UNE HYPOTHÈSE SUR L'ÉTAT SUPERFLUIDE

Par JACQUES WINTER,
École Polytechnique, Paris.

Résumé. — L'auteur essaye de préciser une idée de F. London par une hypothèse supplémentaire : L'adoption du point de vue ondulatoire, ou la délocalisation des atomes d'hélium superfluide, et examine quelques conséquences de cette hypothèse.

Abstract. — The author tries to develop an idea of F. London, by a supplementary assumption : The adoption of the wave point of view, which means the delocalization of superfluid helium atoms. He discusses some consequences of this assumption.

1^o Idée fondamentale. — Nous nous proposons de développer l'idée de base de M. F. London (aujourd'hui décédé) : l'hélium superfluide est un gaz de Bose-Einstein. Mais, dans son livre *Superfluids*, tome II ⁽¹⁾, cette idée une fois introduite est par la suite abandonnée et l'ouvrage suit la théorie empirique des deux fluides de M. Tisza. Or de toutes les idées théoriques émises, celle-ci a au moins le mérite de rendre compte d'un des paradoxes, dont l'ensemble constitue l'état superfluide : l'Hélium³, qui suit la statistique de Fermi, ne présente pas de superfluidité.

L'hélium liquide, au voisinage de la température du point λ a une densité de 0,146 (environ), ce qui correspond à $\frac{0,146}{6,4 \cdot 10^{-24}} \sim 2,28 \cdot 10^{22}$ atomes par centimètre cube. Si nous prenons comme estimation grossière du volume de chaque atome, sa polarisabilité égale à $0,205 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ nous arrivons à un coefficient de remplissage de l'ordre de 5 pour 1000. Du point de vue corpusculaire, il est facile de concevoir que les atomes d'hélium se propagent librement, et quittent les cellules conventionnelles où on les enferme dans l'état liquide (théories de Lennard-Jones). Ce qui est inconcevable, c'est qu'une diminution de température et d'entropie provoque ce résultat. M. London a esquissé cette objection et a fait appel à l'énergie de vibration au zéro absolu, d'après la mécanique quantique, qui tend à étaler l'atome d'hélium. Cette tendance à l'étalement maintient l'état liquide, en dépit des attractions entre atomes différents.

Afin de chercher à expliquer l'état superfluide, nous irons un pas plus loin que M. London, et c'est là notre point fondamental. Nous admettons que l'hélium superfluide est un phénomène purement ondulatoire (comme les phénomènes de diffraction) et que ses atomes sont représentables par des ondes Ψ de de Broglie, délocalisées. Et c'est là l'essentiel ⁽²⁾. Des expériences de diffraction ayant

été faites sur l'hélium et l'hydrogène moléculaire, il n'y a pas, nous semble-t-il, de difficulté de principe dans cette hypothèse. La délocalisation et l'abandon total du modèle cellulaire sont en opposition brutale avec la théorie usuelle des liquides ⁽³⁾. Mais pour expliquer des phénomènes aussi paradoxaux, il semble nécessaire de faire une hypothèse violente. Pourvu, bien entendu, qu'elle ne sorte pas du cadre de la mécanique quantique, sans quoi, l'explication perdrait son intérêt. Ce reproche ne nous semblerait pas justifié. Mais, bien entendu, le lecteur reste juge.

Avant de passer aux applications, il est nécessaire de matérialiser cette hypothèse par un modèle mathématique, aussi simple que possible, et qu'on aurait toujours le loisir de compliquer si l'idée de base de cette théorie était retenue.

MODÈLE MATHÉMATIQUE. — Nous considérons donc un volume V , rempli par un gaz, dont chaque atome est représenté par une fonction Ψ qui s'étend à tout le volume. Un atome se déplacera dans un champ, créé par l'action de tous les autres, qui sera tantôt dirigé dans un sens, tantôt dans un autre sens. Admettons que ce champ est périodique et comprend une suite de vallées et de barrières de potentiel ; en un mot, un ensemble de cellules, séparées par des barrières et étendues à tout le volume. Afin de simplifier, nous nous bornerons à examiner le cas d'une seule dimension, laissant de côté toutes les difficultés dues à la structure spatiale et qui ne sont pas essentielles pour nous. Le problème consiste à comparer ce qui se passe pour l'hélium liquide ordinaire (atome renfermé dans une cellule de potentiel) et le superfluide (atome compris dans un ensemble de cellules et de barrières). Nous suivrons la solution de MM. Goldman et Krivtchenko ⁽⁴⁾. Le problème est le suivant :

⁽³⁾ Les expériences de diffraction des rayons X mettent en évidence des variations de densité régulière, que la structure délocalisée devra présenter aussi.

