



**HAL**  
open science

## Un modèle théorique simple pour l'étude du mouvement des ions dans un accélérateur linéaire

Michel-Yves Bernard

► **To cite this version:**

Michel-Yves Bernard. Un modèle théorique simple pour l'étude du mouvement des ions dans un accélérateur linéaire. *Journal de Physique et le Radium*, 1954, 15 (10), pp.121-132. 10.1051/jphys-rad:019540015010012100 . jpa-00235035

**HAL Id: jpa-00235035**

**<https://hal.science/jpa-00235035>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## UN MODÈLE THÉORIQUE SIMPLE POUR L'ÉTUDE DU MOUVEMENT DES IONS DANS UN ACCÉLÉRATEUR LINÉAIRE

Par MICHEL-YVES BERNARD,

Laboratoire de Radioélectricité de l'École Normale supérieure.

**Sommaire.** — On propose un modèle mathématique pour représenter le mouvement des ions dans un accélérateur linéaire. On décrit d'abord par une loi simple le mouvement de la particule « type », celle dont la phase reste constante par rapport à l'onde accélératrice; on dispose de paramètres en nombre suffisant pour ajuster convenablement le modèle aux données expérimentales connues. Il est alors possible, grâce à la simplicité des formules obtenues, de mener à son terme l'étude du mouvement des ions. L'auteur traite ensuite le mouvement longitudinal; les formules obtenues permettent de rechercher les conditions optima de groupement des particules autour de la particule « type ». On montre, en particulier, qu'un champ d'amplitude croissante avec l'abscisse donne, toutes choses égales par ailleurs, un groupement en phase très énergique.

**1. L'accélérateur linéaire d'ions.** — 1.1. PRINCIPE DE L'ACCÉLÉRATEUR LINÉAIRE D'IONS. DIFFICULTÉS D'UNE THÉORIE DIRECTE DU MOUVEMENT. — L'appareil (*fig. 1*) se compose d'une cavité résonnante, chargée, suivant son axe, par une succession de tubes, de longueur variable, séparés par des coupures. Le diamètre de ces tubes est tel qu'aucune onde progressive ne puisse prendre naissance à l'intérieur.

On constatera sans peine que le champ  $E_z$  sur l'axe des tubes, a l'aspect donné à la figure 1. Chaque coupure donne une courbe en cloche, dont l'amplitude varie sinusoidalement avec le temps. Nous noterons ce champ :

$$E_z = A(z) \cos \omega t. \quad (1.1)$$

Nous avons indiqué antérieurement un procédé permettant d'évaluer numériquement ce champ [4].

Considérons une particule qui traverse le centre de la première coupure au temps  $t_0$ . Elle subit une certaine accélération. La seconde coupure est placée de façon que la particule y retrouve le champ accélérateur dans la même phase, donc qu'elle la traverse au temps  $t_0 + T$ . Les autres coupures seront placées suivant la même loi. Cette particule qui sera appelée dans la suite la particule « type » aura donc un mouvement très régulier; toutes les autres, par contre, auront des mouvements plus compliqués; certaines particules, complètement « déphasées » traverseront les coupures à des instants où le champ est retardateur, seront freinées et se perdront dans les parois.

Il est important de noter que tout l'accélérateur est bâti à partir du mouvement de la particule « type »; comme ce mouvement dépend de la structure de l'accélérateur, on voit qu'il y a là un cercle

vicieux, qui ne sera résolu que par une méthode d'approximations successives.

Le modèle théorique le plus évident consiste à étudier le mouvement d'une particule à travers le

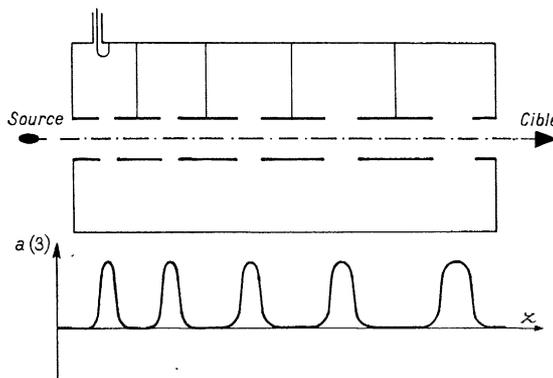


Fig. 1. — Schéma de principe d'un accélérateur linéaire; allure du champ sur l'axe.

champ stationnaire d'une coupure. L'équation du mouvement axial est :

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = e A(z) \cos \omega t.$$

Malheureusement, on ne sait pas intégrer une telle équation. Les tentatives de F. Rabinovitch [16] ne laissent que peu d'espoir d'obtenir une solution représentable, même de façon approchée par des fonctions simples. Il faut faire des approximations, comme celle qui consiste à écrire que le « temps de transit » de la particule à travers la coupure est négligeable. Comme ce temps de transit

est de l'ordre du quart de période, la quantité  $\cos \omega t$  passe de 0 à 1, pendant la traversée de la coupure par la particule. On ne saurait donc assimiler  $\cos \omega t$  avec une constante. Nous sommes donc contraint de chercher un autre modèle théorique.

1.2. ACCÉLÉRATION DES PARTICULES PAR UNE ONDE PROGRESSIVE. — Certains montages sont susceptibles de créer une onde de vitesse variable. Les deux plus connus sont le guide à corrugations [7], [8], [9], [10] couramment utilisé pour l'accélération des électrons, et le guide chargé par une hélice de pas variable [5], [6] utilisé en particulier dans les tubes haute fréquence à propagation d'onde. Soit

$$E_z = A(z) \sin[\varphi(z) - \omega t]. \quad (1.2)$$

le champ axial d'une telle onde. On conçoit qu'une particule de masse  $M$ , et de charge  $e$  puisse accompagner l'onde en restant à une phase constante  $\varphi_s$ . En effet, elle est soumise à la force :

$$F = e A(z) \sin \varphi_s.$$

Mais puisque sa phase reste constante, et égale à  $\varphi_s$ , son équation horaire est de la forme :

$$\varphi(z) = \varphi_s + \omega t. \quad (1.3)$$

En exprimant que la force est égale au produit de la masse par l'accélération, on obtient la condition de synchronisme :

$$A(z) \sin \varphi_s + \frac{M}{e} \omega^2 \frac{\varphi''}{\varphi'^3} = 0. \quad (1.4)$$

L'onde devra obéir à cette condition, pour être capable d'accélérer une particule, en la maintenant à la phase  $\varphi_s$ . Si l'onde n'obéit pas à cette condition, elle sera incapable d'accélérer de façon continue. Elle agira sur la particule, tantôt positivement, tantôt négativement; son action sera nulle, en moyenne, et en réalité se traduira par la présence de petites oscillations. Nous aurons l'occasion de montrer que l'amplitude de ces oscillations est très petite, surtout si la fréquence est importante.

On voit maintenant se dégager le principe d'une théorie de l'accélérateur linéaire à ondes progressives :

— Choisissons le mouvement de la particule « type », et déduisons de la condition de synchronisme l'onde progressive qu'il faut réaliser;

— Cherchons ensuite un guide accélérateur qui puisse donner une telle onde.

L'étude du mouvement général des particules sera alors très facile grâce à la forme, en général simple, de l'onde obtenue à partir de l'équation de synchronisme.

Malheureusement, si l'on cherche à réaliser un guide à corrugations, donnant naissance à une onde de vitesse suffisamment faible pour accélérer des

protons de faible énergie, on obtient des caractéristiques mécaniques irréalisables. (Prenons une fréquence de  $3.10^9$  MHz pour l'onde accélératrice. Un proton de 1 MeV <sup>(1)</sup> parcourt 4 mm pendant une période. Il est difficile de placer deux corrugations aussi près. Par contre, un électron de 100 keV parcourt, pendant une période, 5,4 cm, etc.).

La méthode de l'onde progressive ne semble pas réalisable simplement pour l'accélération des protons à partir de faibles énergies. Des recherches ont lieu actuellement sur ce sujet [6].

1.3. ANALOGIES ENTRE LES DEUX PROCÉDÉS D'ACCÉLÉRATION. — Nous avons vu que l'onde accélératrice devait obéir à une certaine condition de synchronisme. Toute onde qui n'y satisfait pas se borne à perturber légèrement le mouvement de la particule.

