

Sur l'utilisation des pseudo-tenseurs en physique

Théodore Vogel

▶ **To cite this version:**

Théodore Vogel. Sur l'utilisation des pseudo-tenseurs en physique. Journal de Physique et le Radium, 1957, 18 (2), pp.81-84. 10.1051/jphysrad:0195700180208100 . jpa-00235630

HAL Id: jpa-00235630
https://hal.science/jpa-00235630

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

SUR L'UTILISATION DES PSEUDO-TENSEURS EN PHYSIQUE

Par THÉODORE VOGEL,
Centre National de la Recherche Scientifique, C. R. S. I. M., Marseille.

1. **Introduction.** — La physique se construit au moyen des observables, c'est-à-dire de grandeurs lues sur des appareils de mesure, et que l'on rattache aux différents phénomènes grâce à une correspondance qui constitue un postulat. Certains des observables sont, pour les besoins de la description des phénomènes, considérés comme des variables indépendantes, et leur ensemble constitue l'espace de représentation : ce sera souvent l'espace géométrique « réel », par exemple lorsqu'il s'agira d'étudier comment une qualité physique est répartie ou se propage dans l'espace ; ce pourra aussi être un espace abstrait, comme lorsqu'on étudiera les variations de quelque grandeur « en fonction » de la température, du volume, de la concentration... De toutes façons, l'état du système considéré en un point de l'espace de représentation sera caractérisé par un tableau de nombres, constituant une fonction de point.

On constate que tous les observables rencontrés en physique sont représentés, soit par un nombre unique, soit par un jeu de n nombres (n au plus égal au nombre de dimensions de l'espace) : ce qui suggère leur représentation mathématique par des scalaires pour la première catégorie, par des vecteurs pour la seconde ; mais un examen plus attentif de la façon dont ces nombres se transforment lors d'un changement de repère fait apparaître certaines difficultés, ce qui a conduit de nombreux auteurs à distinguer des scalaires, des pseudo-scalaires de sortes différentes, des vecteurs et des pseudo-vecteurs,... Or le comportement d'un être de la physique mathématique lors d'un changement de repère est un caractère très important, d'une part parce que toute mesure est faite par rapport à un certain repère, et que de l'autre nous avons le sentiment (au moins en macrophysique) que les relations entre les observables traduisent une réalité profonde, extrinsèque aux observations faites, et qui doit par conséquent être finalement mise sous une forme indépendante du repère utilisé par l'observateur. On ne peut donc écarter comme sans importance le fait que certains observables ne se transforment pas comme d'autres qui leur ressemblent par ailleurs ; mais il est essentiel également de tendre vers l'économie et la simplicité maxima des moyens mathématiques utilisés, et de ne pas évoquer à l'existence des catégories d'êtres dont il serait possible de se passer. C'est sous ce double jour que nous allons examiner la question des pseudo-tenseurs.

2. **Tenseurs vrais.** — Pour rendre compte des grandeurs qui ne changent pas lors d'un changement de repère, de celles qui se transforment comme les vecteurs de la géométrie élémentaire, c'est-à-dire comme des segments de droite orientés, et de celles qui peuvent être considérées comme des opérateurs transformant un vecteur en un autre vecteur non nécessairement colinéaire, il suffit d'une seule catégorie d'êtres, et de la plus simple imaginable : celle des tenseurs.

Un tenseur d'ordre q dans un espace à n dimensions est un être à n^q composantes, traditionnellement dénotées par une même lettre suivie de q indices, les uns au-dessus, les autres au-dessous de la ligne, chaque indice pouvant prendre les valeurs numériques $1, 2, \ldots, n$. Lorsque, par suite d'un changement de repère, les coordonnées x^i sont remplacées par les $x'^j = x'^j(x^1, \ldots, x^n)$, le jacobien de cette transformation étant $\|a^i_j\|$, chaque nouvelle composante du tenseur est une forme multilinéaire de toutes les anciennes composantes et des a^i_j (pour les indices supérieurs) ou de leurs inverses (pour les indices inférieurs).

