Sur la détermination des fonctions d'ondes du corpuscule de spin ħ en interaction avec un champ magnétique ou électrique constant

Gérard Petiau

SUR LA DÉTERMINATION DES FONCTIONS D'ONDES DU CORPUSCULE DE SPIN $\hbar$ EN INTERACTION AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE OU ÉLECTRIQUE CONSTANT

Par GÉRARD PETIAU,
Institut Henri-Poincaré.

Sommaire. — Résolution des équations d'ondes du corpuscule de spin $\hbar$ (méson vectoriel) dans le cas où ce corpuscule chargé est soumis à l'action d'un champ magnétique constant ou d'un champ électrique constant. Comparaison avec les résultats correspondants de la théorie de l'électron de Dirac.

Dans ce travail je détermine explicitement les fonctions d'ondes représentant un corpuscule de spin $\hbar$ (méson dit de type vectoriel) en interaction avec un champ magnétique ou électrique d'intensité constante.

Les solutions obtenues fournissent deux exemples de solutions complètes des équations d'ondes de la particule de spin $\hbar$ dans le cas d'interaction avec un champ extérieur.

Afin de permettre une comparaison entre les résultats obtenus ici pour le spin $\hbar$ et ceux obtenus antérieurement dans le cas du corpuscule de spin $\hbar/2$ je rappellerai brièvement les calculs et les résultats correspondants dans le cas de l'électron de Dirac.

I. Champ magnétique constant.

1. Électron de Dirac dans le champ magnétique $H = H_z = C^{te}$, $H_x = H_y = 0$.

Ce problème a été discuté par de nombreux auteurs (M. S. Plessett [1], I. D. Huff [2], M. H. Johnson et B. A. Lippman [3]). Je rappellerai brièvement les calculs de Huff.

Avec un choix convenable de la jauge, le potentiel vecteur correspondant au champ $H_x = H_y = 0$ $H_z = H$ peut s'écrire

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = Hx.$$

Les fonctions d'ondes représentant l'électron sont alors solutions de l'équation de Dirac

$$[p_0 + p_x\alpha_1 + (p_y + \varepsilon Hx)\alpha_2 + p_z\alpha_3 + m_0c\,\alpha_4]\psi = 0 \quad (1)$$

$$p_0 = -i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = i\hbar\frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad \varepsilon = \frac{e}{c}.$$

Nous adoptons pour représentation des matrices α, α_4 la représentation

$$\alpha = \sigma\rho_1, \quad \alpha_4 = \sigma_0\rho_3,$$

$$\sigma_0 \text{ ou } \rho_0 = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}, \qquad \sigma_1 \text{ ou } \rho_1 = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},$$

$$\sigma_2 \text{ ou } \rho_2 = \begin{vmatrix}0 & \\ -i & \end{vmatrix}, \qquad \sigma_3 \text{ ou } \rho_3 = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix},$$

$$\sigma_p\,\sigma_q = -i\sigma_r, \quad \rho_p\rho_q = -i\rho_r, \quad (p, q, r = 1, 2, 3).$$

On voit immédiatement que p_0, p_y, p_z sont intégrales premières.

Introduisant les constantes W, β, γ telles que

$$p_0\psi = \frac{W}{c}\,\psi, \quad p_y\psi = \hbar\beta\psi, \quad p_z\psi = \hbar\gamma\psi,$$

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x)e^{\frac{i}{\hbar}(Wt - \hbar\beta y - \gamma z)}$$

l'équation (1) s'écrit

$$\left[\frac{W}{c} + p_x\,\alpha_1 + (\beta\hbar + \varepsilon Hx)\,\alpha_2 + \hbar\gamma\alpha_3 + m_0c\alpha_4\right]\psi(x) = 0. \quad (2)$$

Posant $\psi = S\psi'$ et déterminant S par les conditions

$$S^*S = 1, \quad S^*\alpha_1 S = \alpha_1, \quad S^*\alpha_2 S = \alpha_2,$$
$$S^*(\hbar\gamma\alpha_3 + m_0c\alpha_4)S = \mu\hbar\alpha_4$$

soit

$$\mu^2 = \mu_0^2 + \gamma^2, \quad \left(\mu_0 = \frac{m_0c}{\hbar}\right),$$

$$S = \sqrt{\frac{\mu + \mu_0}{2\mu}} + \alpha_3\alpha_4\sqrt{\frac{\mu - \mu_0}{2\mu}},$$

nous sommes ramenés à l'équation

$$\left[\frac{W}{c} + p_x\alpha_1 + (\beta h + \varepsilon Hx)\alpha_2 + \mu\hbar\alpha_4\right]\psi' = 0.$$

On peut donc dans (2) poser $\gamma = 0$ sans perte de généralité.

Si nous décomposons l'équation (2) en deux équations en écrivant

$$\varphi_j^{(1)} \text{ pour } \psi_1, \psi_2, \quad \varphi_j^{(2)} \text{ pour } \psi_3 \text{ et } \psi_4$$

($j = 1, 2$), nous obtenons le système

$$\left[\frac{W}{c} + m_0c\right]\varphi^{(1)} + [p_x\sigma_1 + (\beta\hbar + \varepsilon Hx)\,\sigma_2]\,\varphi^{(2)} = 0. \quad (3)$$

$$\left[\frac{W}{c} - m_0c\right]\varphi^{(2)} + [p_x\sigma_1 + (\beta\hbar + \varepsilon Hx)\,\sigma_2]\,\varphi^{(1)} = 0.$$

Nous en tirons

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{\frac{W}{c} + m_0c}\,[p_x\sigma_1 + (\beta\hbar + \varepsilon Hx)\,\sigma_2]\,\varphi^{(2)},$$

$$\left[\frac{W^2}{c^2} - m_0c^2 - [p_x^2 + (\beta\hbar + \varepsilon Hx)^2 + \varepsilon\hbar H\sigma_3]\right]\varphi^{(2)} = 0.$$

Posant

$$\frac{W}{\hbar c} = w, \quad \frac{m_0c}{\hbar} = \mu_0, \quad \frac{\varepsilon H}{\hbar} = k, \quad (4)$$

nous écrivons ces équations

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= -\frac{i}{w+\mu_0}[\partial_x\sigma_1 - i(\beta+kx)\sigma_2]\varphi^{(2)}_{(x)}, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\beta+kx)^2 + w^2 - \mu_0^2 - k\sigma_3\right]\varphi^2_{(x)} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

En effectuant le changement de variables

$$\lambda X = \beta + kx, \quad \frac{\lambda^4}{k^2} = \frac{1}{4}$$

d'où $\lambda = \sqrt{\frac{k}{2}}$ et $X = \sqrt{\frac{2}{k}}[\beta + kx]$, il vient (6)

$$\varphi^{(1)}(X) = -i\frac{\sqrt{2k}}{w+\mu_0}\left[\sigma_1\frac{\partial}{\partial X} - i\sigma_2\frac{X}{2}\right]\varphi^{(2)}(X), \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{X^2}{4} + \frac{w^2-\mu_0^2}{2k} - \frac{\sigma_3}{2}\right]\varphi^{(2)}(X) = 0. \tag{8}$$

L'équation (8) déterminant $\varphi^{(2)}(X)$ est du type de Weber

$$y'' + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{X^2}{4}\right)y = 0 \tag{9}$$

dont les solutions sont les fonctions du cylindre parabolique ou fonctions de Weber-Hermite $D_\nu(X)$.

