



**HAL**  
open science

## Sur le spin de l'état fondamental et des premiers niveaux excités de certains noyaux impair-impairs

C. Marty, R. Nataf, J. Prentki

### ► To cite this version:

C. Marty, R. Nataf, J. Prentki. Sur le spin de l'état fondamental et des premiers niveaux excités de certains noyaux impair-impairs. *Journal de Physique et le Radium*, 1954, 15 (3), pp.134-141. 10.1051/jphysrad:01954001503013400 . jpa-00234871

**HAL Id: jpa-00234871**

**<https://hal.science/jpa-00234871>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**SUR LE SPIN DE L'ÉTAT FONDAMENTAL  
ET DES PREMIERS NIVEAUX EXCITÉS DE CERTAINS NOYAUX IMPAIR-IMPAIRS.**

Par C. MARTY, R. NATAF,

Laboratoire de Chimie nucléaire du Collège de France.

et J. PRENTKI,

Institut Henri Poincaré (\*).

**Sommaire.** — Étude dans le cadre du modèle *j-j* des noyaux ayant un neutron et un proton en dehors d'une couche saturée ( ${}^{24}_{8}\text{RaE}_{127}$ ) ou ayant un trou dans une couche de neutrons (protons) et un proton (neutron) en dehors d'une couche saturée comme  ${}^{40}_{19}\text{K}_{21}$ .

Le potentiel entre neutron et proton est du type :

$$\varphi(r_{12}) = -(c_1 + c_2 P_x + c_3 P_\sigma + c_4 P_x P_\sigma) V(r_{12}).$$

*V* étant une interaction centrale et  $c_1 : c_2 : c_3 : c_4 = 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ . Avec des fonctions d'onde d'oscillateur et trois types de potentiel pour *V* (singulier, Yukawa, constant) on a les résultats suivants : le niveau fondamental est le même pour les potentiels singulier et de Yukawa, en particulier on trouve la valeur correcte  $J = \frac{1}{2}$  pour  ${}^{40}\text{K}$ . Il y a croisement des autres niveaux quand la portée de l'interaction varie. Dans le cas de  ${}^{210}\text{RaE}$ , nos résultats sont en accord avec ceux de Pryce [7].

**1. Introduction.** — Le modèle en couches de Jensen-Mayer [1] permet de prévoir le spin *J* de la plupart des noyaux impairs pour l'état fondamental et les premiers états excités et le spin  $J = 0$  de l'état fondamental des noyaux pair-pair. La justification de ces résultats, dans le cadre d'un modèle à particules indépendantes, semble tenir au fait que l'interaction entre les nucléons pris deux à deux a une portée  $r_0$  plus petite que le rayon moyen *a* de l'orbite des nucléons en question. Lorsque  $r_0$  devient égal ou supérieur à *a*, il peut y avoir des croisements de niveaux et les règles simples du modèle *j-j* ne s'appliquent plus [2], [3], [4].

On ne dispose pas de lois aussi strictes en ce qui concerne les noyaux impairs-impairs. Seule la règle de Nordheim [5] permet d'avoir des indications sur le spin de l'état fondamental d'un noyau impair-impair et encore comporte-t-elle des exceptions dont la mieux établie est relative à  ${}^{40}\text{K}$  ( $J_{\text{exp}} = 4$ ,  $J_{\text{Nordheim}} = 2$ ). On peut chercher à prévoir théoriquement le spin de ce dernier type de noyaux en tenant compte de l'interaction entre nucléons n'appartenant pas à des couches saturées. Le problème n'est pas de nature différente de celui relatif aux autres noyaux tant que neutrons et protons sont sur une même orbite et tant que la longueur du spin isotopique total est un bon nombre quan-

tique, deux conditions qui sont en pratique réalisées pour les noyaux légers. Pour les noyaux moyens et lourds, les neutrons et les protons sont sur des orbites différentes et le champ coulombien peut apporter des différences sensibles au potentiel moyen dans lequel se meuvent les protons.

Le cas théorique le plus simple de noyau impair-impair est celui d'un « core » doublement magique avec un neutron et un proton « externes », ou bien encore d'une particule dans une couche et d'un trou dans une autre couche. Les seuls noyaux (bien identifiés) de ce type sont  ${}^{40}_{19}\text{K}_{21}$ ,  ${}^{56}_{27}\text{Co}_{29}$ ,  ${}^{210}_{83}\text{RaE}_{127}$ ,  ${}^{208}_{81}\text{ThC}_{127}$ ,  ${}^{208}_{83}\text{Bi}_{125}$ . Sur une base moins sûre, on a appliqué la méthode de calcul utilisée ici aux isotopes ayant des sous-couches saturées plus ou moins une particule. Les divers cas étudiés se trouvent rassemblés dans le tableau I avec les données expérimentales correspondantes.