L'algèbre tensorielle connaît trois opérations : l'*addition*, qui porte sur des tenseurs de même ordre et de même disposition d'indices (ou « variance »), et qui crée un tenseur de même ordre et de même variance ; la *multiplication*, qui crée un tenseur

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:0195700180208100

dont l'ordre est la somme des ordres des facteurs, et où chaque indice de ceux-ci se retrouve avec sa variance :

$$t^{\alpha\ldots\beta\ldots a\ldots b\ldots} = p^{\alpha\ldots\beta\ldots} q^{a\ldots b\ldots}$$

et la *contraction*, qui diminue de deux unités l'ordre d'un tenseur s'il comporte deux indices de variances contraires ; les composantes du tenseur contracté s'obtiennent en donnant au couple d'indices à éliminer les mêmes valeurs, et en sommant sur toutes les valeurs possibles ; on dénote simplement la contraction, pour alléger l'écriture, en attribuant le même symbole aux deux indices par rapport à quoi l'on somme. Ainsi,

$$t^{\alpha\beta}_{\alpha} \equiv t^{1\beta}_{1} + t^{2\beta}_{2} + \ldots + t^{n\beta}_{n},$$

obtenu par contraction d'un tenseur du 3e ordre, est visiblement un tableau de n nombres dépendant du seul indice β, formant un tenseur d'ordre 1.

Les scalaires vrais sont des tenseurs d'ordre 0, les vecteurs de la géométrie élémentaire — des tenseurs d'ordre 1 ; il apparaît que la transformation d'un vecteur en un autre peut s'exprimer comme son produit par un tenseur d'ordre 2 de variance convenable, suivi d'une contraction :

$$u^i\, t^j_k \longrightarrow u^i\, t^j_i = v^j ;$$

c'est comme opérateurs de cette sorte que les tenseurs du second ordre apparaissent généralement en physique.

D'après ce qui a été dit dans l'introduction, on cherchera toujours à ramener l'expression des lois physiques à des relations entre invariants (donc, entre scalaires) ; si les observables qui interviennent sont des vecteurs, on cherchera donc à introduire des produits contractés tels que $u^i\, v_i$, $t_{ij}\, u^i\, v^j$, etc. En particulier, la seconde de ces expressions est d'un type qui se rencontrera fréquemment dans un espace métrique, c'est-à-dire dans un espace où l'on peut attribuer une signification à la distance entre deux points. (Ce ne sera évidemment pas le cas de certains espaces de représentation, par exemple du plan p, v des pressions et des volumes dans la théorie des fluides compressibles : de tels espaces sont « affines »). Si l'espace est métrique, on peut définir le carré de la distance entre deux points voisins par la forme différentielle fondamentale (scalaire)

$$(ds)^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j ;$$

ici, g_{ij} est un tenseur covariant dit tenseur métrique fondamental ; le contracte $g_{ij}\, dx^i$ est un vecteur covariant, attaché au vecteur contravariant dx^j, et qu'on peut considérer comme représentant, d'une manière différente, le même être géométrique ; si on le dénote dx_j, $(ds)^2$ se présente comme le produit contracté ou scalaire de $\vec{dx}$ par lui-même, et l'on rejoint les résultats de la géométrie vectorielle élémentaire.

Au tenseur covariant g_{ij}, on peut attacher de même un tenseur contravariant g^{ij} tel que le contracte scalaire $g_{ij}\, g^{ij}$ soit égal à 1 : alors $g^{ij}\, dx_j$ est le tenseur contravariant du premier ordre dx^i. Les deux tenseurs métriques $g_{..}$ et $g^{..}$ permettent ainsi de changer la variance d'un vecteur qui conserve son identité géométrique : cette variance apparaît ainsi comme extrinsèque dans un espace métrique, d'intrinsèque qu'elle était dans l'espace affine.

Toutes les questions liées aux rotations font intervenir le sens de la rotation, donc l'orientation du repère. Les expressions que l'on rencontrera dans ces questions doivent donc logiquement être construites à partir, d'une part, des êtres qui représentent les grandeurs physiques extrinsèques, et, de l'autre, d'un être lié au repère et exprimant son orientation (c'est-à-dire établissant un ordre dans la séquence des coordonnées). Cet être sera de préférence un tenseur, pour ne pas créer de catégorie nouvelle ; il sera d'ordre n égal au nombre de dimensions de l'espace ; et ses composantes changeront de signe lorsqu'on permutera l'ordre de deux coordonnées : ce sera donc un tenseur « complètement antisymétrique » d'ordre n, ou n-vecteur, soit

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij\ldots n} &= K \text{ si la permutation i, j, ... n est paire ;} \\ &= -K \text{ si elle est impaire ;} \\ &= 0 \text{ si elle comporte une répétition.} \end{aligned}$$

La valeur numérique K (« composante stricte » du tenseur ε, dans le langage de l'algèbre extérieure) pourra utilement être choisie égale à $\sqrt{\text{dét}(g_{\alpha\beta})}$; les composantes de notre tenseur seront alors les jacobiens du repère par rapport à un système d'axes cartésien « absolu ».