Ces fonctions sont étudiées en détail dans divers ouvrages de mathématiques et notamment dans les traités de F. G. Tricomi [4] et de H. Buchholz [5].

Les fonctions $D_\nu(x)$ satisfont notamment aux relations de récurrence.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{2}\right)D_\nu(x) &= \nu D_{\nu-1}(x), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{2}\right)D_\nu(x) &= -D_{\nu+1}(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Exprimée au moyen de fonctions hypergéométriques confluentes la fonction $D_\nu(x)$ s'écrit encore

$$D_\nu(x) = \sqrt{\pi}\, 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}\, {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}\, x\, {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right)\right]. \tag{11}$$

Asymptotiquement, on a

$$D_\nu(x) \approx \frac{2^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \times \operatorname{Cos}\left(\sqrt{\nu+\frac{1}{2}}\,x - \frac{\nu\pi}{2}\right)[1 + O(\nu^{-\tau})]. \tag{12}$$

Introduisant les représentations explicites des matrices σ_1, σ_2, σ_3 et les relations de récurrence ci-dessus, on obtient immédiatement les solutions

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(2)} &= \psi_3 = C_1 D_{\frac{\omega^2-\mu_0^2}{2k}-1}(X), \\ \varphi_2^{(2)} &= \psi_4 = C_2 D_{\frac{\omega^2-\mu_0^2}{2k}}(X), \\ \varphi_1^{(1)} &= \psi_1 = -\frac{i\sqrt{2k}}{\omega+\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial X} + \frac{X}{2}\right]\varphi_2^{(2)} \\ &= -\frac{(\omega-\mu_0)}{i\sqrt{2k}}C_2 D_{\frac{\omega^2-\mu_0^2}{2k}-1}(X) \\ \varphi_2^{(1)} &= \psi_2 = -\frac{i\sqrt{2k}}{\omega+\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial X} - \frac{X}{2}\right]\varphi_1^{(2)} \\ &= \frac{i\sqrt{2k}}{\omega+\mu_0}C_1 D_{\frac{\omega^2-\mu_0^2}{2k}}(X). \end{aligned} \tag{13}$$

Si $-\frac{\nu}{2}$ ou $\frac{1-\nu}{2}$ sont des entiers négatifs les développements des fonctions hypergéométriques sont limités et l'on a alors soit $\nu = 2n$, soit $\nu = 2n + 1$. La fonction $D_n(x)$ est alors associée au polynome d'Hermite par la relation

$$D_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{4}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = e^{-\frac{x^2}{4}} He_n(x).$$

Cette condition conduit à une quantification de l'énergie W par la relation

$$\begin{aligned} w^2 - \mu_0 &= 2kn, \\ \frac{W^2}{c^2} &= m_0^2c^2 + 2\varepsilon\hbar Hn. \end{aligned} \tag{14}$$

On trouvera dans les mémoires cités [1], [2], [3], une étude détaillée des grandeurs associées aux fonctions d'ondes ci-dessus.

2. Corpuscule de spin $\hbar$ en interaction avec le champ magnétique $H_x = H_y = 0, H_z = H = C^{te}$.

Le corpuscule de spin $\hbar$ peut être représenté selon plusieurs formalismes équivalents.

Dans le premier ou formalisme broglien [6], il est représenté par les 10 fonctions $\Phi_{i_1i_2}$, i_1, $i_2 = 1, 2, 3, 4$, symétriques par rapport aux indices i_1, i_2 ($\Phi_{i_1i_2} = \Phi_{i_2i_1}$), solutions du système des 10 équations aux dérivées partielles construites au moyen de deux systèmes de matrices de Dirac

$$\left[P_0\frac{1}{2}[(\alpha_0)_{i_1l_1}(\alpha_4)_{i_2l_2} + (\alpha_4)_{i_1l_1}(\alpha_0)_{i_2l_2}] + \left(\vec{P}\frac{1}{2}[(\vec{\alpha})_{i_1l_1}(\alpha_4)_{i_2l_2} + (\alpha_4)_{i_1l_1}(\vec{\alpha})_{i_2l_2}]\right) + m_0c(\alpha_4)_{i_1l_1}(\alpha_4)_{i_2l_2}\right]\Phi_{l_1l_2} = 0. \tag{15}$$

Ce système ne détermine directement l'évolution que de six des dix fonctions d'ondes.

Si l'on élimine les quatre fonctions non directement évolutives [7], il reste un système de 6 fonctions que nous écrirons

$$\psi_l^{(k)}, \quad k = 1, 2, \quad l = 1, 2, 3,$$

solutions du système

$$\Big\{ P_0(\rho_3)_{km} + \frac{1}{2m_0c} P^2 (1+\rho_1)_{km} + m_0c\delta_{km}\Big]\delta_{jl} -$$
$$- \frac{(\rho_1)_{km}}{m_0c}(\vec{P}\vec{S})^2_{jl} + \frac{\varepsilon\hbar}{2m_0c}(1+\rho_1)_{km}(\vec{H}\vec{S})_{jl}\Big\}\psi_l^{(m)} = 0 \quad (16)$$

avec

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix},$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{vmatrix}$$

Si l'on remplace les 10 fonctions $\Phi_{i_1i_2}$ par des combinaisons linéaires soient

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_p = (R\alpha_p)_{i_2i_1}\Phi_{i_1i_2}, && \mathcal{V} = -(R\alpha_0)_{i_2i_1}\Phi_{i_1i_2}, \\ &\mathcal{H}_r = [R\alpha_p\alpha_q\alpha_4]_{i_2i_1}\Phi_{i_1i_2}, && \mathcal{E}_p = -[R\alpha_p\alpha_4)_{i_2i_1}\Phi_{i_1i_2}, \end{aligned} \quad (17)$$

R désignant une matrice telle que

$$\alpha_p^+ = R\alpha_pR^{-1}, \quad R^+ = R = R^{-1},$$
$$(p, q, r = 1, 2, 3),$$

le système (16) est remplacé par le système tensoriel équivalent

$$\begin{aligned} &P_0\vec{\mathcal{A}} - \vec{P}\mathcal{V} - m_0c\vec{\mathcal{E}} = 0, \\ &\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{m_0c}[\vec{P}\wedge\vec{\mathcal{A}}], \\ &P_0\vec{\mathcal{E}} + (\vec{P}\wedge\vec{\mathcal{H}}) - m_0c\vec{\mathcal{A}} = 0, \\ &\mathcal{V} = \frac{1}{m_0c}(\vec{P}\vec{\mathcal{E}}). \end{aligned} \quad (18)$$

Dans ce système seules les 6 fonctions $\vec{\mathcal{A}}$ et $\vec{\mathcal{E}}$ évoluent directement. L'élimination de $\vec{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{V}$ conduit à un système de 6 équations équivalent à (16) soit

$$\begin{aligned} &P_0\vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{m_0c}\vec{P}(\vec{P}\vec{\mathcal{E}}) - m_0c\vec{\mathcal{E}} = 0, \\ &P_0\vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{m_0c}[P^2 + m_0^2c^2]\vec{\mathcal{A}} + \frac{1}{m_0c}\vec{P}(\vec{P}\vec{\mathcal{A}}) + \\ &\qquad + \frac{i\hbar\varepsilon}{m_0c}(\vec{H}\wedge\vec{\mathcal{A}}) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Nous allons déterminer les solutions de ce système dans le cas où