Si nous ajoutons, à l'onde accélératrice l'onde rétrograde :

$$A(z) \sin[\varphi(z) + \omega t]$$

(qui ne satisfait pas à la condition de synchronisme) on obtient une onde stationnaire, qui se rapproche de celle réalisée dans l'appareil de la figure 1.

Si nous ajoutons encore des harmoniques stationnaires de la forme :

$$a_n A(z) \sin n \varphi(z) \cos \omega t,$$

on trouve un champ stationnaire :

$$\left[ \sum_n a_n A(z) \sin n \varphi(z) \right] \cos \omega t \quad (1.5)$$

dont la forme peut être quelconque, mais dont l'action dynamique essentielle est celle de la composante fondamentale :

$$A(z) \sin[\varphi(z) - \omega t],$$

les autres n'apportant que des perturbations.

On comprend alors que la théorie que nous avons ébauchée au paragraphe précédent puisse s'appliquer à l'accélérateur d'ions.

Pour ce faire on choisira une loi simple pour représenter de façon approchée, le mouvement de la particule « type ». La condition de synchronisme fournira l'onde accélératrice qui crée ce mouvement, et en particulier la loi des phases  $\varphi(z)$  qui fixe la position des coupures accélératrices.

Le champ réel  $A(z)$  est alors déterminé. Reste à savoir s'il peut se mettre sous la forme d'une somme de fonctions d'onde.

Un raisonnement identique à celui des séries de

(1) On sait que l'on mesure l'énergie d'un corpuscule à partir de la différence de potentiel statique qui lui aurait communiqué la même énergie. Il nous arrivera souvent de parler, de ce fait, du « potentiel d'une particule ».

Fourier permet d'obtenir les coefficients  $a_n$  pour que la fonction :

$$\left[ \sum_n a_n A(z) \sin n [\varphi(z)] \right]$$

représente le champ  $A(z)$ . Nous reviendrons ultérieurement sur ces résultats.

Dans la pratique, il faudra ajuster la largeur des coupures, le rayon des tubes, etc., de façon que le coefficient de l'onde fondamentale  $A_1$  soit aussi grand que possible, tandis que ceux des harmoniques voisins soient, au contraire, aussi faibles que possible. Dans la plupart des cas, l'usage de modèles expérimentaux sera plus efficace que la théorie, pour la détermination des caractéristiques de la cavité.

Il convient de noter, en terminant, que l'appareil de la figure 1 donnera un champ dont l'amplitude est la même tout le long du montage. Rien n'empêche de supposer que l'on place ces tubes sur l'axe d'une cavité de diamètre variable; ou bien encore, que l'on alimente chaque coupure par une cavité particulière, toutes ces cavités étant bien entendu couplées pour vibrer en phase.

Nous reviendrons sur ces divers procédés, nous bornant à signaler qu'il n'est pas inutile d'étudier le cas de champs accélérateurs dont l'amplitude varie avec l'abscisse. Nous verrons d'ailleurs que ces champs sont doués de propriétés dynamiques intéressantes.

**2. Principes généraux de la théorie du mouvement.** — 2.1. DESCRIPTION DU MOUVEMENT DE LA PARTICULE « TYPE ». — 2.1.1. *Loi d'accroissement de l'énergie.* — Les données fondamentales, qui fixent les caractéristiques de l'accélérateur sont sa longueur  $L$  et les énergies de la particule, à l'entrée,  $\Phi_i$  et à la sortie  $\Phi_f$ . La représentation graphique de la fonction donnant l'énergie  $\Phi(z)$  de la particule « type », en fonction de l'abscisse parcourue aura l'allure de la figure 2. Comme cette particule « type » a un mouvement régulier, la courbe aura une forme simple.

Nous chercherons à la représenter par un arc de courbe de la fonction puissance; nous poserons :

$$\Phi = K z^{2\nu}, \tag{2.1}$$

$\nu$  étant un nombre positif. On le déterminera ultérieurement de façon que la loi choisie représente aussi correctement que possible les propriétés expérimentales des accélérateurs.

Le paramètre  $K$ , par contre, est déterminé en écrivant que la traversée d'une longueur  $L$  correspond à un gain de potentiel  $\Phi_f - \Phi_i$ , d'où

$$K = \frac{\left[ \Phi_f^{\frac{1}{2\nu}} - \Phi_i^{\frac{1}{2\nu}} \right]^{2\nu}}{L^{2\nu}}$$

L'origine des abscisses ne coïncide pas avec l'entrée de l'accélérateur dont l'abscisse est :

$$z_i = \left[ \frac{\Phi_i}{K} \right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

Il est évident que la fonction représentant la loi réelle (en pointillés sur la figure) n'aura pas les points anguleux que la représentation approchée,  $\Phi = Kz^{2\nu}$  introduit à l'entrée et à la sortie. Nous négligerons les perturbations ainsi introduites.

2.1.2. *Loi du mouvement de la particule « type ».* — En remplaçant  $e\Phi$  par son expression classique  $\frac{1}{2}Mv^2$ ,

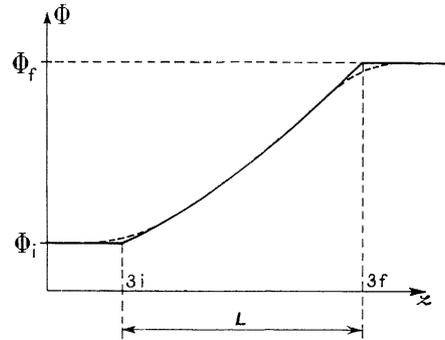


Fig. 2. — Énergie de la particule « type » en fonction de la distance parcourue.

on obtient la vitesse en fonction de l'abscisse :

$$v = \sqrt{\frac{2eK}{M}} z^\nu.$$

Une intégration fournit ensuite l'équation horaire du mouvement :

$$z^{1-\nu} = z_i^{1-\nu} + \sqrt{\frac{2eK}{M}} [1-\nu] (t - t_i); \tag{2.2}$$

$t_i$  est l'instant d'injection de la particule dans l'accélérateur. Nous prendrons, comme origine des temps, l'instant immédiatement antérieur à l'injection où le champ appliqué à l'appareil s'annule.  $\omega t_i$  sera donc inférieur à  $2\pi$ .

Dans le cas particulier  $\nu = 1$ , l'intégration est un peu différente, et l'on a :

$$z = z_i \exp \sqrt{\frac{2eK}{M}} [t - t_i]. \tag{2.2'}$$

Le temps de transit de la particule à travers l'accélérateur est aisé à calculer. La particule ressort à l'instant  $t_i + \Delta t$ .  $\Delta t$  est donné par

$$\Delta t = \frac{1}{1-\nu} \sqrt{\frac{M}{2e}} \frac{\left[ \Phi_f^{\frac{1-\nu}{2\nu}} - \Phi_i^{\frac{1-\nu}{2\nu}} \right]}{K^{\frac{1}{2\nu}}}, \tag{2.3}$$

où si  $\nu = 1$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{M}{8eK}} \text{Log} \frac{\Phi_f}{\Phi_i} \quad (2.3')$$

en prenant comme variable le potentiel de la particule type comme nous le ferons souvent désormais.

2.1.3. *Petitesse de la correction relativiste.* — Nous continuons à décrire le potentiel de la particule type par la même loi, mais nous cherchons à préciser le mouvement vers les grandes énergies, lorsque la correction relativiste commence à faire sentir son effet.

Prenons l'équation relativiste liant la vitesse à l'énergie :

$$\frac{dz}{dt} = v = \sqrt{\frac{2e\Phi}{M} \frac{\left[1 + \frac{e\Phi}{2Mc^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1 + \frac{e\Phi}{Mc^2}\right]}}$$

et développons en série en ne gardant que les deux premiers termes.

Nous avons, en remplaçant le potentiel par son expression :

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2eK}{M}} z^\nu \left[1 - \frac{3eK}{4Mc^2} z^{2\nu}\right]$$

dont l'intégration conduit, dans les limites de l'approximation, à

$$\begin{aligned} z^{1+\nu} - z_i^{1+\nu} + \frac{3}{4} \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{eK}{Mc^2} [z^{1+\nu} - z_i^{1+\nu}] \\ = (1-\nu) \sqrt{\frac{2eK}{M}} (t - t_i). \end{aligned}$$

Un terme correctif apparaît.