Le procédé usuel de multiplication contractée par les $g^{\alpha\beta}$ permet de définir de même le tenseur contravariant $\varepsilon^{ij\ldots n}$ dont les composantes valent $\pm 1/\sqrt{\text{dét}\ (g_{\alpha\beta})}$ ou 0. Lors d'un changement de variables $x^i \longrightarrow x'^j$, on aura

$$\varepsilon^{1\ldots n}\, \varepsilon'_{1\ldots n} = \frac{D(x^i)}{D(x'^j)} \text{ jacobien de la transformation.}$$

Applications : 1° L'élément de volume construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... $\vec{z}$ sera avec ces notations

$$V = \varepsilon_{ij\ldots n}\, u^i\, v^j \ldots z^n,$$

d'où le nom de « tenseur d'élément de volume » donné à ε. Dans E_3, l'élément de surface construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera, de même, représenté par le vecteur

$$\sigma_k = \varepsilon_{ijk}\, u^i\, v^j.$$

2° Faisons tourner dans son plan et autour de son origine le vecteur $\vec{r}$: la vitesse de son extrémité sera un vecteur $\vec{v}$, et l'on pourra passer de l'un à

l'autre par l'opération tensorielle formelle

$$v_i = t_{ij}\, r^j.$$

Le sens de $\vec{v}$ devant dépendre de celui de la rotation, il faut mettre en évidence dans t le tenseur ε, soit

$$t_{ij} \equiv \varepsilon_{ijk}\, \omega^k\ ; \qquad v_i = \varepsilon_{ijk}\, r^j\, \omega^k.$$

$\vec{\omega}$ est la vitesse « angulaire ».

3° Si, au lieu de considérer la dérivée d'un vecteur par rapport au temps, on prenait sa dérivée spatiale (covariante), qui est un tenseur du second ordre $t^{ij} = \nabla^i r^j$, on pourrait de même construire un vecteur différentiel qui dépende du sens de rotation, grâce à la multiplication contractée par le tenseur ε : cet être,

$$v_k = \varepsilon_{ijk}\, \nabla^i r^j$$

est le rotationnel de $\vec{r}$. Il est nul si $\vec{r}$ a lui-même la nature d'une dérivée spatiale, $r^j = \partial^j a$, du fait que la dérivée seconde $\nabla\partial$ est symétrique.

3. **Pseudo-tenseurs.** — Nous venons de rencontrer plusieurs êtres d'un usage constant en physique, et que nous avons construits au moyen : *a*) d'éléments extrinsèques tensoriels, *b*) d'un tenseur attaché au repère et caractérisant son orientation. Les êtres ainsi obtenus sont des tenseurs et en suivent les lois, mais lorsqu'on change de repère l'un de leurs constituants est remplacé par un autre, qui joue le même rôle auprès du nouveau repère.

Cette façon de présenter les choses n'est pas la seule, ni même la plus courante parmi les physiciens. En effet, on cherche souvent à éviter l'introduction de tenseurs du 3e ordre, dont il est moins aisé de donner une notion imagée ; et l'on profite du fait — particulier à l'espace tridimensionnel — que les composantes d'un tenseur antisymétrique du second ordre, considéré comme bivecteur, sont au nombre de trois, comme les composantes tensorielles vraies d'un vecteur. On associe donc un vecteur à ce tenseur, et on ne fait intervenir explicitement dans les formules que ce vecteur « adjoint ». Ceci entraîne des difficultés, du fait que le vecteur adjoint ne se transforme pas comme un vecteur mais comme le tenseur du second ordre qu'il représente : d'où la nécessité de dénominations et de notations particulières (vecteur « axial », $\overset{\frown}{v}$), et celle de bien distinguer la nature des êtres dont les constituants sont des vecteurs et des pseudo-vecteurs.

Ainsi, à l'expression $\varepsilon_{ijk}\, u^i\, v^j$ on substitue le pseudo-vecteur « produit vectoriel » $\overset{\frown}{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, de composantes $u^2\, v^3 - u^3\, v^2$, $u^3\, v^1 - u^1\, v^3$, $u^1\, v^2 - u^2\, v^1$, et dont l'orientation change avec celle du repère suivant une règle qu'il faut se rappeler (règles des trois doigts, du tire-bouchon, etc.) ; la vitesse angulaire, le rotationnel, sont représentés par des pseudo-vecteurs ; etc.

