HAL
open science

Remarque sur l'influence de la dispersion dans les systèmes de couches minces diélectriques

F. Abflès

To cite this version:

F. Abflès. Remarque sur l'influence de la dispersion dans les systèmes de couches minces diélectriques. Journal de Physique et le Radium, 1958, 19 (3), pp.327-334. 10.1051/jphysrad:01958001903032700 . jpa-00235844

HAL Id: jpa-00235844

https://hal.science/jpa-00235844

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REMARQUE SUR L'INFLUENCE DE LA DISPERSION DANS LES SYSTÈMES DE COUCHES MINCES DIÉLECTRIQUES

Par F. ABELÈS,
Institut d'Optique, Paris.

Résumé. — On envisage successivement le cas d'une seule couche mince et celui des miroirs semi-transparents pour interféromètre de Fabry-Perot. On montre comment on peut déterminer l'épaisseur d'une couche mince non absorbante lorsque le facteur de réflexion de celui-ci est maximum et que l'on tient compte de la dispersion. On discute aussi le cas où la couche est utilisée en incidence oblique. Pour les systèmes de couches minces alternées non-absorbantes, on envisage l'influence de la dispersion sur le facteur de réflexion maximum, sur les déphasages par réflexion, sur la variation des déphasages avec la longueur d'onde et sur l'étendue de la zone de réflexion.

Abstract. — We consider successively the case of a single thin film and of semi-transparent mirrors for Fabry-Perot interferometers. We show how it is possible to determine the thickness of a thin nonabsorbing film when its reflectivity is a maximum and when its dispersion is taken into account. A discussion concerning the same film, but used in oblique incidence, follows. For the systems of thin alternating nonabsorbing layers, we consider the influence of dispersion on the maximum reflectivity, on the phase-changes, on the variation of the phase-changes with the wavelength and on the width of the reflection region.

Lorsqu'on utilise des systèmes de couches minces non-absorbantes, on utilise à la fois des substances de haut et de bas indice de réfraction. Si, pour ces dernières, la variation de l'indice de réfraction avec la longueur d'onde est très faible, il n'en est pas de même en ce qui concerne les premières. Le sulfure de zinc, par exemple, qui est la substance de haut indice la plus employée dans les systèmes de couches minces destinés à être utilisés dans le spectre visible, présente une très sérieuse variation de l'indice de réfraction avec la longueur d'onde. La dispersion du ZnS étant maintenant assez bien connue [1, 2, 3], nous avons pensé qu'on pourrait essayer d'en tenir compte pour évaluer les propriétés optiques des systèmes de couches minces contenant cette substance. Dans le cas des couches minces alternées, utilisées pour la fabrication des miroirs semi-transparents pour interféromètres de Fabry-Perot, les calculs se simplifient beaucoup lorsque toutes les couches ont la même épaisseur optique pour une longueur d'onde λ_0. (Cette épaisseur optique est, en général, $\lambda_0/4$.) Ces miroirs étant généralement utilisés dans un domaine spectral peu étendu autour de λ_0, nous indiquerons ci-dessous comment on peut évaluer rapidement l'influence de la dispersion sur leurs propriétés optiques.

D'autre part, dans certains laboratoires, on se sert, pour leur préparation, d'un appareil mis au point par MM. Giacomo et Jacquinot [4] et appelé maximètre, car il permet le repérage très précis des extrema de la courbe représentative des variations du facteur de transmission T en fonction de la longueur d'onde λ. Lorsqu'on fabrique des systèmes de couches minces alternées, on désire avoir, pour chaque couche, $\partial T/\partial d = 0$, d étant l'épaisseur de la couche en question. Si la dispersion des couches est négligeable, $\partial T/\partial \lambda$ s'annule en même temps que $\partial T/\partial d$. Il n'en est plus de même lorsqu'on doit tenir compte des variations des indices de réfraction avec la longueur d'onde. Ce problème sera examiné dans ce qui suit.

Nous examinerons, pour commencer, le cas d'une seule couche mince, qui est à la fois plus facile à étudier de façon approfondie et intéressant pour la pratique courante. Dans la deuxième partie de ce travail, nous examinerons les miroirs multidiélectriques pour interféromètre de Fabry-Perot.

1. **Une couche mince.** — 1.1. INCIDENCE NORMALE. — On sait que le facteur de réflexion dans le cas d'une couche mince d'indice de réfraction n_1 et d'épaisseur d_1 comprise entre des milieux extrêmes d'indices de réfraction n_0 et n_s, peut se mettre sous la forme suivante :

$$R_1 = \frac{(n_s - n_0)^2 + \left(\frac{n_0 n_s}{n_1} - n_1\right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_1}{(n_s + n_0)^2 + \left(\frac{n_0 n_s}{n_1} + n_1\right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_1} = \frac{N}{D} \qquad (1)$$

où $\beta_1 = 2\pi\sigma n_1 d_1$ et $\sigma = 1/\lambda$ est le nombre d'ondes de la vibration monochromatique incidente utilisée. Nous désirons savoir pour quelle épaisseur optique de la couche, $R_1(\sigma)$ est extremum, compte tenu du fait que n_1 est une fonction de σ, et supposant que les variations de n_0 et n_s avec σ peuvent être négligées. On trouve que :

$$\frac{\partial R_1}{\partial \sigma} = \frac{8 n_0 n_s \operatorname{tg} \beta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1)}{D^2}$$
$$\left\{ \left(n_1 - \frac{n_0^2 n_s^2}{n_1^3}\right) \operatorname{tg} \beta_1 \frac{dn_1}{d\sigma} + \left(\frac{n_0^2 n_s^2}{n_1^2} + n_1^2 - n_0^2 - n_s^2\right) \frac{d\beta_1}{d\sigma} \right\}. \qquad (2)$$

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01958001903032700

On remarquera que

$$\frac{d\beta_1}{d\sigma} = \beta_1 \left(\frac{1}{n_1}\frac{dn_1}{d\sigma} + \frac{1}{\sigma}\right). \qquad (3)$$

Dans le cas des couches de haut indice dans le visible, $dn_1/d\sigma > 0$. En effet, leur bande d'absorption la plus proche se situe dans l'ultraviolet et leur indice de réfraction doit augmenter à mesure qu'on s'en rapproche par valeurs de σ croissantes.