Cherchons son importance dans le cas de l'accélérateur de Berkeley, dont on trouvera les caractéristiques au paragraphe 2.3.1, ainsi que les valeurs des paramètres correspondant à ce modèle.

On trouve pour le terme correctif :

$$6.10^{-4} \left( z^{\frac{3}{2}} - z_i^{\frac{3}{2}} \right).$$

On voit que le coefficient est extrêmement faible. Le temps de transit n'est pas modifié de façon sensible (moins de 1 pour 100).

Il est donc clair que l'approximation newtonienne fournira d'excellents résultats dans la théorie d'accélérateurs d'ions de ce type. Une fois l'avant-projet terminé, on pourra se préoccuper des valeurs des corrections qui résultent de l'effet relativiste.

2.1.4. *Quelques formules utiles.* — Il est aisé de trouver la relation entre l'énergie de la particule et le temps. On en déduit le gain d'énergie à chaque période. On a sensiblement :

$$\Delta\Phi \simeq \frac{2\nu}{f} \sqrt{\frac{2e}{M}} K^{\frac{1}{2\nu}} \Phi^{\frac{3\nu-1}{2\nu}}, \quad (2.4)$$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$  étant la fréquence de l'onde haute fréquence accélératrice. Considérons maintenant la structure du guide accélératrice (cf. fig. 1). Comme la particule franchit une coupure accélératrice par période, la quantité  $\Delta\Phi$  est liée à la différence de potentiel qui existe entre les bords des coupures. Cette différence de potentiel ne peut dépasser une certaine valeur, sous peine d'entraîner des claquages.

D'autre part, la formule (2.2), permet de calculer la distance  $\Delta z$  parcourue entre la  $n^{\text{ième}}$  et la  $(n+1)^{\text{ième}}$  période :

$$\begin{aligned} \Delta z = \left[ z_i^{1+\nu} + (1-\nu) \sqrt{\frac{2eK}{M}} (n+1)T \right]^{\frac{1}{1-\nu}} \\ - \left[ z_i^{1+\nu} + (1-\nu) \sqrt{\frac{2eK}{M}} nT \right]^{\frac{1}{1-\nu}}. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Cette distance représente la longueur du  $n^{\text{ième}}$  tube accélératrice de la figure 1. On pourra ainsi se rendre compte de la longueur de ces tubes, ainsi que celle des coupures. Pratiquement, la largeur de la coupure sera une fraction déterminée de la distance parcourue pendant une période  $\left(\frac{1}{4} \text{ ou } \frac{1}{5}, \text{ etc.}\right)$ .

Lorsque l'on voudra faire le projet d'un accélérateur il sera utile de connaître ces paramètres, qui fixeront l'ordre de grandeur admissible pour  $\nu$ .

2.2. CALCUL DU CHAMP ACCÉLÉRATEUR. — 2.2.1. *Onde progressive.* — Le champ sur l'axe est de la forme :

$$E_z = A(z) \sin[\varphi(z) - \omega t].$$

Exprimons que la phase de la particule, par rapport à l'onde est constante et égale à  $\varphi_s$ . On obtient

$$\varphi(z) = \varphi_s + \omega t_i + \frac{\omega}{1-\nu} \sqrt{\frac{M}{2eK}} [z^{1-\nu} - z_i^{1-\nu}]$$

et l'application de la condition de synchronisme donne l'amplitude :

$$A(z) = \frac{2\nu K}{\sin \varphi_s} z^{2\nu-1}.$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} E_z = \frac{2\nu K}{\sin \varphi_s} z^{2\nu-1} \times \\ \sin \left[ \varphi_s + \omega t_i + \omega \sqrt{\frac{M}{2eK}} \frac{z^{1-\nu} - z_i^{1-\nu}}{1-\nu} - \omega t \right]. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où  $\nu = 1$ , on trouve :

$$E_z = \frac{2\nu K}{\sin \varphi_s} z \sin \left[ \varphi_s + \omega(t_i - t) + \omega \sqrt{\frac{M}{2eK}} \text{Log} \frac{z}{z_i} \right].$$

Il est aisé de déduire de l'expression du champ axial les valeurs des champs au voisinage de l'axe.

En appliquant le théorème d'Ampère à un petit cercle d'axe Oz et de rayon  $r$ , on a :

$$B_0 = \frac{r}{2c^2} \frac{dE_z}{dt}$$

et, en transportant dans cette formule, l'expression de  $E_z$  :

$$B_0 = -\frac{r\nu K}{\sin \varphi_s} \frac{\omega}{c^2} z^{2\nu-1} \sin[\varphi(z) - \omega t]. \quad (2.7)$$

On obtiendra la valeur du champ radial en appliquant le théorème de Gauss à un petit cylindre d'axe Oz et de longueur  $dz$  :

$$E_r = -\frac{r}{2} \frac{dE_z}{dz},$$

d'où l'on déduit :

$$E_r = -\frac{r\nu K}{\sin \varphi_s} \left\{ (2\nu - 1) z^{2\nu-2} \sin[\varphi - \omega t] + \omega \sqrt{\frac{M}{2eK}} z^{\nu-1} \cos[\varphi - \omega t] \right\}. \quad (2.8)$$

Ces expressions seront utiles pour calculer le mouvement latéral des particules.

2.2.2. *Onde stationnaire.* — Nous obtiendrons l'onde stationnaire en composant deux ondes progressives en sens inverse :

$$A(z) \sin[\varphi(z) - \omega t], \quad A(z) \sin[\varphi(z) + \omega t].$$

En utilisant les expressions du chapitre précédent :

$$E = \frac{4\nu K}{\sin \varphi_s} z^{2\nu-1} \sin \varphi(z) \cos \omega t. \quad (2.9)$$

Les nœuds de cette onde stationnaire se trouvent aux abscisses correspondant à  $\varphi = k\pi$  :

$$z_k^{1-\nu} = z_i^{1-\nu} + \frac{1-\nu}{\omega} \sqrt{\frac{2eK}{M}} [k\pi - \varphi_s - \omega t_i].$$

Nous sommes en mesure de connaître le champ qu'il faudra réaliser pour obtenir le mouvement choisi pour la particule type.

Plusieurs cas se présentent :

1°  $\nu < \frac{1}{2}$ ; c'est le cas, entre autres, des accélérateurs du type de Sloan [11], [12], où la même source de potentiel alimente chaque coupure. De ce fait, le gain de potentiel est le même à chaque coupure. La formule (2.4) montre que cela est réalisé pour  $\nu = \frac{1}{3}$ . C'est donc cette valeur du paramètre qui décrira les appareils du type Sloan. Le champ a une amplitude décroissante, avec  $z$  comme l'indique la figure. La distance de deux nœuds consécutifs croît plus lentement qu'une progression arithmétique.

2° Lorsque  $\nu = \frac{1}{2}$ , le champ a une amplitude constante. La distance de deux nœuds consécutifs

croît en progression arithmétique. C'est le champ que l'on trouve réalisé sensiblement dans les appareils du type Alvarez [1], [2], [3]. Ce sera le champ le plus aisé à réaliser sur une longueur importante.

3° Enfin, si  $\nu$  est supérieur à  $\frac{1}{2}$ , l'amplitude du champ croît avec la distance. Un tel champ n'est donc pratiquement réalisable que sur une longueur limitée, car on trouvera rapidement des valeurs trop élevées qui amèneraient des claquages.