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = H = \text{Cte}.$$

Nous poserons encore avec un choix convenable de la jauge

$$A_x = 0, \quad A_y = Hx, \quad A_z = 0$$

p_0, p_y et p_z sont encore intégrales premières et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &p_0\vec{\mathcal{A}} = \frac{W}{c}\vec{\mathcal{A}}, && p_0\vec{\mathcal{E}} = \frac{W}{c}\vec{\mathcal{E}}, \\ &p_y\vec{\mathcal{A}} = \hbar\beta\vec{\mathcal{A}}, && p_y\vec{\mathcal{E}} = \hbar\beta\vec{\mathcal{E}}, \\ &p_z\vec{\mathcal{A}} = \hbar\gamma\vec{\mathcal{A}}, && p_z\vec{\mathcal{E}} = \hbar\gamma\vec{\mathcal{E}}. \end{aligned} \quad (20)$$

On voit que l'on peut sans perte de généralité poser $\gamma = 0$ [en remplaçant W par $W' = \sqrt{W^2 - \hbar^2c^2\gamma^2}$]. On a alors

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}}(x)e^{\frac{i}{\hbar}[Wt-\hbar\beta y]}, \quad \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}(x)e^{\frac{i}{\hbar}[Wt-\hbar\beta y]}. \quad (21)$$

Si nous tenons compte de la relation

$$\vec{P}P^2 - P^2\vec{P} = -2i\hbar\varepsilon(\vec{H}\wedge\vec{P}) - \hbar\varepsilon^2\,\text{Rot}\,\vec{H}$$

l'élimination de $\vec{\mathcal{A}}$ entre les deux équations (19) nous donne l'équation

$$\Big[\frac{W^2}{c^2} - P^2 - m_0^2c^2\Big]\vec{\mathcal{E}} + i\hbar\varepsilon(\vec{H}\wedge\vec{\mathcal{E}})$$
$$- \frac{i\hbar}{m_0^2c^2}\varepsilon(\vec{H}\wedge\vec{P})(\vec{P}\vec{\mathcal{E}}) = 0. \quad (22)$$

Séparant les équations relatives aux différentes composantes $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{A}_z$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, nous obtenons successivement

1° Pour les composantes $\mathcal{A}_z(x)$ et $\mathcal{E}_z(x)$,

$$\begin{aligned} &\frac{W}{c}\mathcal{A}_z = m_0c\,\mathcal{E}_z \\ &\Big[\frac{W^2}{c^2} - P^2 - m_0^2c^2\Big]\mathcal{E}_z = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

2° Pour les composantes $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$,

$$\Big[\frac{W^2}{c^2} - P^2 - m_0^2c^2\Big]\mathcal{E}_x - i\hbar\varepsilon H\mathcal{E}_y + \frac{i\hbar\varepsilon H}{m_0^2c^2}P_y(\vec{P}\vec{\mathcal{E}}) = 0,$$
$$\Big[\frac{W^2}{c^2} - P^2 - m_0^2c^2\Big]\mathcal{E}_y + i\hbar\varepsilon H\mathcal{E}_x - \frac{i\hbar\varepsilon H}{m_0^2c^2}P_x(\vec{P}\vec{\mathcal{E}}) = 0,$$
$$\frac{W}{c}\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{m_0c}[\vec{P}(\vec{P}\vec{\mathcal{E}}) + m_0^2c^2\vec{\mathcal{E}}].$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} &u_1 = \mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y, && \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_x + i\mathcal{A}_y, \\ &u_2 = \mathcal{E}_x - i\mathcal{E}_y, && \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_x - i\mathcal{A}_y, \end{aligned} \quad (25)$$

d'où nous déduisons

$$(\vec{P}\vec{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2}[(P_x - iP_y)u_1 + (P_x + iP_y)u_2].$$

D'autre part

$$(P_x \pm iP_y)(P_x \mp iP_y) = P_x^2 + P_y^2 \pm \hbar\varepsilon H_z.$$

Le système (24) s'écrit alors

$$\left[\frac{W^2}{c^2} - m_0^2c^2 - \left(1 - \frac{\hbar\varepsilon H}{2m_0^2c^2}\right)(P^2 + \hbar\varepsilon H)\right] u_1 + \frac{\hbar\varepsilon H}{2m_0^2c^2}(P_x + iP_y)^2 u_2 = 0 \quad (26)$$

$$\left[\frac{W^2}{c^2} - m_0^2c^2 - \left(1 + \frac{\hbar\varepsilon H}{2m_0^2c^2}\right)(P^2 - \hbar\varepsilon H)\right] u_2 - \frac{\hbar\varepsilon H}{2m_0^2c^2}(P_x - iP_y)^2 u_1 = 0$$

et

$$\frac{W}{c}\mathcal{A}_1 = m_0cu_1 + \frac{1}{2m_0c}[(P^2 + \hbar\varepsilon H)u_1 + (P_x + iP_y)^2u_2]$$

$$\frac{W}{c}\mathcal{A}_2 = m_0cu_2 + \frac{1}{2m_0c}[(P^2 - \hbar\varepsilon H)u_2 + (P_x - iP_y)^2u_1].$$

Pour résoudre ces équations, nous poserons

$$\frac{W}{\hbar c} = w, \quad \frac{m_0c}{\hbar} = \mu_0, \quad \frac{\varepsilon H}{\hbar} = k, \quad \frac{\hbar\varepsilon H}{2m_0^2c^2} = \frac{k}{2\mu_0^2} = \sigma. \quad (28)$$

Nous obtenons ainsi pour les équations (23), (26) et (27).

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\beta + kx)^2 + (w^2 - \mu_0^2)\right]\mathcal{E}_z = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\beta + kx)^2 - k + \frac{w^2 - \mu_0^2}{1 - \sigma}\right]u_1 - \frac{\sigma}{1 - \sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x} + (\beta + kx)\right)^2 u_2 = 0 \quad (29)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\beta + kx)^2 + k + \frac{w^2 - \mu_0^2}{1 + \sigma}\right]u_2 + \frac{\sigma}{1 + \sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x} - (\beta + kx)^2\right]u_1 = 0$$

$$w\mathcal{A}_z = \mu_0\mathcal{E}_z, \quad (30)$$

$$w\mathcal{A}_1 = \mu_0u_1 - \frac{1}{2\mu_0}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\beta + kx)^2 - k\right)u_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + (\beta + kx)\right)^2 u_2\right]$$

$$w\mathcal{A}_2 = \mu_0u_2 - \frac{1}{2\mu_0}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\beta + kx)^2 + k\right]u_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} - (\beta + kx)\right)^2 u_1.\right]$$

Nous introduisons la variable

$$X = \sqrt{\frac{2}{k}}(\beta + kx). \quad (31)$$

Nous écrivons alors pour (29)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{X^2}{4} + \frac{\omega^2 - \mu_0^2}{2k}\right]\mathcal{E}_z(X) = 0, \quad (32)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{X^2}{4} + \frac{w^2 - \mu_0^2}{2k(1 - \sigma)} - \frac{1}{2}\right]u_1 - \frac{\sigma}{1 - \sigma}\left[\frac{\partial}{\partial X} + \frac{X}{2}\right]^2 u_2 = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{X^2}{4} + \frac{w^2 - \mu_0^2}{2k(1 + \sigma)} + \frac{1}{2}\right]u_2 + \frac{\sigma}{1 + \sigma}\left[\frac{\partial}{\partial X} - \frac{X}{2}\right]^2 u_1 = 0.$$

La première de ces équations est du type de Weber-Hermite (9). Nous avons donc immédiatement

$$\mathcal{E}_z(X) = C_0D_{\frac{w^2 - \mu_0^2}{2k} - \frac{1}{2}}(X), \quad (33)$$

C_0 désignant une constante arbitraire.