Le déterminant des $g_{..}$ n'a aucune raison de figurer dans la constitution d'êtres à qui l'on s'est attaché à donner une apparence extrinsèque (d'ailleurs trompeuse, puisqu'on sera amené à leur attribuer un comportement qui dépendra du repère). On écrit donc l'élément de surface sous la forme $\mathrm{d}\overset{\frown}{\sigma} = \mathrm{d}\vec{u} \wedge \mathrm{d}\vec{v}$, et l'on constate que lors d'un changement de repère il faut multiplier les anciennes composantes par le jacobien de la transformation. De même, l'élément de volume est défini, sans expliciter les caractéristiques du repère, comme le produit scalaire du vecteur hauteur élémentaire par l'élément de surface servant de base : $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\vec{u}.\mathrm{d}\vec{v} \wedge \mathrm{d}\vec{w}$; un changement de repère entraîne la multiplication de la valeur numérique de $\mathrm{d}V$ par le jacobien de la transformation.

Nous avons donc rencontré ici des êtres qui ont le comportement suivant : ils se transforment comme des scalaires ou des vecteurs, sauf un changement de signe lorsqu'on change l'orientation du repère autrement conservé, et une multiplication par le jacobien de la transformation lorsque tout le repère est transformé. Ces pseudo-scalaires et pseudo-vecteurs reçoivent le nom de « capacités scalaires et vectorielles ».

Dès que l'on introduit les capacités, on est naturellement amené à envisager d'autres êtres, qui se transforment par multiplication par les inverses des jacobiens : ce seront les « densités scalaires, ou vectorielles ». Le produit d'une capacité par une densité fait visiblement disparaître l'anomalie, et constitue un tenseur vrai. Allant plus loin, on a dénommé « poids » d'un pseudo-tenseur la puissance à laquelle figure le jacobien dans la formule de transformation : ce poids est 0 pour les tenseurs vrais, $\pm$ 1 pour les densités et capacités, 2 pour le produit de deux capacités, par exemple ; etc. Un exemple de densité scalaire de poids 2 est donné part $\det(g_{..})$; dès lors, $\sqrt{\det(g_{..})}$ est une densité de poids 1, et son produit par une capacité est bien un tenseur.

Mais ceci n'épuise pas les catégories d'êtres nouveaux dont nous avons besoin en physique : en effet, certaines grandeurs sont liées à l'élément de volume, par exemple, mais non à l'orientation des axes ; telle est la densité de masse. On doit donc considérer aussi des « densités et capacités absolues ».

En somme, on a été amené à mettre en jeu au moins trois classes d'êtres mathématiques : les tenseurs, les pseudo-tenseurs « relatifs », sensibles à la configuration du repère et à son orientation, les pseudo-tenseurs « absolus », sensibles à la configuration mais non à l'orientation du repère. On ne peut supprimer l'une des deux dernières classes qu'en convenant de s'abstenir à jamais de certaines transformations d'axes, ce qui est difficilement admissible.

4. **Conclusions.** — Nous pouvons maintenant comparer, des points de vue de la cohérence, de la simplicité et de la sécurité, les deux algorithmes, l'un purement tensoriel, l'autre mixte, dont on voit l'équivalence quant au fond. Le premier ne fait intervenir que des êtres obéissant à des lois communes, le deuxième en crée d'au moins trois classes. Le premier explicite dans toutes les écritures l'orientation du repère lorsqu'elle joue un rôle, le second laisse cette orientation à l'arrière-plan parmi les conventions dont il faut se souvenir au moment opportun. Le premier nécessite l'écriture de nombreux indices, dont le second se passe en tout ou en partie. Le premier définit des êtres dont certains sont difficiles à « visualiser », le second se prête à des images géométriques parlantes.

Dans les relations entre tenseurs vrais, le contrôle de l'homogénéité de variance est immédiat, et suffit le plus souvent à éviter toute erreur ; lorsqu'on fait intervenir des pseudo-tenseurs, il faut encore faire attention à l'homogénéité de nature des êtres utilisés. A cet égard, certaines lois physiques ne sont pas faciles à mettre en forme : nous en prendrons un exemple, celui de la force de Lorentz en électromagnétisme.

