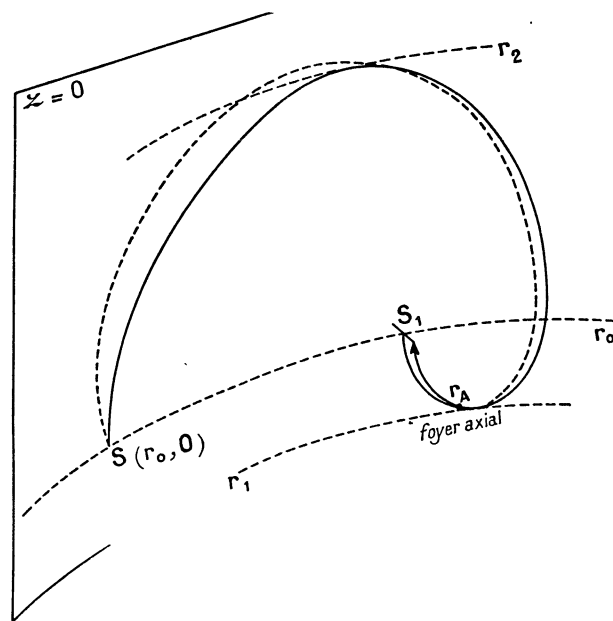


FIG. 4.

Nous ne saurions terminer sans adresser nos remerciements à M. le Pr J. Thibaud, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire, pour l'intérêt qu'il a bien voulu prendre à notre travail.

Manuscrit reçu le 7 mai 1958.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] THIBAUD (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1933, **197**, 447, 915, 1629 et *Phys. Rev.*, 1934, **45**, 787.
- [2] LAFOUCRIÈRE (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **231**, 137.
- [3] MOUSSA (A.) et LAFOUCRIÈRE (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **233**, 239.
- [4] Numerical Calculus by W. E. Milne, p. 142.