Pour résoudre les deux autres équations (22) nous tiendrons compte des relations (10) liant les fonctions de Weber-Hermite.

Nous chercherons une solution de la forme

$$u_1 = C_1D_{\nu_1}(X), \quad u_2 = C_2D_{\nu_2}, \quad (34)$$

ν_1, ν_2, C_1, C_2 désignant des constantes à déterminer.

Par substitution, nous sommes conduit aux relations

$$\nu_1 + 2 = \nu_2 \quad (35)$$

$$\left[\nu_1 + 1 - \frac{w^2 - \mu_0^2}{2k(1 - \sigma)}\right]C_1 + \frac{\sigma}{1 - \sigma}\nu_2(\nu_2 - 1)C_2 = 0$$

$$\left[\nu_2 - \frac{w^2 - \mu_0^2}{2k(1 + \sigma)}\right]C_2 - \frac{\sigma}{1 + \sigma}C_1 = 0, \quad (36)$$

Nous en déduisons

$$\nu_2 = \frac{w^2 - \mu_0^2}{2k} + \frac{1}{2} \pm \frac{w}{2\mu_0}, \quad (37)$$

$$2kC_1 = (\mu_0 \pm w)\left(\mu_0 \pm w + \frac{k}{\mu_0}\right)C_2, \quad (38)$$

Nous obtenons donc deux systèmes de solutions qui s'écrivent si nous posons

$$\nu_2^+ = \frac{w^2 - \mu_0^2}{2k} + \frac{1}{2} + \frac{w}{2\mu_0}, \quad \nu_2^- = \frac{w^2 - \mu_0^2}{2k} + \frac{1}{2} - \frac{w}{2\mu_0} \quad (39)$$

1° $u_1^{(\mathrm{I})} = C_{\mathrm{I}}D_{\nu_2^+ - 2}(X)$,

$$u_2^{(\mathrm{I})} = \frac{2kC_{\mathrm{I}}}{(\mu_0 + w)\left(\mu_0 + w + \frac{k}{\mu_0}\right)}D_{\nu_2^+}(X). \quad (40)$$

2° $u_2^{(\mathrm{II})} = C_{\mathrm{II}}D_{\nu_2^- - 2}(X)$,

$$u_2^{(\mathrm{II})} = \frac{2kC_{\mathrm{II}}}{(\mu_0 - w)\left(\mu_0 - w + \frac{k}{\mu_0}\right)}D_{\nu_2^-}(X). \quad (41)$$

Introduisant ces valeurs dans les expressions de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ tenant compte des relations (10), nous obtenons

$$\mathcal{A}_z(X) = \frac{\mu_0}{w}C_0D_{\frac{w^2 - \mu_0^2}{2k} - \frac{1}{2}}(X), \quad (42)$$

$$\mathcal{A}_1 = \pm u_1, \quad \mathcal{A}_2 = \mp u_2, \quad (43)$$

d'où

$$\mathcal{A}_1^{(\mathrm{I})} = +u_1^{(\mathrm{I})}(X), \quad \mathcal{A}_2^{(\mathrm{I})} = -u_2^{(\mathrm{I})}(X); \quad (44)$$
$$\mathcal{A}_1^{(\mathrm{II})} = -u_1^{(\mathrm{II})}(X), \quad \mathcal{A}_2^{(\mathrm{II})} = +u_2^{(\mathrm{II})}(X).$$

Les conditions d'uniformité et de régularité des fonctions d'ondes conduisent à introduire des nombres entiers n_0, n_1, n_2 tels que

1° Pour l'onde $\mathcal{A}_z$, $\mathcal{E}_z$

$$\frac{w^2 - \mu_0^2}{2k} - \frac{1}{2} = n_0. \tag{45}$$

2° Pour l'onde $\mathcal{A}^{(I)}$, $u^{(I)}$

$$\frac{w^2 - \mu_0^2}{2k} + \frac{1}{2} + \frac{w}{2\mu_0} = n_1 + 2. \tag{46}$$

3° Pour l'onde $\mathcal{A}^{(II)}$, $u^{(II)}$,

$$\frac{w^2 - \mu_0^2}{2k} + \frac{1}{2} - \frac{w}{2\mu_0} = n_2 + 2. \tag{47}$$

On en conclut que si les valeurs de l'énergie sont les valeurs quantifiées

$$w_0^2 = \mu_0^2 + 2k\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)$$

la solution acceptable des équations d'ondes est l'onde $\mathcal{A}_z(X)$, $\mathcal{E}_z(x)$ avec $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_y = \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0$.

Au contraire si les valeurs de l'énergie w sont telles que :

$$w^2 + \frac{k}{\mu_0} w = \mu_0^2 + 2k\left(n_1 + \frac{3}{2}\right),$$

ou

$$w^2 - \frac{k}{\mu_0} w = \mu_0^2 + 2k\left(n_2 + \frac{3}{2}\right),$$

les ondes acceptables sont les ondes $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ correspondant respectivement aux fonctions $\mathcal{A}^{(I)}$, $u^{(I)}$ ou $\mathcal{A}^{(II)}$, $u^{(II)}$ avec $\mathcal{E}_z = 0$, $\mathcal{A}_z = 0$.

Nous compléterons cette étude par le calcul des fonctions d'ondes non évolutives $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$.

Nous avons

$$\mathcal{V} = \frac{1}{m_0 c}(\vec{P}\,\vec{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2m_0 c}[(P_x - iP_y)u_1 + (P_x + iP_y)u_2]$$

Avec les expressions précédentes de u_1 et de u_2 les relations de récurrence (10) entre fonctions de Weber, nous donnent immédiatement

$$\mathcal{V} = -\frac{i}{\sqrt{2k}}[\mu_0 \pm w]\, C_2 D_{\nu_2 - 1} \tag{48}$$

$$= -\frac{i\sqrt{2k}C_1}{\left[\mu_0 \pm w + \dfrac{k}{\mu_0}\right]} D_{\nu_2 - 1}.$$

On obtient donc

Pour l'onde (I)

$$\mathcal{V}_{(I)} = -\frac{i\sqrt{2k}\,C_{(I)}}{\mu_0 + w + \dfrac{k}{\mu_0}} D_{\nu_2^+ - 1}. \tag{49}$$

Pour l'onde (II)

$$\mathcal{V}_{(II)} = -\frac{i\sqrt{2k}\,C_{(II)}}{\mu_0 - w + \dfrac{k}{\mu_0}} D_{\nu_2^- - 1}. \tag{50}$$

Nous allons maintenant évaluer les ondes $\vec{\mathcal{H}} = \dfrac{1}{m_0 c}(\vec{P} \wedge \vec{\mathcal{A}})$.