On utilisera donc ce champ de deux manières :

— soit dans un accélérateur court, cas qui ne soulève pas de difficultés;

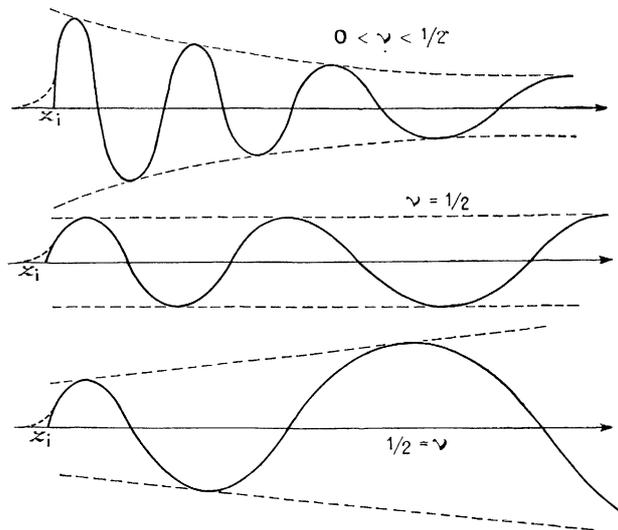


Fig. 3. — Diverse allures du champ accélérateur suivant les valeurs du paramètre  $\nu$ . Sur la courbe inférieure, lire  $\frac{1}{2} < \nu$ .

— soit dans un appareil long, à condition de changer la loi, après une certaine longueur. En effet, le champ correspondant à cette valeur de  $\nu$  se révélera très utile pour rassembler les particules. On pourra donc le choisir, sur les premiers mètres de l'appareil. Puis, une fois le groupement obtenu, on reviendra à des valeurs plus aisément réalisables, telles que  $\nu = \frac{1}{2}$  ou  $\nu = \frac{1}{3}$ .

La figure 3 illustre ces différents cas.

2.2.3. *Perturbations apportées par l'onde de retour.*

— L'équation exacte du mouvement longitudinal d'une particule dans le champ est :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{4e\nu K}{M \sin \varphi_s} z^{2\nu-1} \sin \varphi(z) \cos \omega t \quad (2.10)$$

en prenant l'expression du champ stationnaire. Il est bien évident que la formule (2.2) ne fournira pas une solution de cette équation puisque nous avons négligé l'influence de l'onde de retour pour

l'établir. Il est donc essentiel d'évaluer la perturbation ainsi introduite.

Prenons donc la solution exacte sous la forme :

$$z = z_1 + \varepsilon,$$

$z_1$  représentant l'abscisse de la particule dont la phase reste constante, déduite de l'équation (2.2). En se limitant à l'approximation du premier ordre, on trouve une équation différentielle simple pour la perturbation  $\varepsilon$  :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = \frac{2\nu K e}{M \sin \varphi_s} z_1^{2\nu-1} \sin(2\omega t + \varphi_s),$$

d'où l'on définit  $\varepsilon$ . La particule de référence effectuera donc autour de son mouvement régulier, créé par l'onde de sens positif, de légères oscillations, créées par l'onde de retour.

Dans le cas très intéressant en pratique où  $\nu = \frac{1}{2}$ , l'amplitude constante des oscillations est donnée par :

$$A = \frac{K e}{4M \omega^2 \sin \varphi_s}. \quad (2.11)$$

A titre d'exemple, dans le cas de l'accélérateur de Berkeley, on trouve une amplitude de l'ordre de  $1/10^6$  de millimètre ce qui est négligeable devant la longueur de l'accélérateur.

Nous avons donc le droit de négliger l'onde de retour surtout si la fréquence est grande. C'est ce que nous ferons dans la suite de cette étude.

Les expériences faites par M. Sarazin [10] sur un accélérateur d'électrons montrent que cette perturbation est pratiquement insensible.

### 2.3. QUELQUES EXEMPLES NUMÉRIQUES. —

2.3.1. *Application à un accélérateur existant.* — La réalisation moderne d'accélérateur linéaire à protons la mieux connue est celle d'Alvarez et de ses collaborateurs, à Berkeley [1], [2], [3].

L'appareil a 12,2 m de long. Il reçoit des protons à  $4.10^6$  eV et les porte à  $32.10^6$  eV. Les tubes accélérateurs sont placés suivant l'axe d'une cavité cylindrique, de rayon 46 cm qui oscille suivant le mode  $E_{010}$ . Le champ accélérateur a donc une amplitude constante, ce qui montre que le mouvement de la particule type sera décrit par la valeur  $\nu = \frac{1}{2}$ .

On déduit de là :

$$K = 2.3.10^6, \quad \Delta t = 2,25.10^{-7} \text{ s.}$$

Comparons avec l'expérience. Il y a 46 tubes de glissement, sur l'axe. La particule met une période pour traverser un de ces tubes. Comme la fréquence est  $f = 202,5$  MHz, on déduit sans peine le temps de transit expérimental  $\Delta t = 2,25.10^{-7}$  s. L'accord est bon.

Les formules permettent de calculer la longueur des tubes; on a sensiblement :

$$\Delta z = 0,053(2,6 + 0,1n).$$

On a donc, pour le premier tube 14 cm et pour le dernier 38 cm, les tubes intermédiaires se déduisant par une progression arithmétique. On trouve, dans l'appareil réel, les longueurs 13,8 et 37 cm pour les tubes extrêmes. L'accord est encore correct.

Enfin, dernier exemple, calculons le champ dans l'accélérateur. On trouve avec notre modèle  $4,85.10^6$  V/m. L'appareil réel correspond à un champ de  $1,5.10^6$  V/foot, ce qui donne encore un très bon accord.

Le calcul du champ accélérateur nécessite la connaissance de la phase de la particule type. L'appareil de Berkeley est réglé pour une phase de  $\varphi_s = 120^\circ$  ( $30^\circ$  du maximum de l'onde). Il est donc clair que notre modèle est bien adapté à la description de cet accélérateur.

2.3.2. *Application à un projet d'accélérateur.* — Cherchons à établir les principales caractéristiques d'un accélérateur, en utilisant notre modèle. Prenons des protons, issus d'un accélérateur préliminaire à  $\Phi_i = 10^6$  eV. Un tel accélérateur préliminaire sera, par exemple, un transformateur à impulsions, tel que celui utilisé, au C. I. T. pour l'injection des électrons dans un synchrotron [13]. Cherchons à leur communiquer l'énergie  $\Phi_f = 4.10^6$  eV après un parcours de  $L = 3$  m.

Fixons-nous la phase  $\varphi_s$  de la particule type. Nous verrons au paragraphe 3 que cette phase est obligatoirement comprise entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ , et ne saurait pas approcher trop près de  $\pi$  sous peine de nécessiter un champ accélérateur trop intense. Prenons  $\varphi_s = 115^\circ$  pour fixer les idées.

Reste à choisir la fréquence d'alimentation, et la valeur de  $\nu$ . Les résultats d'Alvarez et de ses collaborateurs montrent que la valeur  $\nu = \frac{1}{2}$  est réalisable; elle donne un champ d'amplitude constante. Il est vraisemblable qu'en utilisant plusieurs cavités ou une seule de diamètre variable, on puisse obtenir un champ d'amplitude variable, mais il est peu probable que l'on puisse construire des appareils donnant des champs dont l'amplitude augmente rapidement. Il est donc sage de se borner à prendre, comme exemple, des valeurs de  $\nu$  voisines de  $\frac{1}{2}$ . Nous prendrons successivement  $\frac{1}{3}$

(montage de Sloan)  $\frac{1}{2}$  (montage d'Alvarez),  $\frac{2}{3}$  et nous terminerons par 1 qui correspond à un champ dont l'amplitude augmente linéairement avec l'abscisse. Nous pouvons alors calculer les valeurs de  $K$ , de  $z_i$  et les temps de transit :

$\nu$ .	$K$ .	$s$ .	$\Delta t$ .
$\frac{1}{3}$ .....	$1,75 \cdot 10^6$	0,43	$1,36 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{2}$ .....	$10^6$	1	$1,41 \cdot 10^{-7}$
$\frac{2}{3}$ .....	$0,515 \cdot 10^6$	1,64	$1,43 \cdot 10^{-7}$
1 .....	$0,111 \cdot 10^6$	3	$1,47 \cdot 10^{-7}$

On peut constater que les temps de transit sont peu différents les uns des autres.

La fréquence intervient, en premier lieu, en déterminant le nombre de coupures accélératrices. Comme la particule met une période pour franchir l'intervalle qui sépare deux coupures accélératrices, on aura donc

$$n = f \Delta t.$$

Mais il est essentiel de tenir compte de la formule (2.5) qui donne la distance de deux coupures (longueur du tube de glissement) et de la formule (2.4) qui donne le gain d'énergie à chaque coupure. Ce gain ne peut être trop élevé, sous peine d'exiger des différences de potentiel qui feront naître des claquages. D'autre part, la longueur des tubes ne peut descendre au-dessous d'une certaine valeur, etc.