S'il n'y avait pas lieu de tenir compte de la dispersion, c'est-à-dire si $dn_1/d\sigma = 0$, la relation (2) montre que $\partial R_1/\partial\sigma = 0$ lorsque tg β_1 est soit nulle, soit infinie, autrement dit lorsque β_1 est multiple entier de $\pi/2$. C'est un résultat bien connu. R_1 est maximum lorsque β_1 est multiple impair de $\pi/2$ et il est minimum lorsque β_1 est multiple pair de $\pi/2$, c'est-à-dire R_1 est maximum pour les valeurs de λ telles que $n_1 d_1$ soit multiple impair de $\lambda/4$ et il est minimum pour les longueurs d'onde pour lesquelles $n_1 d_1$ est multiple pair de $\lambda/4$ (ou multiple entier de $\lambda/2$).

Si l'on s'affranchit maintenant de la restriction $dn_1/d\sigma = 0$, on constate, d'après (2), que $\partial R_1/d\sigma = 0$ lorsque tg $\beta_1 = 0$, c'est-à-dire lorsque $\beta_1 = K\pi$ avec K entier quelconque. D'où la première conclusion : les minima de $R_1(\sigma)$ ont lieu pour les longueurs d'onde λ_m pour lesquelles $n_1 d_1$ est multiple entier de $\lambda_m/2$, et ceci quelle que soit la dispersion de la couche. Ceci était prévisible sans aucun calcul. En effet, on sait, et on le retrouve sur (1), que le minimum de R_1 a lieu lorsque $\beta_1 = K\pi$ et sa valeur est

$$R_{1m} = \left(\frac{n_s - n_0}{n_s + n_0}\right)^2 \qquad (4)$$

indépendante de la valeur de n_1. La position et la valeur de R_{1m} ne peuvent donc pas dépendre des variations de n_1 avec σ.

Une autre solution de $\partial R_1/\partial\sigma$ s'obtient en écrivant que

$$\left(n_1 - \frac{n_0^2 n_s^2}{n_1}\right) \text{tg}\, \beta_1 \frac{dn_1}{d\sigma} + \left(\frac{n_0^2 n_s^2}{n_1^2} + n_1^2 - n_0^2 - n_s^2\right)\frac{d\beta_1}{d\sigma} = 0. \qquad (5)$$

La plus petite valeur correspondante pour β_1 sera voisine de $\pi/2$. D'autre part, compte tenu de ce que $dn_1/d\sigma > 0$, $d\beta_1/d\sigma > 0$, et que les deux termes entre parenthèses sont positifs, on en conclut que tg $\beta_1 < 0$ c'est-à-dire que $\beta_1 > \pi/2$. Ceci signifie que lorsque $R_1(\sigma)$ est maximum, l'épaisseur optique de la couche est supérieure à $\lambda/4$

Exemple numérique. — Envisageons une couche de ZnS et supposons que, pour $\lambda = 500$ mμ, $n_1 = 2{,}35$ et $dn_1/d\sigma = 0{,}24\ \mu^{-1}$, tandis que $n_0 = 1$ et $n_s = 1{,}52$. On trouve que, pour cette longueur d'onde, $\partial R_1/\partial\sigma = 0$ lorsque $\beta_1 = 100°37'$. Cela veut dire que l'épaisseur optique de la couche ZnS qui est telle que $R_1(\sigma)$ est maximum pour $\lambda = 500$ mμ est :

$$n_1 d_1 = \frac{100°37'}{360°}\lambda = 0{,}2795\ \lambda = 139{,}75 \text{ m}\mu.$$

Si nous avions négligé la dispersion du ZnS, nous aurions trouvé que $R_1(\sigma)$ est maximum lorsque $n_1 d_1 = 0{,}25\ \lambda = 125$ mμ. Nous aurions commis ainsi une erreur sur l'épaisseur optique de la couche, $\Delta(n_1 d_1) = 14{,}75$ mμ et une erreur relative $\Delta(n_1 d_1)/n_1 d_1$ supérieure à 10 %.

La relation (5), qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$a \text{ tg } \beta_1 + b\,\beta_1 = 0 \qquad (6)$$

avec a et b constants pour une couche et une longueur d'onde données montre que lorsque β_1 augmente, tg β_1 doit augmenter aussi et, par conséquent, β_1 se rapproche de plus en plus d'un multiple impair de $\pi/2$. Dans le cas de l'exemple numérique ci-dessus, on trouve que le maximum suivant de $R_1(\sigma)$ a lieu pour $\beta_1 = 273°57'$, c'est-à-dire

$$n_1 d_1 = \frac{273°57'}{360°}\lambda = 0{,}761\ \lambda = 380{,}5 \text{ m}\mu.$$

Si nous avions négligé la dispersion de l'indice de réfraction du ZnS, nous aurions trouvé

$$n_1 d_1 = 0{,}75\ \lambda = 375 \text{ m}\mu.$$

Cette fois-ci, $\Delta(n_1 d_1) = 5{,}5$ mμ ; l'erreur commise en négligeant la dispersion est presque trois fois plus faible que précédemment. Quant à l'erreur relative, elle n'est plus que d'environ 1,5 %, c'est-à-dire sept fois plus faible que dans le premier cas.