TARLEAU I.

Noyau .....	${}^{40}_{19}\text{K}_{21}$ .	${}^{210}_{83}\text{RaE}_{127}$ .	${}^{56}_{27}\text{Co}_{29}$ .	${}^{210}_{83}\text{RaE}_{127}$ .	${}^{208}_{81}\text{ThC}_{127}$ .
Orbite proton .....	1 $d_{3/2}$	1 $h_{9/2}$	2 $p_{3/2}$	2 $p_{1/2}$	3 $s_{1/2}$
» neutron .....	1 $f_{7/2}$	2 $g_{9/2}$	1 $f_{5/2}$	2 $d_{5/2}$	2 $f_{5/2}$
$J_{\text{exp}}$ .....	4	0 ?	1	2 *	2 *
Moment magnétique.	-1,30	-	-	-	-
Références .....	[6]	[7], [9]	[8]	[8]	[8]

(\*) Actuellement à l'École Polytechnique.

\* D'après le spectre  $\beta$  dont l'interprétation est sûre.

Le cas du RaE (et des autres noyaux voisins du core doublement magique  ${}_{82}^{208}\text{Pb}_{126}$ ) a été étudié en détail par Pryce [7] en utilisant un potentiel singulier  $\delta(r)$  pour l'interaction nucléon-nucléon; le niveau fondamental résulterait du couplage d'un proton  $h_{9/2}$  avec un neutron  $g_{9/2}$ . Cette hypothèse, due à Petschek [9], semble plus plausible que celle d'une configuration  $(h_{9/2})_P (d_{5/2})_N$  proposée par Nordheim [8].

Toujours avec l'hypothèse d'un potentiel de contact nucléon-nucléon, Marty et Prentki [10] ont étudié également le spin de l'état fondamental de divers noyaux impair-impairs.

Le présent travail utilise une méthode applicable au cas où l'interaction neutron-proton est à portée  $r_0$  finie : elle permet de voir que l'approximation du potentiel par une fonction  $\delta$  est bonne pour les noyaux lourds où cependant  $r_0$  n'est pas très petit devant  $a$ . Par contre, dans le cas de  ${}^{40}\text{K}$  par exemple, l'ordre des niveaux diffère suivant que  $r_0$  est fini ou nul. La méthode s'applique aussi au cas de noyaux pair-pair ayant un core doublement magique plus deux neutrons ou deux protons (RaD et Po), par exemple.

## 2. Discussion de l'approximation d'ordre zéro.

— Soient  $\vec{r}_i$  les coordonnées d'espace,  $\vec{j}_i$ ,  $\vec{l}_i$ ,  $\vec{s}_i$  les vecteurs habituels relatifs au moment angulaire total, au moment orbital et au spin de la  $i^{\text{ème}}$  particule externe ( $i = 1$  neutron,  $i = 2$  proton). Nous admettons que l'interaction core-nucléon est de la forme :

$$V_i^c(r_i) + \xi_i(r_i) \vec{l}_i \cdot \vec{s}_i, \quad r_i = |\vec{r}_i|, \quad (1)$$

où  $V_i^c$  est un potentiel central. En outre le proton périphérique est soumis à un champ coulombien qui pour un core uniformément chargé est  $\frac{(Z-1)e^2}{r_2}$ . Enfin, entre le neutron et le proton périphériques existe une interaction  $\varphi\left(\frac{r_{12}}{r_0}\right)$  où  $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ .

De toutes ces grandeurs, seul  $\varphi$  est déterminé avec quelque précision.

Comme en spectroscopie atomique, les potentiels  $V_i^c$  et  $\xi_i$  déterminent l'énergie moyenne des états individuels et les fonctions d'onde correspondantes, tandis que  $\varphi$ , traité comme une perturbation, lève certaines dégénérescences. Les  $V_i^c$  et les  $\xi_i$  étant inconnus, l'approximation d'ordre zéro est donc mal définie et nous discuterons en conclusion l'importance de cet effet. Pour les besoins du présent travail, on a pris pour les  $V_i^c$  un potentiel d'oscillateur, ce qui, compte tenu d'un fort couplage spin-orbite dans (1), donne la succession des niveaux requise par le modèle de Jensen-Mayer.