Finalement, dans l'exemple qui précède, une fréquence de 100 MHz donne, pour ces quantités, des ordres de grandeur convenables. C'est cette fréquence que nous adopterons dans la suite. Il y aura une quinzaine de coupures accélératrices, dont la distance moyenne sera de l'ordre de 20 cm. Si l'on admet que la largeur de la coupure est égale au tiers de la longueur du tube de glissement, on obtient des tubes de 15 cm en moyenne et des coupures de 5 cm. Ces coupures « tiendront » facilement les 200 000 V que la particule gagne en moyenne à chaque période. La loi complète de distribution des longueurs de tube s'obtiendra sans peine, en utilisant la formule (2.5).

2.3.3. *Emploi des très hautes fréquences.* — Un générateur de 100 MHz n'est pas d'une construction aisée, et ne trouve que peu d'applications dans la pratique. Au contraire, les générateurs de 3 000 MHz ( $\lambda = 10$  cm) sont maintenant courants, grâce au radar. On possède, en particulier, des klystrons, de grande puissance, qui sont les oscillateurs rêvés pour alimenter une cavité, laquelle, vibrant sur 10 cm aura des dimensions beaucoup plus faibles.

Cherchons donc à adapter notre modèle à l'usage d'une fréquence de 3 000 MHz. Prenons  $\nu = \frac{1}{2}$ . Nous obtenons alors 450 intervalles de glissement, de longueur moyenne 6 mm (tube de 4,5 mm et coupures de 1,5 mm). Il semble difficile de réaliser des résonateurs aussi plats. En outre, le diamètre intérieur des tubes doit être extrêmement faible, car les ondes doivent pénétrer le moins possible à l'intérieur des tubes de glissement. Il faut, en effet,

que les particules soient soustraites à l'action du champ pendant la demi-période où celui-ci est retardateur. Cette condition impérative exige des tubes dont le diamètre est de l'ordre du millimètre en moyenne. Il est clair qu'un tel résonateur est impropre à accélérer des corpuscules, ceux-ci se perdant tout de suite dans les parois.

Le seul espoir d'utilisation des ultra-hautes fréquences pour l'accélération des particules lourdes consiste à revenir aux guides à iris qui fonctionnent dans le cas des électrons. On trouvera, dans les articles de Vastel et de Sarazin [9], [10] les résultats essentiels sur ces guides, et les méthodes permettant de calculer leurs caractéristiques. Un tel guide fonctionnant suivant le mode  $\pi$  comporterait, au début, des diaphragmes distants de 2 mm environ, ce qui est difficilement réalisable, mais peut-être pas impossible.

Des expériences actuellement en cours au Laboratoire de Radioélectricité de la Faculté des Sciences de Paris permettront de se rendre compte des possibilités réelles d'utilisation des ultra-hautes fréquences pour l'accélérateur linéaire de particules lourdes.

Dans la suite de ce Mémoire, nous conserverons l'exemple numérique des ondes métriques ( $f \simeq 10^8$ ) qui correspond à des appareils ayant réellement fonctionné.

### 3. Mouvement longitudinal d'une particule. —

3.1. PETITS MOUVEMENTS LONGITUDINAUX AUTOUR DE LA PARTICULE. — 3.1.1. *Distinction entre abscisse, phase et énergie.* — La méthode de calcul du paragraphe précédent nous a donné une expression simple du champ accélérateur. Nous savons, d'autre part, que la particule injectée à l'instant  $t_i$  avec la vitesse correspondant au potentiel  $\Phi_i$ , prend, sous l'action de cette onde un mouvement régulier dont l'équation horaire est donnée par (2.2).

Mais il est évident que tous les ions ne seront pas injectés à l'instant  $t_i$ . Il est donc essentiel de chercher le mouvement communiqué par l'onde progressive à une particule quelconque.

De plus, la particule stable elle-même risque de subir de légères perturbations sous différentes causes (choc contre des molécules du gaz résiduel, influence de l'onde de retour, défauts de construction mécanique, etc.). Son mouvement réel sera donc légèrement perturbé, et il est essentiel que les oscillations qui prendront ainsi naissance soient très rapidement amorties.

Nous allons chercher une première approximation de ce mouvement longitudinal, en supposant que la particule que nous étudions reste voisine de la particule « type ».

Nous ferons ainsi l'approximation classique des petits mouvements, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier.

Si  $z$  est l'abscisse d'une particule étudiée, nous poserons

$$z = z_1 + \varepsilon,$$

$z_1$  est l'abscisse de la particule de phase constante, donnée en fonction du temps, par l'équation (2.2).

Nous faisons apparaître la « dispersion en abscisses »  $\varepsilon$ , écart entre la particule étudiée et la particule de phase constante. Il sera aussi utile de repérer une particule par la phase de l'onde progressive au point où elle se trouve. La phase de l'onde est, en général :

$$\varphi(z) - \omega t = \varphi_s + \omega t_i + \omega \sqrt{\frac{M}{2eK}} \frac{z^{1-\nu} - z_1^{1-\nu}}{1-\nu} - \omega t$$

en fonction de l'abscisse et du temps.

En remplaçant  $z$  par  $z_1 + \varepsilon$  et  $z_1$  par sa valeur tirée de (2.2), on obtient la phase de la particule voisine dont nous étudions le mouvement. On

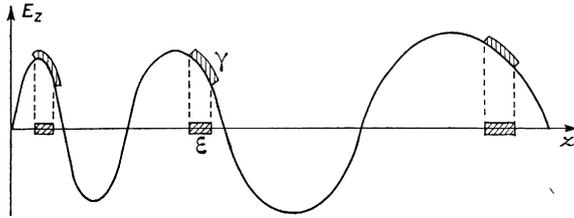


Fig. 4. — Différences entre écarts en phase  $\gamma$  et écarts en abscisses  $\varepsilon$ .

obtient alors sans difficulté, la « dispersion en phase » donnée par :

$$\gamma = \varphi(z) - \varphi_s = \omega \sqrt{\frac{2eK}{M}} z_1^{-\nu} \varepsilon \quad (3.1')$$

Dans le cas particulier où  $\nu = 1$ , la phase est donnée par une expression un peu différente. On a alors :

$$\gamma = \omega \sqrt{\frac{2eK}{M}} \frac{\varepsilon}{z_1} \quad (3.1'')$$

La dispersion en phase ne varie donc pas de la même manière que la dispersion en abscisse. Ce fait est facile à comprendre.

Considérons l'onde accélératrice (fig. 4). Sa longueur d'onde augmente avec  $z$ , mais correspond toujours à une variation de phase de  $2\pi$  par définition.

On conçoit que l'écart en abscisse augmente comme l'indique la figure 4, bien que l'écart en phase diminue. Cette différence, très sensible sur les accélérateurs d'ions est insensible sur les accélérateurs d'électrons, pour lesquels la vitesse de l'onde et, par suite, la longueur d'onde est sensiblement constante.

Suivant les cas, le calcul de  $\varepsilon(t)$  ou de  $\gamma(t)$  sera

plus aisé. L'équation (3.1) permettra de passer de l'un à l'autre.

On peut enfin déterminer la position d'une particule par l'écart en énergie, avec la particule de référence :

$$\Phi(z) = \Phi(z_1) + \varphi,$$

on montrera sans peine que :

$$\varphi = \sqrt{2eMK} z_1^\nu \varepsilon_i = \frac{1}{\omega} [\nu \sqrt{2eKM} z_1^{2\nu-1} \gamma + z_1^{2\nu} \gamma_i']. \quad (3.1'')$$

Ainsi, groupement en abscisse ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), en phase ( $\gamma \rightarrow 0$ ) et en énergie ( $\varphi \rightarrow 0$ ) ne sont pas des expressions synonymes.