Ce résultat est tout à fait général et pourrait s'énoncer ainsi. L'erreur commise sur l'épaisseur optique d'une couche mince non-absorbante lorsqu'on néglige sa dispersion est d'autant plus faible que son épaisseur optique est plus grande, étant entendu qu'elle est mesurée avec λ comme unité de longueur et qu'elle est déduite du maximum de $R_1(\sigma)$. Ceci était à prévoir aussi sans calcul. En effet, si l'on néglige $dn_1/d\sigma$, R_1 est une fonction de σ par l'intermédiaire de β_1 uniquement. A mesure que $n_1 d_1$ augmente, les variations de β_1 et aussi de tg β_1 avec σ sont plus rapides et l'influence de $dn_1/d\sigma$ devient négligeable.

Retour à l'exemple numérique. — Comparons les caractéristiques de la couche de ZnS telle que $\beta_1 = 100°37'$ avec celles correspondant à une couche de même substance, mais d'épaisseur optique telle que $\beta_1 = 90°$. On trouve que

$$R_1(\beta_1 = 100°37') = 0{,}316\ ; \quad R_1(\beta_1 = 90°) = 0{,}323.$$

Ceci était à prévoir, qualitativement du moins. On sait que $R_1(\beta_1)$ est maximum pour $\beta_1 = 90°$;

donc on devait bien avoir

$$R_1(\beta_1 = 100°37') < R_1(\beta_1 = 90°).$$

La différence des facteurs de réflexion est à la limite de la précision des spectrophotomètres du commerce.

Examinons maintenant les déphasages par réflexion dans les deux cas que nous envisageons. Soient δ_r et $\delta_{r'}$ les déphasages que subit une onde plane par réflexion « côté air » et « côté verre » respectivement. Lorsque $\beta_1 = 90°$, $\delta_r = \delta_{r'} = 180°$. Expérimentalement, on mesure le déphasage entre deux portions de la même onde, qui sont réfléchies par la couche et par le support nu. Soient ε_r et $\varepsilon_{r'}$ les déphasages mesurés. On a

$$\varepsilon_r = \delta_r + (2\beta_1 n_0/\pi) + \pi, \qquad \varepsilon_{r'} = \delta_{r'}.$$

Lorsque $\beta_1 = 100°37'$,

$$\delta_r = 180° - 5°41',$$

$$\varepsilon_r = 180° - 5°41' + \frac{100°37' \times 2}{2{,}35} + 180° = 80°52' + 360°,$$

$$\delta_{r'} = \varepsilon_{r'} = 180° - 12°14',$$

tandis que, pour $\beta_1 = 90°$

$$\varepsilon_{r'} = 180°, \ \varepsilon_r = 180° + \frac{2 \times 90°}{2{,}35} + 180° = 76°36' + 360°.$$

On remarquera que la différence

$$\varepsilon_{r'}(\beta_1 = 90°) - \varepsilon_{r'}(\beta_1 = 100°37') = 12°14'$$

c'est-à-dire 0,034 × interfrange, donc tout à fait mesurable, même sans prendre des précautions particulières.

1.2. Incidence oblique. — Les résultats obtenus dans le cas de l'incidence normale peuvent être immédiatement transposés au cas de l'incidence oblique, à condition de remplacer les n_i par les indices efficaces correspondants.

a) *Vibration perpendiculaire au plan d'incidence.* — Il faut remplacer les n_i par des $Y_i = n_i \cos \varphi_i$, φ_i étant les angles d'incidence ou de réfraction dans les divers milieux.

On constate encore que $\partial R_{1\perp}/\partial\sigma = 0$ lorsque $\beta_1 = K\pi$ avec K entier.

Une autre solution de l'équation $\partial R_{1\perp}/\partial\sigma = 0$ s'obtient en écrivant l'équation correspondant à (5) :

$$\left(Y_1 - \frac{Y_0^2 Y_s^2}{Y_1^3}\right) \operatorname{tg} \beta_1 \frac{dY_1}{d\sigma} + \left(\frac{Y_0^2 Y_s^2}{Y_1^2} + Y_1^2 - Y_0^2 - Y_s^2\right) \frac{d\beta_1}{d\sigma} = 0. \qquad (5_\perp)$$

Il convient de remarquer qu'ici

$$\frac{dY_1}{d\sigma} = \frac{1}{\cos \varphi_1} \frac{dn_1}{d\sigma}.$$

Compte tenu de ceci, on trouve encore que $\partial R_{1\perp}/\partial\sigma = 0$ lorsque $\beta_1 > 90°$. Dans le cas de l'exemple numérique déjà traité, on trouve, par exemple, que, lorsque $\varphi_0 = 60°$, $\partial R_{1\perp}/\partial\sigma = 0$ lorsque $\beta_1 = 99°37'$.

b) *Vibration parallèle au plan d'incidence.* — Il faut remplacer les n_i par des $Z_i = n_i/\cos \varphi_i$, sauf dans β_1, qui devient $2\pi\sigma\, Y_1\, d_1$. La solution $\beta_1 = K\pi$ subsiste pour $\partial R_{1\parallel}/\partial\sigma = 0$. Pour trouver les valeurs de β_1 voisines d'un multiple impair de $\pi/2$, on doit résoudre une équation analogue à $(5_\perp)$ avec des Z_i à la place des Y_i. Il faudra aussi tenir compte du fait que

$$\frac{dZ_1}{d\sigma} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1} \times \frac{dn_1}{d\sigma}.$$

Naturellement, $dZ_1/d\sigma > 0$ pour toutes les incidences, car $\varphi_1 < 45°$.

Dans le cas de l'exemple numérique déjà envisagé, on trouve que, lorsque $\varphi_0 = 60°$, $\partial R_{1\parallel}/\partial\sigma = 0$ lorsque $\beta_1 = 106°$. On trouve alors que

$$R_{1\parallel}(\beta_1 = 106°) = 0{,}0662,$$

tandis que $R_{1\parallel}(\beta_1 = 90°) = 0{,}0712$, d'où $\Delta R_{1\parallel} = 0{,}005$, différence difficile à mettre en évidence sur un photomètre de modèle courant. On peut remarquer que, dans notre cas,

$$\varepsilon_{r'\parallel}(\beta_1 = 106°) = 180° - 13°08',$$

mais la mesure doit être difficile du fait que le facteur de réflexion du verre nu n'est que de 0,0015.