1° Le champ électrique, orienté le long des lignes de courant indépendamment du repère, est un vecteur vrai, que l'on pourra considérer comme covariant ; la densité de charge électrique, qui donne un scalaire après intégration en volume, est une densité scalaire absolue. Le produit $\rho\vec{E}$ est donc une densité vectorielle absolue ; ce caractère doit donc être également celui de la force de Lorentz $\vec{F}$ et de son deuxième terme $\vec{I} \wedge \vec{B}$.

2° Mais $\vec{B}$ est de même nature que sa dérivée temporelle, donc que rot $\vec{E}$; et le rotationnel d'un vecteur vrai (covariant) peut être considéré comme une densité vectorielle contravariante, ou comme un bivecteur covariant.

3° Le déplacement $\vec{D}$, dont la divergence est la densité scalaire absolue ρ, doit être une densité vectorielle absolue, ainsi que sa dérivée temporelle ; donc $\rho\vec{I}$ est une telle densité (ainsi que rot $\vec{H}$), et $\vec{I}$ est un vecteur covariant, ou contravariant.

4° Le produit vectoriel d'un vecteur co- ou contravariant par une densité vectorielle contravariante est un trivecteur ou un vecteur covariant, donc un être qui n'est pas de la nature de F ; il faut donc que B soit un bivecteur covariant, et alors son produit vectoriel par I est bien une densité vectorielle absolue si I est pris contravariant. La formule donnant F est ainsi homogénéisée, et il ne reste plus qu'à déterminer la nature de H : on trouve que ce doit être une densité bivectorielle absolue.

Notons que pour arriver à la cohérence, il a fallu faire intervenir des êtres assez compliqués du second ordre, ce qu'on voulait éviter.

Comparons le point de vue purement tensoriel : Si le champ est un vecteur covariant E_j, son rotationnel sera le vecteur contravariant $\varepsilon^{ijk}\,\partial_i E_j$: l'induction magnétique sera donc de même nature, soit B^k. De même, ρ étant un scalaire, on prendra pour le déplacement l'expression D^k, pour le courant I^k ; dans l'expression de la force, la contraction de $I^i B^j$ multiplié par ε_{ijk} donne le vecteur F_k, homogène avec ρE_k.

On voit combien la vérification est ici directe, simple et sûre.

Nous terminerons sur l'observation suivante : on a souvent écrit, en suivant Maxwell, que les vecteurs de la physique devaient être rangés en deux catégories, selon qu'ils sont « définis » par leur circulation ou par leur flux : entendant par là, suivant que la grandeur la plus aisément accessible à l'observation, ou la plus aisément interprétée en termes de notions physiques, était la valeur de l'intégrale curviligne $\int \vec{u}\,ds$ prise le long de la frontière d'une surface S, ou celle de l'intégrale de surface $\int \vec{u}\,.\,d\vec{\sigma}$ étendue à S. Nous croyons cette distinction grosse de danger, et d'ailleurs antiphilosophique. Lorsqu'il fait des calculs, le physicien n'opère pas sur des grandeurs physiques, mais sur des êtres mathématiques, définis uniquement par leurs propriétés ; deux êtres qui ont les mêmes propriétés ne doivent pas plus être distingués que ne doivent l'être deux nombres rationnels, dont l'un serait écrit à la plume et l'autre au crayon. D'autre part, les théorèmes de Gauss et Stokes établissent entre les circulations et les flux des relations étroites, qui deviennent difficiles à comprendre si les êtres mis en jeu ne sont pas de même nature ; on est amené à donner, à des coefficients de proportionnalité scalaires qui expriment la colinéarité de deux vecteurs, par exemple, une nature compliquée et un peu mystérieuse (ainsi dans l'équation de Maxwell $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, où les grandeurs accessibles sont le flux de $\vec{D}$ et la circulation de $\vec{E}$).

En résumé, nous croyons que la plupart des points délicats que soulèvent les relations entre les êtres qui représentent les grandeurs physiques disparaissent lorsqu'on renonce à une simplicité qui n'est qu'apparente. Les pseudo-tenseurs ne sont qu'une façon subreptice de faire de l'algèbre extérieure, et les difficultés tiennent à ce qu'on refuse de la faire ouvertement. En fait, il est rarement utile de recourir à cette algèbre ; le calcul tensoriel pur, plus abstrait à la vérité que le calcul vectoriel, mais extrêmement simple, permet de traiter la plus grande partie des questions de physique mathématique.

Manuscrit reçu le 16 novembre 1956.