3.1.2. *Équation du mouvement. Intégration par des fonctions de Bessel.* — Il faut résoudre l'équation du mouvement longitudinal :

$$Mz'' = e \frac{2\nu K}{\sin \varphi_s} z^{2\nu-1} \sin [\varphi(z) - \omega t] \quad (3.2)$$

dans l'approximation du premier ordre où nous nous plaçons (2), nous remplaçons  $z$  par sa valeur  $z_1 + \varepsilon$ . Après quelques calculs, on obtient l'équation :

$$\varepsilon'' = \varepsilon \frac{2e\nu K}{\sin \varphi_s} \left[ (2\nu - 1) \sin \varphi_s z_1^{2\nu-2} + \omega \sqrt{\frac{M}{2eK}} \cos \varphi_s z_1^{\nu-1} \right].$$

En remplaçant  $z_1$  par sa valeur en fonction du temps, on a :

$$\varepsilon'' + \varepsilon \left[ -\frac{\omega\nu \cotg \varphi_s}{(1-\nu)(t-t_0)} - \frac{(2\nu-1)\nu}{(1-\nu)^2(t-t_0)^2} \right] = 0 \quad (3.3)$$

en posant :

$$t_0 = t_i - \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{M}{2eK}} z_1^{1-\nu},$$

ce qui revient à changer l'origine du temps.

L'intégration de cette équation fournira l'écart des abscisses en fonction du temps.

Cette équation est une de celles qui se ramènent à une équation de Bessel par des transformations simples. Prenons la solution sous la forme :

$$\varepsilon = (t - t_0)^\alpha f[(t - t_0)^\eta],$$

$\alpha$  et  $\eta$  étant des coefficients constants.

Remplaçons  $\varepsilon$  par sa valeur dans l'équation ci-dessus, et déterminons les deux paramètres arbitraires de façon que l'équation résultante, donnant la fonction  $f$  ait une forme simple. On obtient en posant  $t - t_0 = 0$

$$f'' + \left[ \frac{2\alpha - 1}{\eta} + 1 \right] 0^{-\eta} f' + f \left[ \frac{B + \alpha(\alpha - 1)}{\eta^2} 0^{-2\eta} + \frac{A}{\eta^2} 0^{-2\eta+1} \right] = 0.$$

(2) Le champ magnétique  $B_0$  crée une force longitudinale, mais celle-ci est proportionnelle à  $r.r'$  donc du deuxième ordre. Elle est négligeable à l'approximation où nous nous plaçons.

Si l'on prend  $\eta = \frac{1}{2}$ , et  $\theta^2 = \theta^{\frac{1}{2}} = u$  comme variable indépendante, on a, avec  $\alpha = 1$  :

$$f'' + \frac{1}{u} f' + \left[ -\frac{4\nu\omega \cotg \varphi_s}{1-\nu} - \frac{1-6\nu+7\nu^2}{(1-\nu)^2} \frac{1}{u^2} \right] f = 0$$

qui est une équation de Bessel classique, dont l'intégrale est :

$$f = A J_p[\beta u] + B J_{-p}[\beta u],$$

avec

$$p = \frac{\sqrt{1-6\nu+7\nu^2}}{1-\nu}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{4\nu\omega \cotg \varphi_s}{1-\nu}}.$$

Finalement, la dispersion en abscisse sera :

$$\varepsilon = (t-t_0)^{\frac{1}{2}} \left\{ A J_p \left[ \beta(t-t_0)^{\frac{1}{2}} \right] + B J_{-p} \left[ \beta(t-t_0)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (3.1)$$

et la formule (3.1') permettra le calcul de la dispersion en phase, et (3.1'') la dispersion en énergie.

Dans le cas particulier où  $\nu = 1$ , on a, comme toujours, des calculs légèrement différents. L'écart des abscisses est donné par une équation à coefficients constants, qui s'écrit :

$$\varepsilon'' + \varepsilon \left[ -\omega \cotg \varphi_s \sqrt{\frac{2eK}{M}} - \frac{2eK}{M} \right] = 0$$

dont l'intégration est immédiate et qui donne :

$$\varepsilon = A \sin \beta t + B \cos \beta t, \quad (3.5)$$

avec

$$\beta = \sqrt{\frac{2eK}{M}} \sqrt{-1 - \omega \cotg \varphi_s} \sqrt{\frac{M}{2eK}}.$$

Les valeurs numériques citées au paragraphe précédent montrent d'ailleurs que l'on peut poser

$$\beta \simeq \sqrt{-\omega \cotg \varphi_s} \sqrt{\frac{2eK}{M}}$$

sans introduire d'erreur sensible.

**3.1.3. Conditions primordiales de stabilité longitudinale. Choix de la phase à l'injection  $\varphi_s$ .** — Si les conditions initiales  $t$  et  $\Phi_i$  ne sont pas exactement réalisées, ou si une perturbation quelconque est venue modifier le mouvement de la particule de phase constante, il est indispensable que la « dispersion en abscisses » qui en résulte diminue de façon à ce que les particules se groupent autour de la particule de référence.

Nous aurons ainsi assuré la stabilité longitudinale.

La condition nécessaire de stabilité apparaît sur l'équation (3.4).

Il faut que les fonctions de Bessel,  $J_p$  et  $N_p$  soient des fonctions d'argument réel, qui sont oscillatoires décroissantes et non des fonctions d'argument complexe, qui sont croissantes exponentiellement. Il est donc essentiel de choisir  $\cotg \varphi_s$  négatif pour que  $\beta$  soit réel.

Comme, d'autre part, la particule ne peut être accélérée que si elle est calée dans une région de champ positif, il est maintenant clair qu'il faudra choisir  $\varphi_s$  entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$  comme nous l'avons déjà signalé.

La condition de stabilité est identique, si l'on considère le cas particulier où  $\nu = 1$ .

La stabilité sera d'autant mieux assurée que  $\beta$  sera plus grand, donc que  $\cotg \varphi_s$  sera plus grand, en valeur absolue. Mais l'amplitude du champ électrique est  $\frac{4\nu K}{\sin \varphi_s}$  et si l'on choisit  $\varphi_s$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , il faudra pour obtenir l'accélération désirée un champ dont l'amplitude sera trop grande.

Il faudra donc un compromis entre ces deux conditions. Pratiquement, on choisira une phase  $\varphi_s$  de l'ordre de 110 à 130°, c'est-à-dire, de 20 à 40° de la crête de l'onde.

**3.1.4. Détermination de la forme du champ assurant le meilleur groupement des phases.** — Pour continuer cette discussion, nous remplacerons les fonctions de Bessel par leur expression asymptotique, qui donnent :

$$\varepsilon = A(t-t_0)^{\frac{1}{2}} \sin \left[ \beta(t-t_0)^{\frac{1}{2}} + \Psi \right] \quad (3.6)$$

$A$  et  $\Psi$  étant des constantes arbitraires; cette formule met bien en évidence le caractère oscillatoire de la dispersion en abscisse. La dispersion en phase est donnée par :

$$\gamma = B(t-t_0)^{-\frac{\nu-1}{4(1-\nu)}} \sin \left[ \beta(t-t_0)^{\frac{1}{2}} + \Psi \right]. \quad (3.7)$$

La dispersion en abscisse n'est donc pas stable, au sens absolu du mot. L'amplitude des écarts en abscisses augmente lentement comme la racine quatrième du temps.

Au contraire, l'écart en phase tend vers zéro pourvu que  $\nu > 0,2$ , ce qui sera toujours réalisé en pratique.

La décroissance des oscillations de la phase sera d'autant plus rapide que  $\nu$  sera plus voisin de l'unité, comme le montre l'équation (3.7).

*Le groupement en phase des particules, autour de la phase  $\varphi_s$  sera d'autant plus rapide que la valeur de  $\nu$  sera plus voisine de l'unité.*

Un champ accélérateur dont l'amplitude augmentera avec  $z$  favorisera le groupement en phase des particules. Un champ dont l'amplitude diminuera sera moins favorable et finalement un champ décroissant correspondant à  $\nu = 0,2$  ne donnera plus de groupement, les particules oscillant avec une amplitude constante.

Fort heureusement, les champs réalisables correspondent à des valeurs de  $\nu$  qui sont supérieures à 0,2.

D'excellentes conditions de groupement autour de la phase  $\varphi_s$  seront obtenues avec un champ

correspondant à  $\nu = 1$  qui donne un « bunching » rapide des particules. On a, en effet :

$$\gamma = A e^{-\sqrt{\frac{2eK}{M}} t} \sin[\beta t + \Psi]. \quad (3.8)$$

la décroissance est exponentielle.