Il y a, pour la vibration parallèle au plan d'incidence, un angle d'incidence remarquable : c'est l'angle de Brewster φ_{0B} relatif au passage air-couche, déterminé par la relation $\operatorname{tg} \varphi_{0B} = n_1/n_0$. Pour cette incidence $Z_0 = Z_1$ et

$$R_{1\parallel} = (Z_0 - Z_s)^2/(Z_0 + Z_s)^2$$

quels que soient l'indice et l'épaisseur de la couche. Or, il est facile de voir à partir de (2) que, pour cette incidence,

$$\frac{\partial R_{1\parallel}(\varphi_{0B})}{\partial\sigma} = \frac{8Z_s(Z_0 - Z_s)\,(n_1^2 - n_0^2)\sqrt{n_1^2 + n_0^2}\,\sin^2 \beta_1}{n_1^3(Z_0 + Z_s)^3} \times \frac{dn_1}{d\sigma}.$$

Le fait remarquable est qu'au voisinage de $\beta_1 = \pi/2$ il n'y a pas d'extrémum de $R_{1\parallel}(\sigma)$. Au contraire, pour $\beta_1 = \pi/2$, $\partial R_{1\parallel}/\partial\sigma$ atteint son maximum en fonction de β_1. Si l'on suit la variation de β_1 correspondant à un extremum de $R_{1\parallel}(\sigma)$ à mesure que φ_0 augmente, on constate que β_1 augmente sans cesse pour atteindre finalement la valeur π lorsque $\varphi_0 = \varphi_{0B}$.

Lorsque $\varphi_0 = 90°$, $R_{1\perp} = R_{1\parallel} = 1$ quelles que soient les valeurs de n_1 et de β_1. Dans ce cas, évidemment, $\partial R_1/\partial\sigma = 0$ quel que soit β_1.

Un autre angle d'incidence remarquable est celui qui vérifie la relation $Z_1^2 = Z_0 Z_s$. Nous avons

montré ailleurs que cet angle d'incidence φ_{0P} vérifie l'équation suivante :

$$a \sin^4 \varphi_{0P} + b \sin^2 \varphi_{0P} + c = 0$$

avec

$$a = n_0^2(n_1^2 - n_0^4 n_3^4), \qquad b = n_1^2[n_1^6(n_0^2 + n_3^2) - 2n_0^4 n_3^4],$$
$$c = n_1^4 n_3^2(n_1^4 - n_0^2 n_3^2).$$

C'est un angle assez grand, et tel que $\varphi_{0P} > \varphi_{0B}$. Dans ce cas

$$\frac{\partial R_{1\parallel}(\varphi_{0P})}{\partial \sigma} = \frac{-8Z_0 Z_s(Z_0 - Z_s)^2 \operatorname{tg} \beta_1(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1)}{[(Z_0 + Z_s)^2 + 4Z_0 Z_s \operatorname{tg}^2 \beta_1]^2} \times \frac{d\beta_1}{d\sigma}$$

et les extréma de $R_{1\parallel}(\sigma)$ ont lieu pour β_1 multiple entier de $\pi/2$. Dans ce cas, l'influence de la dispersion ne se manifeste pas lorsqu'on cherche les les extrêma de $R_{1\parallel}(\sigma)$. Il était à prévoir que $\partial R_{1\parallel}(\beta_1 = 90^\circ)/\partial\sigma = 0$ pour cette incidence, car nous savons qu'alors $R_{1\parallel} = 0$, ce qui correspond bien au minimum absolu de $R_{1\parallel}$.

2. **Plusieurs couches minces.** — 2.1. — Dès qu'il y a plus d'une couche mince, on ne peut plus trouver une expression simple pour $\partial R/\partial\sigma$. Il convient alors d'effectuer des calculs numériques correspondant à chaque cas particulier intéressant. Ces calculs deviennent assez longs dès que le nombre des couches dépasse deux ou trois.

Nous nous sommes contentés d'étudier d'une manière assez détaillée le problème qui se pose lors du contrôle de la préparation des systèmes de couches minces alternées pour miroirs d'interféromètres Fabry-Perot à l'aide du maximètre mis au point par MM. Giacomo et Jacquinot. Cet appareil permet d'arrêter la préparation d'une couche lorsque $\partial T/\partial\sigma = 0$, T étant le facteur de transmission du système de couches. Nous avons vu que, dans le cas d'une seule couche de ZnS et pour $\lambda = 500$ mμ, $dT/d\sigma = 0$ lorsque $\beta_1 = 100^\circ 37'$.

Examinons maintenant ce qui se passe lorsqu'on dépose successivement des couches de ZnS et de cryolithe ($n_2 = 1{,}35$) et supposons que la dispersion de l'indice de réfraction de celle-ci est négligeable. Nous envisageons un système de sept couches minces alternées et nous supposerons que l'épaisseur optique de chacune a été réglée de façon à avoir $\partial T/\partial\sigma = 0$. On trouve alors la succession suivante :

verre	$\beta_7 = 100^\circ 37'$	$\beta_6 = 85^\circ 12'$	$\beta_5 = 95^\circ$	$\beta_4 = 86^\circ$	$\beta_3 = 95^\circ$	$\beta_2 = 86^\circ$	$\beta_1 = 95^\circ$	air
$n_s = 1{,}52$	$n_1 = 2{,}35$	$n_2 = 1{,}35$	$n_1 = 2{,}35$	$n_2 = 1{,}35$	$n_1 = 2{,}35$	$n_2 = 1{,}35$	$n_1 = 2{,}35$	$n_0 = 1$

Il eut été désirable, pour avoir le facteur de réflexion le plus élevé possible, que $\beta_i = 90^\circ$. Voici les facteurs de réflexion que l'on obtient après avoir déposé sur le verre une, deux, trois, etc... couches minces avec les valeurs de β_i que nous venons d'indiquer et, en regard, les valeurs des mêmes quantités lorsque tous les β_i valent 90°.