L'hamiltonien du système neutron-proton périphériques s'écrit alors :

$$\left. \begin{aligned} H &= H_0 + (Z-1) \frac{e^2}{r_2} + \varphi \\ H_0 &= \sum \frac{p_i^2}{2m} + \sum V_i^c + \sum \xi_i \vec{l}_i \cdot \vec{s}_i. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Différentes remarques peuvent être faites à propos de  $H_0$  et du potentiel coulombien.

a. Pour rendre compte des données expérimentales on est amené à prendre pour une particule un couplage spin-orbite introduisant entre les deux composantes du doublet  $nl$ , une différence d'énergie correspondant à  $\overline{\xi(r)} = 2$  MeV [11]. Dans ce travail, on a pris un potentiel d'oscillateur  $V_i^c$  qui conduit pour les noyaux lourds à des espacements entre niveaux de l'ordre de 1 MeV. On voit ainsi, qu'à la différence de la spectroscopie atomique, le couplage spin-orbite n'est pas petit par rapport à  $\sum V_i^c$ . Les vecteurs de base adaptés à  $H_0$  seront donc ceux du couplage  $j-j$  :  $|n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2, JM|$  ( $M$  projection du moment total  $J$  sur un axe).

Par ailleurs, l'effet de la perturbation  $\varphi$  est plus aisé à calculer en couplage  $LS$ . On voit alors que le passage  $jj$ - $LS$  n'est possible, lorsque le couplage spin-orbite est fort, que pour  $\xi_i(r_i) = \text{const.}$  Nous avons adopté  $\xi_i = \text{const.}$  en raison de l'imprécision de  $V_i^c$ . Dans le cas de  $\xi_i$  quelconque, les expressions de  $\langle \varphi \rangle$  sont très compliquées [12].

b. L'énergie moyenne due au champ de Coulomb pour les états précédents est de  $\frac{(Z-1)e^2}{r}$ , c'est-

à-dire de l'ordre de  $\frac{Z}{A^{\frac{2}{3}}}$  MeV pour un noyau de  $A$

et de  $Z$  donnés. Pour les noyaux moyens et lourds, le potentiel de Coulomb joue un rôle important et peut faire que les fonctions d'ondes des protons soient assez différentes de celles d'un oscillateur. Il en résulte donc une imprécision supplémentaire sur les fonctions d'onde.

3. Calcul de la valeur moyenne de  $\varphi$  pour deux nucléons périphériques. —  $\varphi$  a été pris de la forme

$$\varphi = -[c_1 + c_2 P_x + c_3 P_\sigma + c_4 P_x P_\sigma] V\left(\frac{r_{12}}{r_0}\right), \quad (3)$$

où  $P_x$  et  $P_\sigma$  sont respectivement les opérateurs d'échange de coordonnées et de spin des particules 1 et 2,  $V\left(\frac{r_{12}}{r_0}\right)$  est un potentiel central.

Le calcul de l'élément de matrice

$$\varphi_J = (n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2 JM | \varphi | n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2 JM) \quad (4)$$

correspondant à la perturbation du premier ordre

apportée par le potentiel  $\mathcal{V}$  à l'état caractérisé par  $n_1 l_1 j_1, n_2 l_2 j_2$ ,  $JM$  peut se faire de la façon suivante [13] en développant  $V\left(\frac{r_{12}}{r_0}\right)$  de la façon habituelle en :

$$V\left(\frac{r_{12}}{r_0}\right) = V_k(r_1, r_2, r_0) P_k(\cos \omega_{12}),$$

à l'aide des polynomes de Legendre de l'angle  $\omega_{12}$  entre les vecteurs  $r_1$  et  $r_2$ , la sommation sur  $k$  de zéro à l'infini étant sous-entendue :

a. Pour le potentiel de Wigner, on a directement par la méthode de Racah [14] :

$$\mathcal{V}_J^W = -c_1 f_k(l_1 j_1 l_1 j_2 J) F^k(n_1 l_1 n_2 l_2), \quad (5)$$

la sommation étant étendue à  $k = 0, 2, \dots, (2l)$  où  $(2l)$  est la plus petite des deux valeurs  $2l_i$ . Par ailleurs  $F^k(n_1 l_1 n_2 l_2)$  est l'intégrale habituelle de Slater portant sur les fonctions d'ondes radiales  $\frac{R_{n_i l_i}(r_i)}{r_i}$  de la  $i^{\text{ème}}$  particule (grâce à l'hypothèse faite sur le couplage spin-orbite  $R(r)$  est indépendante de  $j$ )

$$F^k(n_1 l_1, n_2 l_2) = \int dr_1 dr_2 [R_{n_1 l_1}(r_1)]^2 [R_{n_2 l_2}(r_2)]^2 V_k(r_1, r_2, r_0).$$