Dans le cas où  $\nu = 1$ , les oscillations sont sinusoïdales et l'on a une fréquence donnée par :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\omega \sqrt{\frac{2eK}{M}} \cot g \varphi}. \quad (3.9)$$

Dans les autres cas, il n'est pas possible de parler de fréquence au sens restreint du mot. On peut cependant définir par analogie une pseudo-fréquence comme :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{4\nu\omega \cot g \varphi}{(1-\nu)(t-t_0)}}.$$

Cette expression montre que la fréquence diminue avec le temps, donc au cours de la traversée de l'accélérateur. Les quantités intéressantes seront la fréquence initiale et la fréquence finale, qui peuvent s'exprimer à l'aide des énergies, à la suite de transformations dont nous passons le détail.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-4\nu\omega \cot g \varphi} \sqrt{\frac{2eK}{M} \Phi^{\frac{1}{1-\nu}}}. \quad (3.10)$$

Avant de terminer ce paragraphe, nous donnerons quelques valeurs numériques permettant de se faire une idée des caractéristiques des petits mouvements longitudinaux dans les accélérateurs dont nous avons commencé l'étude.

Nous choisissons, comme nous l'avons déjà signalé :  $\varphi_s = 115^\circ$ . La fréquence du champ sera dans toute la suite,  $10^8$  p/s.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs initiales et finales des fréquences, le rapport des amplitudes initiales et finales des oscillations de phase et d'abscisse.

$\nu$	$f_i$	$f_f$	$\frac{z_f}{z_i}$	$\frac{\gamma_i}{\gamma_f}$
$\frac{1}{3}$ .....	$1,86 \cdot 10^7$	$0,93 \cdot 10^7$	1,41	0,71
$\frac{1}{2}$ .....	$1,46 \cdot 10^7$	$1,04 \cdot 10^7$	1,19	0,63
$\frac{2}{3}$ .....	$1,31 \cdot 10^7$	$1,12 \cdot 10^7$	1,09	0,55
1.....	$1,18 \cdot 10^7$	$1,18 \cdot 10^7$	1	0,50

Nous constatons tout d'abord que la fréquence des oscillations longitudinales est de l'ordre du  $1/10^e$  de celle du champ accélérateur. De ce fait, les particules n'accompliront qu'un petit nombre d'oscillations autour de la particule de phase constante, au cours de la traversée de l'appareil. Le phénomène est analogue à celui qui a lieu pour les électrons.

On constate également l'influence de  $\nu$  sur le

groupement en phase, et sur l'augmentation de l'écart des abscisses. Les phénomènes sont ici très différents de ceux que l'on obtient dans les accélérateurs d'électrons, car dans ceux-ci l'augmentation de l'inertie de la particule contribue efficacement au groupement, alors que dans les accélérateurs d'ions, c'est seulement l'augmentation de la vitesse de l'onde.

3.1.5. *Dispersion en énergie.* — Les formules précédentes permettent de trouver une expression approchée de la dispersion en énergie. On trouve (3)

$$\varphi = C(t-t_0)^{\frac{3\nu-1}{4(1-\nu)}} \cos\left[\beta(t-t_0)^{\frac{1}{2}} + \Psi\right]. \quad (3.11)$$

Ainsi, pour les valeurs de  $\nu$  correspondant aux appareils usuels, groupement en phase ( $\gamma \rightarrow 0$ ) n'est pas synonyme de groupement en énergie. L'amplitude de  $\varphi$  augmente avec le temps.

On vérifie la relation

$$|\dot{\gamma}|_{\max} \times |\varphi|_{\max} = \text{const.}$$

qui rend évidente l'incompatibilité entre groupement en phase et groupement en énergie [18].

3.2. ACCROCHAGE DES PARTICULES. SPECTRE D'ÉNERGIE. — 3.2.1. *Mouvement longitudinal dans le cas général.* — Si la particule est injectée dans l'appareil au voisinage du temps  $t_i$  (disons à  $1/20^e$  de période en avance ou en retard), les résultats du paragraphe précédent montrent que le mouvement de cette particule restera voisin de celui de la particule « type ».

Mais, si l'on examine les conditions expérimentales, on constate que les particules, loin d'être injectées pendant une faible fraction de période, le sont pendant un très grand nombre de périodes consécutives. Pour fixer les idées, prenons l'exemple de l'accélérateur d'Alvarez. Les impulsions de la source haute fréquence, pendant lesquels les particules sont injectées, durent  $300 \mu\text{s}$ , soit  $60\,000$  p. La théorie précédente ne pourra décrire que le mouvement d'un certain nombre de particules.

Il faut recommencer le calcul, sans faire d'approximation. L'équation générale du mouvement longitudinal est :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e}{M} \frac{2\nu K}{\sin \varphi} z^{2\nu-1} \sin[\varphi(z) - \omega t]. \quad (3.12)$$

Les ressources actuelles de l'analyse ne fournissent pas de solutions représentables par des fonctions tabulées. Il faudrait le secours de machines à calculer électroniques, capables de dresser rapidement des tables numériques de la solution. Il sera

(3) Les constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  qui interviennent dans les expressions des dispersions en abscisses, phase et énergie sont liées les unes aux autres. Il est donc possible, connaissant la dispersion en phase à un instant de calculer la dispersion en énergie à un autre moment.

alors possible de résoudre les deux problèmes essentiels du mouvement longitudinal :

1° une particule étant injectée à l'instant  $t_i + \tau$ , quel est son mouvement ? Est-elle accélérée, ou non ? C'est le problème de l'accrochage des particules à l'onde.

2° Quelle est la répartition des énergies, à la sortie de l'appareil pour toutes les particules qui ont pu être accrochées ? C'est le problème du spectre d'énergie.

3.2.2. *Discussion graphique des conditions d'accrochage.* — On peut envisager une discussion graphique des conditions d'accrochage d'une particule à l'onde progressive. Repérons une particule par son écart en phase  $\gamma$ , par rapport à la particule « type ».  $\gamma$  n'est plus maintenant une quantité petite. Opérons

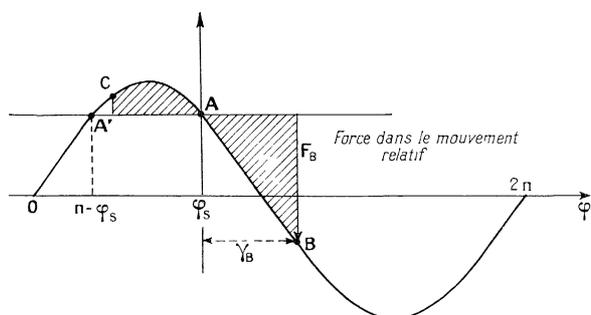


Fig. 5.

dans un référentiel ayant le mouvement de la particule « type » (fig. 5). La force qui engendre le mouvement relatif est visiblement la différence des ordonnées de la sinusoïde représentant l'onde progressive et de la droite horizontale, au niveau de la particule type.

On constate alors les résultats suivants en examinant la figure :

— Si, à l'origine  $\gamma = 0$ , la particule prend le mouvement régulier; c'est une particule « type »;

— Si, à l'origine  $\pi - \varphi_s < \gamma < \varphi_s$ , la particule en retard est soumise à une force plus intense que celle qui agit sur la particule type; elle rattrape cette dernière, la dépasse, s'arrête et repart en arrière;

— Si, à l'origine  $0 < \gamma < \pi - \varphi_s$ , la particule, en retard, est soumise à une force plus faible que celle qui agit sur la particule « type »; le retard va croître, et la particule ne s'accrochera pas;

— Enfin, si à l'origine  $\varphi_s < \gamma < 2\pi$  la particule, en avance, est soumise à une force plus faible; elle perd son avance et revient vers la particule « type ».

En conséquence, si l'on excepte les particules dont la phase initiale est comprise entre 0 et  $\pi - \varphi_s$ , toutes les particules s'accrochent dans la première période de l'onde accélératrice.