$R_1 = 0{,}316$	$R_1 = 0{,}323$
$R_2 = 0{,}1063$	$R_2 = 0{,}1101$
$R_3 = 0{,}6894$	$R_3 = 0{,}6946$
$R_4 = 0{,}5058$	$R_4 = 0{,}5125$
$R_5 = 0{,}8843$	$R_5 = 0{,}8870$
$R_6 = 0{,}7994$	$R_6 = 0{,}8035$
$R_7 = 0{,}9601$	$R_7 = 0{,}9612$

On constate que les valeurs de R contenues dans la 1re colonne sont un peu plus faibles que celles de la 2e colonne, ce qui est normal, car $R(\beta_i)$ est extrémum lorsque tous les β_i valent 90°. Ce qui est plus important, c'est de constater que, pour sept couches, la différence entre les deux valeurs de R n'atteint que 0,001. Ceci provient du fait, déjà connu, que si les $\beta_i = 90^\circ + \Delta_i$, les Δ_i étant très petits, R ne varie pas au premier ordre près ; ses variations sont de l'ordre des Δ_i^2.

Examinons maintenant les déphasages par réflexion. Si tous les $\beta_i = 90^\circ$, δ_r et $\delta_{r'}$ sont égaux à 0° ou à 180°. Dans les cas correspondant aux valeurs de R contenues dans la première colonne ci-dessus, on trouve :

Nombre de couches	1	2	3	4	5	6	7
δ_r	180° — 5°41′	2°07′	180° — 3°48′30″	3°52′	180° — 3°34′	4°19′	180° — 3°29′
$\delta_{r'}$	180° — 12°14′	— 0°57′	180° — 6°47′	1°46′	180° — 5°41′	2°35′	180° — 5°30′

On en tire les conclusions suivantes :

a) Lorsqu'il y a un nombre impair de couches, δ_r et $\delta_{r'}$ tendent vers 180° à mesure que le nombre des couches augmente.

b) Lorsqu'il y a un nombre pair de couches, δ_r et $\delta_{r'}$ augmentent avec le nombre des couches.

Lorsque toutes les couches ont la même épaisseur optique, telle que $\beta_i = 90^\circ$, on sait que, si l'on

néglige la dispersion, $dR/d\sigma = 0$. Ceci n'est plus vrai si l'on tient compte de la dispersion. Soit $T = 1 - R$ le facteur de transmission, et soit $2p + 1$ le nombre total de couches. On trouve que

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{4n_0 n_s}{T}\right) = 2 \times \left[\left(\frac{n_0 n_s}{n_1} + n_1\right) S_p + \left(\frac{n_0 n_s}{n_2} + n_2\right) S_{p-1}\right] \times \left[\left(\frac{n_0 n_s}{n_1} + n_1\right)\frac{dS_p}{d\sigma} + \left(\frac{n_0 n_s}{n_2} + n_2\right)\frac{dS_{p-1}}{d\sigma} + \left(1 - \frac{n_0 n_s}{n_1^2}\right) S_p \frac{dn_1}{d\sigma} + \left(1 - \frac{n_0 n_s}{n_2^2}\right) S_{p-1}\frac{dn_2}{d\sigma}\right]. \quad (6)$$

Nous avons posé

$$S_p = (-1)^p \frac{N^{p+1} - N^{-(p+1)}}{N - N^{-1}}$$

et

$$\frac{dS_{p-1}}{d\sigma} = \frac{-(p-1)S_p + (p+1)S_{p-2}}{N - N^{-2}} \times \left(\frac{1}{n_1}\frac{dn_1}{d\sigma} - \frac{1}{n_2}\frac{dn_2}{d\sigma}\right),$$

avec $N = n_1/n_2$.

Dans le cas de l'exemple numérique que nous envisageons, on trouve d'après (6) que

$$\left(\frac{dT}{d\sigma}\right)_{\beta_i = 90^\circ} = -0{,}031 = -\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)_{\beta_i = 90^\circ} \quad (\text{avec } \sigma \text{ en } \mu^{-1}).$$

Ceci montre que le maximum de $R(\sigma)$ a lieu pour une longueur d'onde inférieure à celle pour laquelle toutes les couches ont la même épaisseur optique (dans notre cas, cette dernière est $\lambda = 500$ mμ). Toutefois, il faut remarquer que $dR/d\sigma$ a une valeur très faible ; la valeur du maximum de $R(\sigma)$ est peu différente de celle obtenue pour $\sigma = 2\ \mu^{-1}$.

2.2. — Examinons maintenant la pente de la courbe $\delta_r(\sigma)$. On trouve, toujours au voisinage de $\lambda = 500$ mμ, que dans le cas du système de sept couches envisagé

$$\frac{d\delta_r}{d\sigma} = -102{,}7\ \mu \times \text{degrés}.$$

Si les sept couches avaient toutes la même épaisseur optique ($\beta_i = 90^\circ$), nous aurions, en négligeant la dispersion :

$$\frac{d\delta_r}{d\sigma} = \frac{d\delta_r}{d\beta_i} \times \frac{d\beta_i}{d\sigma} = \frac{d\delta_r}{d\beta_i} \times \frac{\beta_i}{\sigma} = -1{,}9295 \times \frac{90^\circ}{2} = -86{,}8\ \mu \times \text{degrés}.$$

Si l'on tient compte de la dispersion, le problème est plus compliqué. En première approximation, nous poserons $\partial\delta_r/\partial n_1 = 0$. Alors,

$$\frac{d\delta_r}{d\sigma} = \frac{\partial\delta_r}{\partial\beta_1}\frac{d\beta_1}{d\sigma} = \frac{d\delta_r}{\partial\beta_1}\left(\frac{1}{n_1} \times \frac{dn_1}{d\sigma} + \frac{1}{\sigma}\right)\beta_1 = 1{,}9295 \times 0{,}60213 \times 90^\circ = -104{,}6\ \mu \times \text{degrés}.$$

Ceci suppose que l'on sache calculer $d\delta_r/d\beta_i$; or des formules permettant le calcul de cette quantité ont déjà été indiquées par plusieurs auteurs.