⁽¹⁾ New-York, Wiley, 1954.
⁽²⁾ Dans son article de la *Physical Review*, 1938, 54, 947, M. London a exprimé cette idée, mais semble y avoir renoncé depuis.

⁽⁴⁾ « Sbornik Zadatch po kvantovoi mekhanike », Moscou, 1957. A vrai dire, il s'agit dans la plupart des cas de véritables études et non d'exercices pédagogiques.

Un champ $V(x)$ (fig. 1) est constitué par un ensemble de N cuvettes de potentiel identiques, séparées par des barrières identiques. En admettant qu'on puisse appliquer la méthode quasi classique,

FIG. 1.

déterminer les niveaux d'énergie dans le champ $V(x)$. Comparer le spectre énergétique obtenu avec le spectre énergétique d'une seule cuvette.

La méthode consiste à admettre que, dans l'exponentielle e^{ipx} , p est une fonction très lentement variable de x . Cette hypothèse est raisonnable, le champ moyen n'ayant aucune raison de varier brusquement. Une difficulté surgit aux points pour

lesquels $p = 0$, car il y a un facteur $\frac{1}{\sqrt{|p|}}$.

Et comme nous étudions un atome lié au système, son énergie E coupera nécessairement la courbe V à chaque oscillation, comme l'indique la figure 1, sinon cet atome quitterait le milieu, là où le potentiel frontière viendrait à manquer, c'est-à-dire sur une surface libre. La figure suppose le milieu enfermé dans un récipient (V s'élève aux limites), mais cela peut ne pas être le cas, p s'annulera à chaque intersection de E et V

$$(p^2/2m = E - V).$$

On raccorde des sommes d'exponentielles, avec + et —, réelles ($E > V$) et imaginaires ($E < V$), aux points d'intersection de E et V . Pour tenir compte de cette difficulté, on utilise des règles de correspondance entre exponentielles réelles et imaginaires.

La condition spectrale s'obtient en écrivant qu'il n'y a pas d'ondes convergentes du dehors vers le domaine étudié.

Pour l'exposé de la méthode algébrique très ingénieuse qui permet de résoudre un problème à N étages, nous renvoyons à l'ouvrage cité (chap. II, n° 11).

Résultat. — Chaque niveau énergétique E , afférent à une seule cuvette est coupé en N composantes et l'on a

$$\Delta E_m = \frac{\hbar \omega}{\pi} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{b_1}^{a_1} |p| dx} \times \cos \frac{n\pi}{N+1} \quad n = 1, 2, \dots, N$$

avec

$$\frac{\hbar \omega}{\pi} = \mu \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{2\mu(E_m^{(0)} - V)}}$$

$E_m^{(0)}$ désignant l'énergie E_m initiale afférente au cas d'une seule cuvette. μ , masse de l'atome étudié.

Conséquence. — Les niveaux énergétiques des atomes d'hélium liquide ordinaire se scinderont en N composantes, lors de la délocalisation d'un ensemble de N atomes. La moitié des composantes sera activée ($n < \frac{(N+1)}{2}$), la moitié sera stabilisée ($n > \frac{(N+1)}{2}$).

Applications : 1° ^4He et ^3He . — Pour simplifier, remplaçons $|p(x)|$ par une valeur moyenne $\bar{p}$ posons $a_1 b_1 = b_1 a_2 = l$. L'écart ΔE_m maximum ($n = N$) vaudra

$$\Delta E = \frac{\hbar \bar{p}}{l\mu} e^{-\frac{l\bar{p}}{\hbar}}. \quad (1)$$

Pour une température T voisine de 0°, tous les atomes de ^4He tomberont sur le niveau le plus bas et seront donc stabilisés par perte de l'énergie ΔE . Si l'on admet (ce que nous examinerons en 2°) que l'entropie du superfluide = 0,

$$\Delta E = TS$$

S entropie du liquide normal que nous prenons égale à 1,6 joules/gr. degré (5).