Que vont faire ces particules dans la suite. Il faut que les particules qui se dirigent vers la particule « type », et qui vont évidemment la dépasser, soient stoppées dans leur mouvement, et ramenées vers l'avant. Si cette éventualité a lieu, elles seront accrochées, et le mouvement oscillatoire se continuera. Sinon elles continueront à s'éloigner de la particule « type » et décrocheront.

Il faut donc trouver une condition d'arrêt dans le mouvement relatif rétrograde. Pour cela, considérons deux particules, la particule « type » A et une autre B à la phase  $\gamma_B$  (fig. 5). Elles avaient initialement la même énergie. Mais, dans le mouvement relatif, la particule B, soumise à la force  $F_B$  qui lui a fait parcourir la distance BA arrive en A avec une énergie cinétique proportionnelle à l'aire hachurée.

La condition d'arrêt est alors évidente. Il faut que la particule perde cette énergie, donc qu'elle aille jusqu'au point C, tel que les aires hachurées soient égales. Si elle s'arrête avant A', elle repart ensuite en avant, « elle est accrochée ». Si elle dépasse A', elle continue son mouvement rétrograde, elle est perdue.

Finalement, il semble que l'on puisse accrocher :

1° les particules injectées entre  $\pi - \varphi_s$  et  $\varphi_s$ , qui partent en avant, reviennent, et ne sauraient évidemment pas dépasser A';

2° les particules injectées entre  $\varphi_s$  et  $\varphi_s'$  qui partent en arrière mais arrivent en A avec une énergie insuffisante pour dépasser A'. Des calculs rapides montrent que l'intervalle d'accrochage est de l'ordre de  $3 \left( \varphi_s - \frac{\pi}{2} \right)$  (soit environ  $1/5^e$  de période avec la valeur de  $\varphi_s$  que nous avons choisi).

Mais cette discussion est trop simple, car l'onde se déforme, tant en phase (la vitesse augmente) qu'en amplitude (si l'appareil correspond à une

valeur de  $v \neq \frac{1}{2}$ ) La particule, partie de B qui arrive en A ne trouve pas l'onde qu'elle y a laissée à l'oscillation précédente, mais une onde, de plus grande longueur d'onde, et d'amplitude différente (disons d'amplitude supérieure pour fixer les idées).

On conçoit aisément, en regardant la figure 6, qu'elle perdra son énergie relative, bien avant d'avoir atteint le point A', car la force est plus grande, et le parcours plus long. Par conséquent, la particule qui est partie de C<sub>1</sub> à l'instant initial, a atteint B, a rebroussé chemin, ne peut aller jusqu'à C<sub>1</sub> et s'arrête avant. Il va y avoir un *groupement des phases*, dû à l'augmentation de longueur d'onde et éventuellement d'amplitude.

D'autre part, une particule, partie initialement du point B', qui aurait emmagasiné une énergie suffisante pour lui faire dépasser le point A' dans son retour, si l'onde n'avait pas changée, sera main-

tenant stoppée, car il faut davantage d'énergie pour atteindre  $A'_2$ . L'intervalle d'accrochage est augmenté si l'amplitude de l'onde croît.

Il n'est malheureusement pas possible de préciser davantage cette discussion, faute de certaines données essentielles, en particulier faute de connaître la période des oscillations de la particule autour de la particule « type ». L'étude des petits mouvements nous a montré que cette période était de l'ordre de 10 fois celle du champ haute fréquence, mais on ne saurait déceimenter extrapoler à des oscillations de grande amplitude.

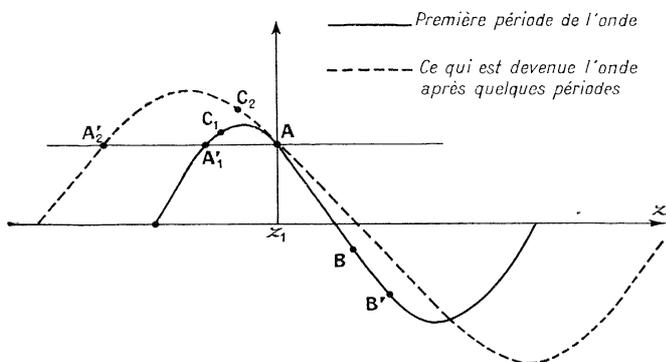


Fig. 6.

L'intégration numérique de l'équation (3.12) permettrait, par contre, de trouver une valeur précise de l'intervalle d'accrochage, de définir les conditions optima d'accrochage, et ensuite, en suivant le mouvement des particules tout le long de l'accélérateur, de trouver une expression approchée du « spectre de l'accélérateur ».

Des études de ce type sont en cours au Laboratoire de Radioélectricité de la Faculté des Sciences de Paris, en vue de développer la théorie de l'accélérateur linéaire dont nous venons d'exposer les principes.

**Conclusion.** — Nous avons indiqué le principe d'un modèle mathématique simple permettant de décrire avec une bonne précision le mouvement des ions dans un accélérateur linéaire haute fréquence. Nous représentons la loi donnant l'énergie de la « particule-type » en fonction de l'abscisse par une relation mathématique simple. Nous avons ensuite établi un tableau de formules permettant d'étudier les propriétés de l'appareil.

Nous avons étudié, à titre d'exemple, le mouvement longitudinal des particules. Nous avons établi la condition de stabilité axiale et déterminé les conditions optima de groupement des corpuscules autour de la « particule-type ».

Ce modèle nous a également permis d'étudier le mouvement latéral des particules et ainsi de contribuer à la solution du problème fondamental que pose ces accélérateurs : la stabilité latérale des particules accélérées. Ce travail a fait l'objet d'une autre publication [17].

Les applications numériques faites sur les accélérateurs existants montrent que notre modèle est précis.

Nous exprimons notre reconnaissance à M. le Professeur Grivet, directeur du Laboratoire de Radioélectricité de la Faculté des Sciences de Paris, qui nous a proposé ce sujet d'études et nous a prodigué ses conseils tout au cours de son exécution.

Manuscrit reçu le 15 janvier 1954.

*Note ajoutée à la correction des épreuves.* — Depuis le dépôt de ce manuscrit, nous avons eu connaissance d'un article de K. Johnsen et H. Dahl, *Chr. Michelsens, Inst. Ber.*, 1951, **14**, 4, sur la dynamique des accélérateurs à hélice. Les auteurs montrent que le mouvement est régi par  $\Phi = Kz^{\frac{1}{7}}$ . Notre modèle s'applique donc aux hélices, avec  $\nu = \frac{2}{7}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ALVAREZ L. W. et col. — *Phys. Rev.*, 1946, **70**, 799.
- [2] BRADNER et col. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 534.
- [3] CHEW et MOYER. — *Amer. J. Phys.*, 1950, **18**, 125.
- [4] BERNARD M. Y. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 1862 et 2175.
- [5] PIERCE J. R. et SCHELKUNOFF S. A. — *Proc. Inst. Rad. Eng.*, 1947, **35**, 111.
- [6] CHICK R. et PETRIE P. R. — *Nature*, 1951, **168**, 783.
- [7] SLATER J. C. — *Rev. Mod. Physics*, 1948, **20**, 473.
- [8] CHU E. L. — *Tech. Rep. Stanford Univ.*, 1951, n° 140.
- [9] VASTEL J. — *Ann. Radioélectr.*, 1952, **6**, 20.
- [10] SARAZIN A. — *Ann. Radioélectr.*, 1953, **8**, 134.
- [11] SLOAN D. H. et LAWRENCE E. D. — *Proc. Nat. Ac. Sc.*, 1931, **17**, 64; *Phys. Rev.*, 1931, **38**, 2021.
- [12] SLOAN D. H. et COATES W. M. — *Phys. Rev.*, 1934, **46**, 539.
- [13] SANDS. — Communication privée sur le Synchrotron du C.I.T.
- [14] WALKINSHAW W. — Communication au C. E. R. N.
- [15] JANHKE et EMDE. — *Table for higher functions*, 4<sup>e</sup> éd., Teubner, 1948.
- [16] RABINOVITCH F. — *Ann. Radioélectr.*, 1946, **1**, 134.
- [17] BERNARD M. Y. — *Thèse*, Paris, 1953 (à paraître aux *Annales de Physique*).
- [18] JOHNSEN K. — Communication privée.