Nous avons

$$\mathcal{H}_x = \frac{1}{m_0 c} P_y\, \mathcal{A}_z(x), \quad \mathcal{H}_y = -\frac{1}{m_0 c} P_x \mathcal{A}_z(x),$$

$$\mathcal{H}_z = \frac{1}{m_0 c}(P_x \mathcal{A}_y - P_y \mathcal{A}_x).$$

Pour les ondes $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_y$ en posant $\nu_0 = \dfrac{w^2 - \mu_0^2}{2k} - \dfrac{1}{2}$, à partir de

$$w\mathcal{A}_z = \mu_0 \mathcal{E}_z(X), \qquad \mathcal{E}_z = C_0 D_{\nu_0}(X),$$

nous obtenons

$$\mathcal{H}_x = \frac{1}{w}\sqrt{\frac{k}{2}}\, X C_0 D_{\nu_0}(X)$$

$$= \frac{1}{w}\sqrt{\frac{k}{2}}\, C_0[\,\nu_0 D_{\nu_0 - 1}(X) + D_{\nu_0 + 1}(X)] \tag{52}$$

$$\mathcal{H}_y = -\frac{i\sqrt{2k}}{w} C_0 \frac{\partial}{\partial X} D_{\nu_0}(X)$$

$$= \frac{-i}{w}\sqrt{\frac{k}{2}}\, C_0[\nu_0 D_{\nu_0 - 1}(X) - D_{\nu_0 + 1}(X)]. \tag{53}$$

Pour l'onde $\mathcal{H}_z$, on a successivement

$$\mathcal{H}_z = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}(i\mathcal{A}_y) - (\beta + kx)\,\mathcal{A}_x\right] \tag{54}$$

$$= \frac{\sqrt{2k}}{2\mu_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{X}{2}\right)\mathcal{A}_1 - \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{X}{2}\right)\mathcal{A}_2\right]$$

$$= \pm \frac{\sqrt{2k}}{2\mu_0}\left[\left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{X}{2}\right)u_1 + \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{X}{2}\right)u_2\right]$$

$$= \mp \frac{(\mu_0 \pm w)}{\sqrt{2k}} C_2 D_{\nu_2 - 1}(X)$$

$$= \mp \frac{\sqrt{2k}\,C_1}{\mu_0 \pm w + \dfrac{k}{\mu_0}} D_{\nu - 1}(X).$$

Nous avons donc

pour l'onde (I)

$$\mathcal{H}_z^{(I)} = -\frac{\sqrt{2k}\,C_I}{\mu_0 + w + \dfrac{k}{\mu_0}} D_{\nu_2^+ - 1}(X) \tag{55}$$

pour l'onde (II)

$$\mathcal{H}_z^{(II)} = \frac{\sqrt{2k}\,C_{II}}{\mu_0 - w + \dfrac{k}{\mu_0}} D_{\nu_2^- - 1}(X). \tag{56}$$

II. Champ électrique constant.

1. Électron de Dirac dans le champ électrique constant $E_x = E$, $E_y = E_z = 0$.

L'étude des fonctions d'ondes de l'électron de Dirac en interaction avec un champ électrique constant a été développée il y a longtemps par F. Sauter [8] et S. Szczeniowski [9]. Je rappellerai brièvement la solution donnée par ces auteurs.

L'électron de Dirac est représenté par les solutions de l'équation

$$[p_0 + \varepsilon V(x) + p_x\alpha_1 + p_y\alpha_2 + p_z\alpha_3 + m_0c\alpha_4]\,\psi(x, y, z, t) = 0 \quad (1)$$

$$p_0 = -i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad p = i\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

Le potentiel scalaire V est une fonction de la variable x seule, $V = V(x)$. Dans le cas du champ électrique constant $V(x) = -Ex$.

L'équation (1) admet les intégrales premières

$$p_0\psi = \frac{W}{c}\psi, \quad p_y\psi = \beta\hbar\psi, \quad p_z\psi = \gamma\hbar\psi,$$

et nous écrivons

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x)e^{\frac{i}{\hbar}(Wt-\beta\hbar y-\gamma\hbar z)}.$$

$\psi(x)$ est déterminé par le système

$$\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x) + p_x\alpha_1 + \beta\hbar\alpha_2 + \gamma\hbar\alpha_3 + m_0c\alpha_4\right]\psi(x) = 0 \quad (2)$$

On montre facilement qu'il existe une transformation S telle que $\psi(x) = S\psi'(x)$ et que

$$S^{*+} = S^{-1}, \quad S^{-1}\alpha_1 S = \alpha_1$$

$$S^{-1}(\beta\alpha_2 + \gamma\alpha_3 + \mu_0\alpha_4)S = \mu\alpha_4$$

avec

$$\mu_0 = m_0c/h, \qquad \mu^2 = \mu_0^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

La fonction d'onde ψ' est alors déterminée par l'équation

$$\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x) + p_x\alpha_1 + \mu\hbar\alpha_4\right]\psi'(x) = 0. \quad (3)$$

Dans ce qui suit nous écrirons $\psi(x)$ pour $\psi'(x)$. Avec la représentation adoptée pour les matrices α, ce système s'écrit

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right) + \mu\hbar\right]\psi_1 + p_x\psi_4 = 0,\\
&\left[\left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right) - \mu\hbar\right]\psi_4 + p_x\psi_1 = 0,\\
&\left[\left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right) + \mu\hbar\right]\psi_2 + p_x\psi_3 = 0,\\
&\left[\left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right) - \mu\hbar\right]\psi_3 + p_x\psi_2 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Posant

$$u_1 = \psi_1 + \psi_4, \qquad u_2 = \psi_1 - \psi_4;$$
$$v_1 = \psi_2 + \psi, \qquad v_2 = \psi_2 - \psi_3,$$

ce système s'écrit encore

$$\left\{\begin{aligned}
&\left[p_x + \left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right)\right]u_1 + \mu\hbar u_2 = 0\\
&\left[p_x - \left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right)\right]u_2 - \mu\hbar u_1 = 0
\end{aligned}\right. \quad (5)$$

et les mêmes équations entre fonctions v_1 et v_2. Il nous suffit donc de résoudre le système en u_1, u_2.

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned}
&\mu\hbar u_1 = \left[p_x - \left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right)\right]u_2\\
&\left[p_x^2 - \left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right)^2 - i\hbar\varepsilon \operatorname{grad} V + \mu^2\hbar^2\right]u_2 = 0
\end{aligned} \quad (6)$$

et si

$$V(x) = -Ex$$

$$\begin{aligned}
&\mu\hbar u_1 = \left[p_x - \left(\frac{W}{c} - \varepsilon Ex\right)\right]u_2,\\
&\left[p_x^2 - \left(\frac{W}{c} - \varepsilon Ex\right)^2 + i\hbar\varepsilon E + \mu^2\hbar^2\right]u_2 = 0.
\end{aligned} \quad (7)$$

Posant $\frac{W}{\hbar c} = w$, $\varepsilon\frac{E}{\hbar} = k$, il vient

$$\mu u_1 = \left[i\frac{\partial}{\partial x} - [w - kx]\right]u_2, \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + [w - kx]^2 - \mu^2 - ik\right]u_2 = 0.$$

Si nous effectuons le changement de variable $w - kx = \lambda X$, cette équation s'écrit

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\lambda^4}{k^2}X^2 - \frac{\lambda^2}{k^2}(\mu^2 + ik)\right]u_2 = 0. \quad (9)$$