Si nous prenons $T = 2,2$

$$\Delta E = (2,2 \times 1,6 \times 10^7 \times 6,4 \times 10^{-24})$$

$$/1,6 \times 10^{-12} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ e. V.}$$

Si l'on pose $\bar{p}^2 = 2\mu \bar{H}$ ($\bar{H}$ valeur moyenne de $E - V$, E énergie minimum non perturbée par la superfusion), on verra qu'on peut facilement trouver une telle valeur de ΔE .

D'ailleurs

$$\Delta E \sim KT/2 \quad \text{pour } T = 2,2$$

pour (6) $\bar{H} = 5 \cdot 10^{-16} \text{ c.g.s.} = 1/3 \cdot 200 \text{ e. v.}$ et $l = 2 \text{ \AA}$

la formule (1) donne

$$\Delta E \sim 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ eV.}$$

(5) DAUNT et SMITH, *Reviews Mod. Physics*, 1954, 26, 192.

(6) La valeur de $\bar{H}$ a été choisie à peu près en accord avec les valeurs calculées de V , page 22 du livre cité de M. London. l a été choisi par tâtonnement de façon à retrouver la valeur expérimentale de $\Delta E = TS$. La valeur ainsi choisie est trop petite, si on la compare à la longueur d'onde de de Broglie de l'atome d'hélium pour une vitesse voisine de celle de l'agitation thermique à 2° (on trouverait $\lambda/2 = 5,5 \text{ \AA}$) mais elle est raisonnable si on le compare aux écarts des maxima de densité obtenus par les mesures de rayons X. Aussi bien s'agit-il ici d'un calcul grossier fait pour le cas fictif d'une seule dimension, dans le but de voir si on trouve des ordres de grandeur raisonnables.

ce qui montre que pour des ordres de grandeur raisonnables de l et de $\bar{H}$, on trouve une valeur de ΔE à peu près en accord avec l'expérience, en appliquant la formule de Goldman et Krivtchenkof.

Les atomes de ^3He se distribueront, en vertu du principe de Pauli, sur tous les états perturbés, les uns activés, les autres stabilisés — il n'y aura donc pas d'énergie de stabilisation, et le phénomène de superfusion ne pourra donc pas se produire, ailleurs qu'au zéro absolu.

2° Disparition de l'entropie. — Dans le modèle cellulaire, nous pouvons considérer qu'à la limite, pour $T \rightarrow 0$, nous avons N oscillateurs dont l'entropie tendra vers $NK \log Z_0$, Z_0 étant la valeur de la somme d'état

$$Z_0 = 1 + e^{-\varepsilon_1/kT} + e^{-\varepsilon_2/kT} + e^{-\varepsilon_3/kT} + \dots$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ étant les niveaux d'énergie successifs.

Dans le cas du modèle délocalisé, pour $T \rightarrow 0$, $S \rightarrow k(\log N + 1)$. Pour T donné, et N assez grand, nous voyons que l'entropie du superfluide sera beaucoup plus petite que celle du fluide. Or les films superfluides les plus minces ayant une épaisseur de quelques centaines d'angströms, nous pouvons admettre que N sera $\geq 10^9$.

Ceci montre que la superfusion ne pourra embrasser qu'un très grand nombre d'atomes à la fois, au départ de l'ordre d'au moins 10^9 , qui s'accroîtra rapidement quand T tendra vers zéro.

Une objection se présente : La formule $S = k(\log N + 1)$ n'est valable que si les niveaux $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ sont indépendants de N . Or, ici, si nous nous reportons à la valeur de ΔE_m , nous voyons qu'il n'en est rien. En tenant compte de ces N niveaux, et en portant les termes correspondants dans l'expression de l'entropie d'un système de Bose, on trouverait une entropie proportionnelle à N . A notre avis, cette objection ne s'applique pas. En effet, le système délocalisé est « self-consistent » : Le champ V doit résulter de la distribution des atomes dans l'état le plus stable. Si un nombre non négligeable d'atomes se trouvent dans des états tels que $n < N$, d'énergie non minimum, il se produira des répulsions intenses, dont notre formalisme self consistent ne tient pas compte. Ces forces favoriseront l'état minimum, qui apparaîtra comme approximativement unique. Dans le cas de Fermi, même l'état minimum self-consistent devient impossible.