Voici maintenant, indiquée probablement pour la première fois, l'expression de $d\delta_r/d\sigma$ lorsque tous les $\beta_i = 90^\circ$. On trouve que :

$$\frac{d\delta_r}{d\sigma} = 2n_0 \frac{\left(\frac{n_s^2}{n_1} - n_1\right) S_n + \left(\frac{n_s^2}{n_2} - n_2\right) S_{n-1}}{n_0^2 n_s^2 \left(\frac{S_n}{n_1} + \frac{S_{n-1}}{n_2}\right)^2 - (n_1 S_n + n_2 S_{n-1})^2} \times \left(S_{n-1}\frac{d\beta_2}{d\sigma} - S_n \frac{d\beta_1}{d\sigma}\right). \quad (7)$$

Nous avons supposé qu'il s'agit d'un système de $2n + 1$ couches alternées d'indices n_1 et n_2 et avons posé $N = n_1/n_2$. Nous avons supposé qu'on pouvait avoir à tenir compte à la fois de la dispersion des deux substances dont sont faites les couches. Alors

$$\frac{d\beta_i}{d\sigma} = \beta_i\left(\frac{1}{n_i} \times \frac{dn_i}{d\sigma} + \frac{1}{\sigma}\right) \qquad (i = 1, 2).$$

avec $\beta_1 = \beta_2 = 90^\circ$.

On comparera la relation (7) à celle que nous avons obtenue ailleurs en négligeant la dispersion des couches (donc avec les $\beta_i = \beta$). Nous avions trouvé

$$\frac{d\delta_r}{d\sigma} = 2n_0 \frac{\left(\frac{n_s^2}{n_1} - n_1\right) S_n + \left(\frac{n_s^2}{n_2} - n_2\right) S_{n-1}}{n_0^2 n_s^2 \left(\frac{S_n}{n_1} + \frac{S_{n-1}}{n_2}\right)^2 - (n_1 S_n + n_2 S_{n-1})^2} \times (S_{n-1} - S_n)\frac{d\beta}{d\sigma}, \quad (7')$$

lorsqu'il y avait $2n + 1$ couches minces alternées.

Dans le cas d'un très grand nombre de couches ($n \to \infty$), on avait, en négligeant la dispersion

$$\lim_{n=\infty} \frac{d\delta_r}{d\sigma} = \frac{2n_0}{n_2 - n_1} \times \frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{2n_0}{n_2 - n_1} \times \frac{\pi}{2\sigma}, \quad (8')$$

tandis que le passage à la limite à partir de (7) conduit à

$$\lim_{n=\infty} \frac{d\delta_r}{d\sigma} = \frac{2n_0}{n_2 - n_1} \times \frac{\pi}{2\sigma}\left(1 + \frac{\sigma}{n_1 + n_2}\frac{dn_1}{d\sigma}\right)$$

(en supposant $dn_2/d\sigma = 0$). (8)

Reprenons maintenant la relation (8′) et tenons compte de la dispersion uniquement dans $d\beta/d\sigma$. On trouve

$$\lim_{n=\infty} \frac{d\delta_r}{d\sigma} = \frac{2n_0}{n_2 - n_1} \times \frac{\pi}{2\sigma}\left(1 + \frac{\sigma}{n_1} \times \frac{dn_1}{d\sigma}\right)$$

(toujours en supposant $dn_2/d\sigma = 0$). (8″)

On constate qu'il y a moins d'écart entre (8′) et (8) qu'entre (8′) et (8″).

Dans le cas de l'exemple numérique envisagé, la relation (7) conduit à

$$d\delta_r/d\sigma = -98{,}2 \text{ en degrés} \times \mu.$$

On constate que si l'on ne tient compte que de l'influence de la dispersion sur les β_i, on trouve, dans le cas de notre exemple, qu'il y a une différence de 20 % en valeur relative avec la valeur obtenue pour $d\delta_r/d\sigma$ lorsqu'on ne tient pas du tout compte de la dispersion. Ceci provient de ce que, dans un cas $d\beta_1/d\sigma = \beta_1/\sigma = 0{,}5\ \beta_1$ (avec λ en μ) et dans l'autre $d\beta_1/d\sigma = 0{,}60213\ \beta_1$ (toujours avec λ en μ).

On remarquera toutefois que le calcul rigoureux effectué à l'aide de la formule (7) conduit à une valeur de $d\delta_r/d\sigma = -98{,}2$ au lieu de $-86{,}8$ obtenue en négligeant la dispersion (erreur relative de 12 %).

Autre fait important à remarquer, toujours dans le cas de l'exemple considéré, mais qui est tout à fait général. Lorsque les épaisseurs optiques de toutes les couches ne sont pas égales pour $\lambda = 500$ mμ, mais ont les valeurs indiquées page 330, nous avons trouvé que $d\delta_r/d\sigma = -102{,}7$ valeur très peu différente de celle obtenue en supposant les $\beta_i = 90^\circ$ pour $\lambda = 500$ mμ et en tenant compte de la dispersion (erreur relative : environ 4,5 %). L'influence de faibles écarts des β_i de la valeur 90° est nettement plus petite que l'influence de la dispersion sur $d\delta_r/d\sigma$.