Si l'on détermine λ par la condition

$$\frac{\lambda^4}{k^2} = -\frac{1}{4} \qquad \lambda^2 = \frac{i}{2}k, \qquad \lambda = e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{k}{2}}.$$

nous obtenons

$$X = \sqrt{\frac{2}{k}}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}(w - kx),$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{X^2}{4} - \frac{i\mu^2}{2k} + \frac{1}{2}\right]u_2 = 0. \quad (10)$$

Cette équation est encore du type de Weber-Hermite et nous écrivons la fonction u_2

$$u_2(X) = C_1 D_{-\frac{i\mu^2}{2k}}(X). \quad (11)$$

On en déduit l'expression de u_1 :

$$u_1 = -\frac{ik}{\mu\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{X}{2}\right)u_2 = -\frac{\mu}{2\lambda}C_1 D_{-\frac{i\mu^2}{2k}-1}(X), \quad (12)$$

ou encore

$$u_1 = -\frac{\mu}{\sqrt{2k}} e^{-\frac{i\pi}{4}} C_1 D_{-\frac{i\mu^2}{2k}-1}(X). \qquad (13)$$

On écrirait de même les fonctions v_1 et v_2.

$$v_2 = C_2 D_{-\frac{i\mu^2}{2k}}(X)$$

$$v_1 = -\frac{\mu}{\sqrt{2k}} e^{-\frac{i\pi}{4}} C_2 D_{-\frac{i\mu^2}{2k}-1}(X). \qquad (14)$$

Les propriétés des fonctions du type de Weber à indice complexe telles que

$$u_2 = C_1 D_{-\frac{i\mu^2}{2k}}\left[\sqrt{\frac{2}{k}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}(w - kx)\right]$$

ne sont pas évidentes. F. Sauter les a étudiées d'une façon très complète.

Si l'on détermine λ par la relation

$$\frac{\lambda^2}{k^2} = +\frac{1}{4}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{k}{2}}, \qquad (15)$$

on obtient au lieu de (10) l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{X^2}{4} - \frac{\mu^2}{2k} - \frac{i}{2}\right] u_2(X) = 0. \qquad (16)$$

Cette équation est du type

$$y'' + \left(\frac{x^2}{4} - a\right) y = 0 \qquad (17)$$

étudiée notamment par C. G. Darwin [10].

Si l'on détermine λ par la condition

$$\frac{\lambda^2}{k^2} = +1, \qquad \lambda = \sqrt{k}, \qquad (18)$$

on obtient l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + X^2 - \left(\frac{\mu^2}{k} + i\right)\right] u_2 = 0. \qquad (19)$$

Cette équation est du type :

$$y'' + (x^2 + a) y = 0, \qquad (20)$$

dont les solutions ont été étudiées très en détail par C. P. Wells et R. D. Spence [11].

Ces études mathématiques permettent de déterminer complètement les caractères et les valeurs numériques des fonctions u_1 et u_2, v_1 et v_2.

2. Corpuscule de spin $\hbar$ en interaction avec le champ électrique E(x) dérivant du potentiel scalaire $V(x)$.

Les équations (19 I) s'écrivent ici

$$\begin{aligned}
[p_0 + \varepsilon V(x)]\, \vec{\mathcal{A}} &= \frac{1}{m_0 c}\left[\vec{p}(\vec{p}\,\vec{\mathcal{E}}) + m_0^2 c^2\, \vec{\mathcal{E}}\right] \\
[p_0 + \varepsilon V(x)]\, \vec{\mathcal{E}} &= \frac{1}{m_0 c}[p^2 + m_0^2 c^2]\, \vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{m_0 c}\left(\vec{p}(\vec{p}\,\vec{\mathcal{A}})\right)
\end{aligned} \qquad (21)$$

Si nous désignons le couple $(\vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{E}})$ par ψ nous avons encore les intégrales premières

$$p_0\psi = \frac{W}{c}\psi, \qquad p_y\psi = \hbar\beta\psi, \qquad p_z\psi = \hbar\gamma\psi,$$

d'où

$$\psi = \psi(x) e^{\frac{i}{\hbar}(Wt - \hbar\beta y - \hbar\gamma z)}.$$

Nous pouvons encore sans perte de généralité poser $\gamma = 0$, mais non pas à la fois $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ et ceci introduira une différence importante entre les cas du méson vectoriel et de l'électron.

Nous séparerons dans le système (21) les ondes correspondant aux composantes z d'une part, x et y de l'autre. Nous obtenons ainsi :

Pour les composantes $\mathcal{A}_z(x)$ et $\mathcal{E}_z(x)$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]\mathcal{A}_z &= m_0 c\,\mathcal{E}_z(x), \\
\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V\right]\mathcal{E}_z &= \frac{1}{m_0 c}[p^2 + m_0^2 c^2]\mathcal{A}_z.
\end{aligned} \qquad (22)$$

Nous en déduisons pour $\mathcal{A}_z(x)$

$$\left[\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]^2 - p^2 - m_0^2 c^2\right]\mathcal{A}_z(x) = 0$$

ou encore

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right)^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} - \beta^2\right]\mathcal{A}_z(x) = 0. \qquad (23)$$

Pour les composantes $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ nous obtenons les équations

$$\begin{aligned}
m_0 c\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]\mathcal{A}_x &= [p_x^2 + m_0^2 c^2]\mathcal{E}_x + \hbar\beta p_x \mathcal{E}_y, \\
m_0 c\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]\mathcal{A}_y &= \hbar\beta p_x \mathcal{E}_x + [\hbar^2\beta^2 + m_0^2 c^2]\mathcal{E}_y,
\end{aligned} \qquad (24)$$

$$\begin{aligned}
m_0 c\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]\mathcal{E}_x &= [\hbar^2\beta^2 + m_0^2 c^2]\mathcal{A}_x - \hbar\beta p_x \mathcal{A}_y, \\
m_0 c\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]\mathcal{E}_y &= [p_x^2 + m_0^2 c^2]\mathcal{A}_y - \hbar\beta p_x \mathcal{A}_x.
\end{aligned} \qquad (25)$$

Si nous posons

$$A = \hbar^2\beta^2 + m_0^2 c^2,$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathcal{A}_x + i\mathcal{E}_y, & v_1 &= \mathcal{A}_y + i\mathcal{E}_x, \\
u_2 &= \mathcal{A}_x - i\mathcal{E}_y, & v_2 &= \mathcal{A}_y - i\mathcal{E}_x.
\end{aligned} \qquad (26)$$

les équations (24) et (25) nous donnent par combinaisons

$$\begin{aligned}
Au_1 &= \left[\hbar\beta p_x + i m_0 c\left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right)\right]v_2, \\
Au_2 &= \left[\hbar\beta p_x - i m_0 c\left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right)\right]v_1.
\end{aligned} \qquad (27)$$

$$\begin{aligned}
[p_x^2 + m_0^2 c^2]v_1 &= \left[\ \ i m_0 c\left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right) + \hbar\beta p_x\right]u_2 \\
[p_x^2 + m_0^2 c^2]v_2 &= \left[- i m_0 c\left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right) + \hbar\beta p_x\right]u_1.
\end{aligned} \qquad (28)$$

L'élimination des fonctions u_1, u_2 s'effectue sans difficulté et on obtient pour les ondes v_1, v_2 les équations

$$\left[p_x^2 - \frac{\hbar^2\beta\varepsilon}{m_0 c}\,\mathrm{grad}\,V - \left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right)^2 + m_0^2c^2 + \hbar^2\beta^2\right] v_1(x) = 0$$
$$\left[p_x^2 + \frac{\hbar^2\beta\varepsilon}{m_0 c}\,\mathrm{grad}\,V - \left(\frac{W}{c} + \varepsilon V\right)^2 + m_0^2c^2 + \hbar^2\beta^2\right] v_2(x) = 0. \quad (29)$$

Posant $\mu_0 = \dfrac{m_0 c}{\hbar}$, ces équations s'écrivent encore

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\beta\varepsilon}{\mu_0\hbar}\,\mathrm{grad}\,V + \frac{1}{\hbar^2}\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V\right]^2 - (\mu_0^2 + \beta^2)\right] v_1 = 0$$
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\beta\varepsilon}{\mu_0\hbar}\,\mathrm{grad}\,V + \frac{1}{\hbar^2}\left[\frac{W}{c} + \varepsilon V\right]^2 - (\mu_0^2 + \beta^2)\right] v_2 = 0. \quad (30)$$

On voit sur ces équations que l'intervention de la constante β différente de zéro entraîne la différence de nature des fonctions v_1 et v_2.