3° Effet fontaine ou force thermique. — C'est l'effet le plus difficile à comprendre. Comment le superfluide est-il attiré par une région à température un peu plus élevée ? Nous n'avons vu aucune interprétation de ce phénomène, mais seulement des écritures (forces proportionnelles à $\text{grad } T$), qui en tiennent compte sans l'expliquer. Du point de vue d'une théorie délocalisée ou ondulatoire, l'expli-

cation n'est pas simple ; mais tout au moins, l'on voit poindre une lueur : l'atome d'hélium en contact avec une source de chaleur absorbe un quantum qui le relocalise dans la zone chaude.

Il y aurait là un effet quantique, présentant des similarités avec l'effet photoélectrique : ce n'est plus le photon qui se localise sur l'électron qui l'absorbe, c'est ici l'atome de matière qui se localise sur le photon en l'absorbant. Le photon est ici un quantum de vibration thermique de la région chaude et est donc localisé sur un atome de cette région. Il se transmettra donc sur le petit élément de l'onde Ψ qui l'avosine et où se localisera l'atome superfluide. Le vide résultant produira le courant superfluide vers la zone chaude.

Pourquoi la localisation se fait-elle au voisinage de l'atome chaud ?

Soit B l'atome chaud localisé, $\varphi_0(B)$, $\varphi_E(B)$ ses fonction d'onde non activées et activées, A l'atome superfluide, $\Psi(A)$ son onde non localisée, $\varphi(A)$ ses ondes localisées. L'élément de matrice associé à la transition sera, si H représente la perturbation, interaction électrostatique entre A et B ,

$$\int \varphi_E(A) \varphi_0(B) H \Psi(A) \varphi_E(B) dv_A dv_B.$$

Si $\varphi_E(A)$ est éloigné de B , l'élément de matrice sera négligeable car H sera négligeable pour A et B éloignés, et donc la transition impossible. Le phénomène de relocalisation est, comme la délocalisation, associé à une transition quantique, mais avec absorption de chaleur.

4° Film superfluide. — Nous avons fait ailleurs (7) l'hypothèse que la viscosité était due à la rupture de liaisons entre atomes A et B , doués de vibrations thermiques. Si l'atome B est un atome fixe d'une paroi, A l'atome de la couche d'hélium au contact de la paroi, l'énergie de liaison se calculera par un élément de matrice analogue à celui du paragraphe 3°. Il sera beaucoup plus petit, et de ce fait négligeable, si A est délocalisé.

Si A et B appartiennent tous deux au superfluide, la réponse est moins évidente. Si A et B ont le même Ψ , leur interaction sera forte et cela constituera la cohésion du superfluide. Si A et B appartiennent à des filets voisins, il faut d'abord expliquer pourquoi, précisément, la délocalisation s'arrête entre les deux filets. Sans quoi, on ne pourrait pas parler de deux filets. Il doit exister entre eux des décalages de potentiel dus au gradient de vitesse. Les distributions de densité seront décalées dans les deux filets et l'atome A , du filet 1, aura une grosse probabilité d'être réfléchi sur la surface de séparation de 1 et du filet 2. En raison de ce décalage, un élément de matrice de la

(7) J. WINTER, Considérations sur la théorie des liquides. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1954, 24, 1-33.

forme $\int \Psi(A)^2 \Psi(B)^2 dv_A dv_B$ sera forcément petit, et il n'y aura donc guère de viscosité intérieure.

Pourquoi, maintenant, la vitesse d'écoulement d'un film superficiel superfluide, ou film de Rollin, est-elle limitée supérieurement ? Cette vitesse étant de l'ordre de 50 à 100 cm/s, l'énergie cinétique est insuffisante pour produire une relocalisation au contact de la paroi. Il faudra faire appel à une image purement ondulatoire ou optique. Il doit

exister une barrière de potentiel à la surface de la paroi, qui s'oppose à la pénétration de $\Psi(A)$. Si l'énergie cinétique de A est suffisante, il y aura franchissement de la barrière et absorption superficielle. Il y aura donc, comme dans tout écoulement hydrodynamique, une couche de Prandtl et le phénomène du film de Rollin, sans viscosité, s'évanouira. Il ne s'agit ici, bien entendu, que d'hypothèses.

Manuscrit reçu le 31 janvier 1958.