Dans le cas de notre exemple numérique, l'application de (8) conduit à

$$\lim_{n=\infty} \frac{d\delta_r}{d\sigma} = -101^\circ 7 \qquad (\mu \times \text{degrés})$$

tandis que (8″) donne

$$\lim_{n=\infty} \frac{d\delta_r}{d\sigma} = -108^\circ 4 \qquad (\mu \times \text{degrés}).$$

On remarquera que lorsqu'on passe de 7 couches à un nombre infini de couches et qu'on tient compte de la dispersion, $d\delta_r/d\sigma$ passe de $-98{,}2$ à $-101{,}7$ ce qui est une différence faible. Ce résultat était connu lorsqu'on négligeait la dispersion ; il reste valable même lorsqu'on en tient compte.

2.3. — On sait que, si l'on néglige la dispersion, le facteur de réflexion d'un système de couches alternées garde une valeur élevée dans un certain domaine de longueurs d'onde, que nous appellerons zone de réflexion. Les limites de celle-ci sont fournies, lorsque tous les β_i sont égaux entre eux, donc lorsqu'on néglige la dispersion, par la relation

$$\cos^2 \beta = [(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)]^2.$$

Lorsque toutes les couches ont la même épaisseur optique $\beta_i = 90^\circ$ pour une seule longueur d'onde seulement, c'est-à-dire lorsqu'on tient compte de la dispersion, les limites de la bande de réflexion sont fournies par la relation

$$2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}\right) \sin \beta_1 \sin \beta_2 = -2.$$

On vérifie que la dispersion diminue généralement la largeur de la bande de réflexion.

Prenons maintenant l'exemple numérique que nous avons déjà envisagé. Si l'on néglige la dispersion, les limites de la zone de réflexion correspondent à

$$\cos \beta = \pm \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right) = \pm\ 0{,}27027,$$

ce qui montre que celle-ci est comprise entre $\lambda_1 = 425{,}8$ mμ et $\lambda_2 = 605{,}5$ mμ. Pour ces longueurs d'onde, le facteur de réflexion serait, toujours en négligeant la dispersion, $R_7 = 0{,}8552$. Le déphasage par réflexion pour ces longueurs d'onde est $\delta_{r,7} = 180^\circ \pm 37^\circ 53'$.

Supposons maintenant que $\beta_i = 90^\circ$ pour $\lambda = 500$ mμ et tenons compte de la dispersion. On trouve alors que pour $\lambda = 425{,}8$ mμ, $R_7 = 0{,}8394$ et $\delta_{r,7} = 180^\circ - 38^\circ 57'$, tandis que pour

$\lambda = 605{,}5$ mμ, $R_7 = 0.7412$ et $\delta_{r,7} = 180^\circ + 40^\circ 46'$.

Supposons maintenant que les couches ont été contrôlées à l'aide du maximètre ($\beta_1 = 95^\circ$, $\beta_2 = 86^\circ$, ... etc... pour $\lambda = 500$ mμ) et tenons compte de la dispersion. On trouve que pour

$$\lambda = 425{,}8 \text{ m}\mu, \quad R_7 = 0.7783$$

et $\delta_{r,7} = 180^\circ - 51^\circ 08'30$, tandis que pour

$\lambda = 605{,}5$ mμ, $R_7 = 0.7806$ et $\delta_{r\,7} = 180^\circ + 43^\circ 54'$.

Ceci nous permet de tirer plusieurs conclusions qui sont applicables aussi à des cas différents de l'exemple numérique choisi :

a) Lorsque les couches ont été contrôlées pendant leur préparation à l'aide du maximètre, la courbe $R(\sigma)$ est symétrique dans un certain intervalle de nombres d'onde par raport à la droite $\sigma = \sigma_0$, σ_0 étant le nombre d'ondes pour lequel R est maximum. Dans notre exemple numérique $\lambda = 425{,}8$ mμ et $\lambda = 605{,}5$ mμ correspondent à $\sigma = (2 \pm 0{,}3485)\,\mu^{-1}$, et les valeurs de R_7 correspondantes sont presque égales (0,778 et 0,781).

b) Lorsque les couches ont été préparées de façon à avoir $\beta_i = 90^\circ$ pour une certaine longueur d'onde $\lambda_0 (\sigma_0 = 1/\lambda_0)$, désignons par R' les facteurs de réflexions correspondants. On a

$$R'_{2p+1}(\sigma_0 + \Delta\sigma) > R_{2p+1}(\sigma_0 + \Delta\sigma)$$

et

$$R'_{2p+1}(\sigma_0 - \Delta\sigma) < R_{2p+1}(\sigma_0 - \Delta\sigma).$$

c) Lorsque les couches alternées sont telles que $\beta_i = 90^\circ$ pour λ_0, la dispersion a pour effet de diminuer les facteurs de réflexion à mesure qu'on s'éloigne de λ_0. Ceux-ci diminuent même si l'on néglige la dispersion ; l'effet de la dispersion est d'accentuer cette diminution des facteurs de réflexion.

d) Les effets de la dispersion sur le déphasage par réflexion δ_r sont assez peu marqués lorsque $\beta_i = 90°$ pour λ_0. Dans le cas de notre exemple numérique, pour $\lambda = 605{,}5$ mμ, $\delta_{r,7}$ est passé de $180° + 37°55'$ à $180° + 40°46'$.

e) Le contrôle des couches au maximètre a un effet plus important sur les δ_r et, d'autre part, on a

$$180° - \delta_r(\sigma_0 + \Delta\sigma) \neq \delta_r(\sigma_0 - \Delta\sigma).$$

3. **Conclusion.** — Essayons de dégager maintenant les principaux résultats obtenus dans ce travail. Ils concernent le cas d'une seule couche mince non absorbante et le cas d'un systèmes de lames minces alternées.