Jusqu'ici nous avons supposé simplement un potentiel $V = V(x)$. Nous allons maintenant spécialiser celui-ci en considérant le cas du champ électrique E constant. Nous poserons alors

$$V = -Ex.$$

Écrivant

$$k = \frac{\varepsilon E}{\hbar}, \qquad \frac{W}{\hbar c} = w,$$

Les fonctions $v_1(x)$, $v_2(x)$ sont solutions des équations

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (w - kx)^2 - (\mu_0^2 + \beta^2) - \frac{\beta k}{\mu_0}\right] v_1(x) = 0,$$
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (w - kx)^2 - (\mu_0^2 + \beta^2) + \frac{\beta k}{\mu_0}\right] v_2(x) = 0. \quad (31)$$

u_1 et u_2 sont alors déterminés par

$$[\mu_0^2 + \beta^2]u_1 = i\left[\beta\frac{\partial}{\partial x} + \mu_0(w - kx)\right]v_2,$$
$$[\mu_0^2 + \beta^2]u_2 = i\left[\beta\frac{\partial}{\partial x} - \mu_0(w - kx)\right]v_1, \quad (32)$$

Nous poserons encore

$$w - kx = \lambda X \quad (33)$$

et nous déterminerons λ par la condition

$$\frac{\lambda^4}{k^2} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = +\frac{ik}{2}$$
$$\lambda = e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{k}{2}} \quad \text{d'où} \quad X = \sqrt{\frac{2}{k}}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}[w - kx]. \quad (34)$$

Nous obtenons alors les équations

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{X^2}{4} - i\left(\frac{\mu_0^2 + \beta^2}{2k}\right)\right]\mathcal{A}_z(X) = 0,$$
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{X^2}{4} - i\left(\frac{\mu_0^2 + \beta^2}{2k}\right) - \frac{i\beta}{2\mu_0}\right] v_1(X) = 0, \quad (35)$$
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{X^2}{4} - i\left(\frac{\mu_0^2 + \beta^2}{2k}\right) + \frac{i\beta}{2\mu_0}\right] v_2(X) = 0.$$

Ces équations sont encore du type de Weber-Hermite et nous en écrivons les solutions

$$\mathcal{A}_z(X) = C_0 D_{-i\left(\frac{\mu_0^2+\beta^2}{2k}\right)-\frac{1}{2}}(X),$$
$$v_1(X) = C_1 D_{-i\left[\frac{\mu_0^2+\beta^2}{2k} + \frac{\beta}{2\mu_0}\right]-\frac{1}{2}}(X), \quad (36)$$
$$v_2(X) = C_2 D_{-i\left[\frac{\mu_0^2+\beta^2}{2k} - \frac{\beta}{2\mu_0}\right]-\frac{1}{2}}(X),$$

C_0, C_1, C_2 désignant des constantes arbitraires. A partir des relations entre fonctions de Weber

$$2D'_\nu(x) = -D_{\nu+1}(x) + \nu D_{\nu-1}(x),$$
$$xD_\nu(x) = \nu D_{\nu-1}(x) + D_{\nu+1}(x), \quad (37)$$

posant

$$\nu_0 = -i\left(\frac{\mu_0^2 + \beta^2}{2k}\right) - \frac{1}{2},$$
$$\nu_1 = -i\left(\frac{\mu_0^2 + \beta^2}{2k} + \frac{\beta}{2\mu_0}\right) - \frac{1}{2}, \quad (38)$$
$$\nu_2 = -i\left(\frac{\mu_0^2 + \beta^2}{2k} - \frac{\beta}{2\mu_0}\right) - \frac{1}{2},$$

nous obtenons

$$\mathcal{E}_z(X) = \frac{\lambda}{\mu_0} X\,\mathcal{A}_z(X) = \frac{\lambda}{\mu_0} C_0[\nu_0 D_{\nu_0-1}(X) + D_{\nu_0+1}(X)], \quad (39)$$

$$[\mu_0^2 + \beta^2]u_1 = -i\frac{k\beta}{\lambda} C_2\left[\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i\mu_0}{2\beta}X\right]D_{\nu_2}(X),$$
$$[\mu_0^2 + \beta^2]u_2 = -i\frac{k\beta}{\lambda} C_1\left[\frac{\partial}{\partial X} + \frac{i\mu_0}{2\beta}X\right]D_{\nu_1}(X). \quad (40)$$

Après calculs nous écrivons ces expressions

$$u_1 = \frac{i\lambda C_2}{\mu_0^2 + \beta^2}[(\mu_0 - i\beta)D_{\nu_2+1}(X) + \nu_2(\mu_0 + i\beta)D_{\nu_2-1}(X)],$$
$$u_2 = -\frac{i\lambda C_1}{\mu_0^2 + \beta^2}[(\mu_0 + i\beta)D_{\nu_1+1}(X) + \nu_1(\mu_0 - i\beta)D_{\nu_1-1}(X)], \quad (41)$$

Rassemblant les expressions de u_1, u_2, v_1, v_2, nous obtenons les fonctions d'ondes

$$\mathcal{A}_x(X) = \frac{1}{2}[u_1 + u_2] \quad (42)$$
$$= \frac{-i\lambda}{2(\mu_0^2 + \beta^2)}\{C_1[\nu_1(\mu_0 - i\beta)D_{\nu_1-1}(X) + (\mu_0 + i\beta)D_{\nu_1+1}(X)] - C_2[\nu_2(\mu_0 + i\beta)D_{\nu_2-1}(X) + (\mu_0 - i\beta)D_{\nu_2+1}(X)],$$
$$\mathcal{A}_y(X) = \frac{1}{2}[v_1 + v_2] = \frac{1}{2}[C_1 D_{\nu_1}(X) + C_2 D_{\nu_2}(X)],$$

$$\mathcal{A}_z(X) = C_0 D_{\nu_0}(X),$$
$$\mathcal{E}_x(X) = -(i/2)[v_1 - v_2] = -(i/2)[C_1 D_{\nu_1}(X) - C_2 D_{\nu_2}(X)],$$
$$\mathcal{E}_y(X) = (i/2)[u_2 - u_1] =$$
$$= [\lambda/2(\mu_0^2 + \beta^2)]\,[C_1[\nu_1(\mu_0 - i\beta)D_{\nu_1-1}(X) + (\mu_0 + i\beta)D_{\nu_1+1}(X)] + C_2[\nu_2(\mu_0 + i\beta)D_{\nu_2-1}(X) + (\mu_0 - i\beta)D_{\nu_2+1}(X)]],$$
$$\mathcal{E}_z(X) = (\lambda/\mu_0)C_0[\nu_0 D_{\nu_0-1} + D_{\nu_0+1}].$$