Le premier problème a été traité de façon assez approfondie, à la fois pour l'incidence normale et pour l'incidence oblique. Nous avons montré comment on pouvait relier la position du maximum de $R(\sigma)$ à l'épaisseur optique de la couche, quel que soit l'angle d'incidence sur la couche. Nous avons examiné aussi l'influence de la dispersion sur les déphasages par réflexion ε_r et $\varepsilon_{r'}$ sur une couche non-aborbante. (On sait que le déphasage par transmission n'est pas indépendant de ε_r et $\varepsilon_{r'}$, ce qui explique pourquoi nous n'en avons pas parlé.)

La question d'une seule couche mince non-absorbante étant discutée, nous avons envisagé le cas qui se présente lors de la préparation de miroirs semi-transparents pour interféromètres de Fabry-Perot à l'aide du maximètre de MM. Giacomo et Jacquinot. Dans le cas d'un système de couches ZnS-cryolithe, préparé de façon à être utilisé au voisinage de $\lambda = 5\,000$ Å, nous avons montré que les épaisseurs des couches de ZnS les plus éloignées du support sont telles que $\beta = 95°$, tandis que celles des couches de cryolithe adjacentes correspondent à $\beta = 86°$. Il ne nous a pas été possible, dans ce qui précède, de trouver une expression simple pour les valeurs limites de β, quoique, apparemment, de telles valeurs existent. Nous avons indiqué les valeurs des facteurs de réflexion et des déphasages obtenus avec un système analogue tel que $\beta_i = 90°$. Nous avons indiqué une expression simple permettant de calculer $d\delta_r/d\sigma$ pour des couches telles que $\beta_i = 90°$, lorsqu'on tient compte de la dispersion. Nous avons examiné aussi ce qui se passe aux limites de la bande de réflexion : *a*) pour des couches $\beta_i = 90°$ sans tenir compte de la dispersion ; *b*) pour des couches $\beta_i = 90°$ en tenant compte de la dispersion ; *c*) pour des couches préparées à l'aide du maximètre, à la fois en ce qui concerne le facteur de réflexion et le déphasage par réflexion. Enfin nous avons indiqué l'expression de la pente de la courbe $R(\sigma)$ lorsque $\beta_i = 90°$ et que l'on tient compte de la dispersion.

Il résulte de ce qui précède que l'utilisation du maximètre risque de fournir des couches dont l'épaisseur optique n'est pas $\lambda/4$. D'après les calculs que nous avons indiqués plus haut, on pourra éviter ceci, dans le cas d'une seule couche tout au moins, en réglant le maximètre pour une longueur d'onde légèrement inférieure à celle pour laquelle on désire travailler. Lorsqu'il s'agit de miroirs à couches multiples pour interféromètre de Fabry-Perot, l'utilisation du maximètre nous paraît présenter un avantage certain. Dans ce cas, la courbe donnant $R(\lambda)$ présente une parfaite symétrie par rapport à la droite $\lambda = \lambda_0$ (λ_0 est la longueur d'onde d'utilisation du miroir), ce qui n'était pas le cas pour les couches telles que $\beta_i = 90°$ pour λ_0. Dès qu'il s'agit d'un système de 5 couches, le facteur de réflexion du miroir préparé à l'aide du maximètre et celui du miroir correspondant à $\beta_i = 90°$ sont pratiquement égaux. Disons donc, pour terminer, que l'utilisation du maximètre pour la préparation de miroirs multidiélectriques pour interféromètre de Fabry-Perot se justifie pleinement, même lorsqu'on tient compte de la dispersion des couches de haut indice.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hall (J. F.) et Ferguson (W. F. C.), *J. Opt. Soc. Amer.*, 1955, **45**, 74.

[2] Kuwabara (G.) et Ishiguro (K.), *J. Phys. Soc.*, Japan, 1952, **7**, 72.

[3] Koppelmann (G.) et Krebs (K.), *Z. Physik*, 1956, **145**, 486.

[4] Giacomo (P.) et Jacquinot (P.), *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 59 A.

DISCUSSION

P. H. Lissberger. — J'ai eu également l'occasion de constater l'importance de la dispersion dans les couches multiples au cours de mesures sur les filtres interférentiels. Il s'agit de mesures de déplacement de la bande passante en fonction de l'incidence, résumées dans le tableau ci-joint.

Ordres	Valeurs expérimentales		Valeurs théoriques		
n	λ_0	$\frac{P}{1-Q}$	P	$-Q$	$\frac{P}{1-Q}$
	A_0				
1	4 542	0,268	0,306	0,137	0,269
2	4 523	0,246	0,263	0,160	0,227
2	4 507	0,240	»	»	»
3	4 497	0,199	0,241	0,173	0,205
3	4 493	0,196	»	»	»
5	4 506	0,181	0,217	0,185	0,183
3	6 558	0,249	0,259	0,074	0,241

La relation théorique entre l'incidence θ et le déplacement $\delta\lambda$ est de la forme $\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} = -\frac{P}{1-Q}\frac{\theta^2}{2}$ où Q est un terme correctif dû à la dispersion. Les dépla-

cements observés sont en bon accord avec les valeurs calculées par cette formule si l'on prend pour Q une valeur convenable non nulle.

J. Ring. — Avez-vous calculé l'effet de la dispersion dans le cas où l'on contrôle les couches réfléchissantes pendant l'évaporation avec le dispositif différentiel de Ring et Wilcock (*Opt. Act.*, 1955, **2**, 43) ou de P. Glacomo et P. Jacquinot (*J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 59 A). On observe en effet des différences systématiques entre ces méthodes et les méthodes utilisant une mesure à longueur d'onde fixe.

F. Abelès. — La méthode la plus correcte de ce point de vue semble être la méthode à longueur d'onde fixe.