Au moyen de ces fonctions nous calculons sans difficulté les fonctions d'ondes non directement évolutives :

$$\mathcal{V} = (1/m_0c)(\vec{p}\ \vec{\mathcal{E}}), \tag{43}$$

d'où (44)

$$\mathcal{V}(X) = \frac{i\lambda}{2}\left\{C_1\left[\frac{\nu_1}{\mu_0 + i\beta}D_{\nu_1-1}(X) - \frac{1}{\mu_0 - i\beta}D_{\nu_1+1}(X)\right] - C_2\left[\frac{\nu_2}{\mu_0 - i\beta}D_{\nu_2-1}(X) - \frac{1}{\mu_0 + i\beta}D_{\nu_2+1}(X)\right]\right\},$$

$$\mathcal{H}_x(X) = (\beta/\mu_0)C_0 D_{\nu}(X),$$
$$\mathcal{H}_y(X) = (\lambda/\mu_0)C_0[\nu_0 D_{\nu_0-1}(X) - D_{\nu_0+1}(X)],$$
$$\mathcal{H}_z(X) = (1/m_0c)(p_x\mathcal{A}_y - p_y\mathcal{A}_x) \tag{45}$$
$$= -\frac{\lambda}{2}\left\{C_1\left[\frac{\nu_1}{\mu_0 + i\beta}D_{\nu_1-1}(X) - \frac{1}{\mu_0 - i\beta}D_{\nu_1+1}(X)\right] + C_2\left[\frac{\nu_2}{\mu_0 - i\beta}D_{\nu_2-1}(X) - \frac{1}{\mu_0 + i\beta}D_{\nu_2+1}(X)\right]\right\}.$$

Dans le cas particulier où $\beta = 0$ ces résultats se simplifient notablement. La résolution directe des équations (21) s'effectue immédiatement

Dans ce cas, posant $\psi = (\vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{E}})$, on a

$$p_0\psi = \frac{W}{c}\psi,\ p_y\psi = 0,\ p_z\psi = 0,\ \psi = \psi(x)\,e^{\frac{i}{\hbar}Wt} \text{ d'où} \tag{46}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]\mathcal{A}_x(x) = \frac{1}{m_0c}[p_x^2 + m_0^2c^2]\,\mathcal{E}_x(x) \\ \left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]\mathcal{E}_x(x) = m_0c\,\mathcal{A}_x(x) \end{cases} \tag{47}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]\mathcal{A}_y(x) = m_0c\,\mathcal{E}_y(x) \\ \left[\frac{W}{c} + \varepsilon V(x)\right]\mathcal{E}_y(x) = \frac{1}{m_0c}[p_x^2 + m_0^2c^2]\mathcal{A}_y(x) \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} [W/c + \varepsilon V(x)]\mathcal{A}_z(x) = m_0c\,\mathcal{E}_z(x) \\ [W/c + \varepsilon V(x)]\mathcal{E}_z(x) = (1/m_0c)[p_x^2 + m_0^2c^2]\,\mathcal{A}_z(x). \end{cases} \tag{49}$$

Nous en déduisons immédiatement pour

$$u(x) = \mathcal{E}_x(x),\quad \mathcal{A}_y(x),\quad \mathcal{A}_z(x)$$
$$[[W/c + \varepsilon V(x)]^2 - p_x^2 - m_0^2c^2]\,u(x) = 0. \tag{50}$$

Pour $V(x) = -Ex$, effectuant encore le changement de variable

$$(w - kx) = \lambda X, \qquad \lambda^2 = ik/2 \tag{51}$$

nous obtenons l'équation de Weber-Hermite.

$$[\partial^2/\partial X^2 - X^2/4 - i\mu_0^2/2k]\,u(X) = 0. \tag{52}$$

Posant $\nu_0 = -i\mu_0^2/2k - 1/2$, nous en déduisons les expressions

$$\mathcal{E}_x(X) = C_1' D_{\nu_0}(X),$$
$$\mathcal{A}_y(X) = C_2' D_{\nu_0}(X), \tag{54}$$
$$\mathcal{A}_z(X) = C_0' D_{\nu_0}(X).$$

(55)

$$\mathcal{A}_x(X) = \frac{\lambda X}{\mu_0}C_1' D_{\nu_0}(X) = \frac{\lambda C_1'}{\mu_0}[\nu_0 D_{\nu_0-1}(X) + D_{\nu_0+1}(X)],$$
$$\mathcal{E}_y(X) = \frac{\lambda X}{\mu_0}C_2' D_{\nu_0}(X) = \frac{\lambda C_2'}{\mu_0}[\nu_0 D_{\nu_0-1}(X) + D_{\nu_0+1}(X)],$$
$$\mathcal{E}_z(X) = \frac{\lambda X}{\mu_0}C_0' D_{\nu_0}(X) = \frac{\lambda C_0'}{\mu_0}[\nu_0 D_{\nu_0-1}(X) + D_{\nu_0+1}(X)],$$

$$\mathcal{V}(X) = -\frac{2\lambda}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial X}\mathcal{E}_x(X)$$
$$= -(\lambda/\mu_0)C_1'[\nu_0 D_{\nu_0-1} - D_{\nu_0+1}], \tag{56}$$

$$\mathcal{H}_x(X) = 0,$$
$$\mathcal{H}_y(X) = (\lambda/\mu_0)C_0'[\nu_0 D_{\nu-1} - D_{\nu_0+1}], \tag{57}$$
$$\mathcal{H}_z(X) = -(\lambda/\mu_0)C_2'[\nu_0 D_{\nu_0-1} - D_{\nu_0+1}].$$

Dans les deux cas considérés, champ magnétique constant, champ électrique constant, le calcul des dix fonctions d'ondes peut donc s'effectuer complètement. Comme dans le cas de la théorie de Dirac ces fonctions d'ondes s'expriment par des combinaisons de fonctions de Weber-Hermite, mais la théorie du méson introduit trois fonctions principales quand la théorie de Dirac en introduisait deux, ce qui correspond aux nombres respectifs des états de spin.

Manuscrit reçu le 28 février 1956.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Plessett (M. S.), *Phys. Rev.*, 1930, **36**, 1728.
[2] Huff (I. D.), *Phys. Rev.*, 1931, **38**, 501.
[3] Johnson (H. M.) et Lippman (B. A.), *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 702.
[4] Tricomi (F. G.), Funzioni ipergeometriche confluenti (Roma, 1954), chap. 4, p. 218-245.
[5] Buchholz (H.), Die konfluente hypergeometrische Funktion. Springer édit., 1953, p. 38-57.
[6] de Broglie (Louis), Une nouvelle théorie de la lumière, t. **1** et **2**, Paris, Hermann édit.
[7] Petiau (G.), *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 112-122.
[8] Sauter (F.), *Z. Physik*, 1931, **69**, 742-764.
[9] Szczeniowski (S.), *Z. Physik*, 1931, **73**, 553-559.
[10] Darwin (C. G.), *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1949, **2**, 311-320.
[11] Wells (C. P.) et Spence (R. D.), *J. Math. Phys.*, 1945, **24**, 51.