Le coefficient  $f_k(l_1 j_1 l_2 j_2 J)$  est

$$f_k(l_1 j_1 l_2 j_2 J) = (-1)^{j_1+j_2-J} \Delta^2(j_1 j_2 J) \frac{(2j_1-k)!! (2j_2-k)!!}{(2j_1+k)!! (2j_2+k)!!} \times (k-1)!!^4 \omega(j_1 j_2 j_1 j_2; Jk),$$

où

$$\Delta(a, b, c) = \left[ \frac{(a+b-c)! (a-b+c)! (-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

et où  $\omega(j_1 j_2 j_1 j_2; Jk)$  est la fonction  $\omega$  de Racah [14].

b. Le potentiel de Heisenberg donne formellement les intégrales d'échange  $G^x$  de Slater et l'on a :

$$\mathcal{V}_J^H = -c_4 g_x(l_1 j_1 l_2 j_2 J) G^x(n_1 l_1 n_2 l_2),$$

où  $x$  prend toutes les valeurs

$$|l_1 - l_2|, |l_1 - l_2| + 2, \dots, l_1 + l_2.$$

On a

$$G^x(n_1 l_1 n_2 l_2) = \int dr_1 dr_2 R_{n_1 l_1}(r_1) R_{n_2 l_2}(r_1) \times R_{n_1 l_1}(r_2) R_{n_2 l_2}(r_2) V_x(r_1, r_2, r_0)$$

et

$$g_x\left(l_1, l_1 \pm \frac{1}{2}; l_2, l_2 \pm \frac{1}{2}, J\right) = \left[ \frac{(j_1+j_2-x)!! (j_1-j_2+x-1)!! (-j_1+j_2+x-1)!!}{(j_1+j_2+x)!!} \right]^2 \times \Delta^2(j_1 j_2 J) \omega(j_1 j_2 j_1 j_2; Jx),$$

$$g_x\left(l_1, l_1 \pm \frac{1}{2}; l_2, l_2 \mp \frac{1}{2}\right) = \left[ \frac{(j_1+j_2-x-1)!! (j_1-j_2+x)!! (-j_1+j_2+x)!!}{(j_1+j_2+x+1)!!} \right]^2 \times \Delta^2(j_1 j_2 J) \omega(j_1 j_2 j_2 j_1; Jx).$$

c. La valeur moyenne des potentiels de Bartlett et de Majorana est plus aisée à calculer en couplage  $LS$ . Comme nous l'avons déjà vu la transformation de  $LS$  à  $jj$  peut se faire pour la forme particulière  $\xi_i(r_i) = \text{const.}$  choisie.

En remarquant que :

$$(c_2 P_x + c_3 P_\sigma) V = (c_3 + c_2 P_x P_\sigma) P_\sigma V,$$

on voit que le potentiel en  $c_2 P_x + c_3 P_\sigma$  aura les mêmes valeurs moyennes que le potentiel en  $c_3 + c_2 P_x P_\sigma$  sauf pour les états singulets où il y aura un changement de signe. On a donc, si  $\Pi$  est le poids de l'état singulet dans l'état  $jj$  considéré :

$$(n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2 JM | (c_2 P_x + c_3 P_\sigma) V | n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2 JM) = (n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2 JM | (c_3 + c_2 P_x P_\sigma) V | n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2 JM) - 2\Pi(n_1 l_1 n_2 l_2, L = J, S = 0, JM | (c_3 + c_2 P_x P_\sigma) V | n_1 l_1 n_2 l_2, L = J, S = 0, JM) \quad (7)$$

La première ligne du second membre se déduit de (5) et (6) par les substitutions  $c_1 \rightarrow c_3, c_4 \rightarrow c_2$ . Quant au second terme du deuxième membre, il s'écrit

$$(n_1 l_1 n_2 l_2, L = J, JM | (c_3 - c_2 P_x) V | n_1 l_1 n_2 l_2, L = J, JM) = c_3 f_k(l_1 l_2, L = J) F^k - c_2 g_x(l_1 l_2 L = J) G^x, \quad (8)$$

où les  $f_k(l_1 l_2 L)$ ,  $g_x(l_1 l_2 L)$  sont donnés par Racah [15]

$$f_k(l_1 l_2 L) = (-1)^{l_1+l_2-L} (2l_1+1) \times (2l_2+1) \frac{(2l_1-k-1)!! (2l_2-k-1)!!}{(2l_1+k+1)!! (2l_2+k+1)!!} \times (k-1)!!^4 \Delta^2(l_1 l_2 L) \omega(l_1 l_2 l_1 l_2; Lk),$$

$$g_x(l_1 l_2 L) = (2l_1+1)(2l_2+1) \frac{(l_1+l_2-x-1)!!^2}{(l_1+l_2+x+1)!!^2} \times (l_1-l_2+x-1)!!^2 (l_2-l_1+x-1)!!^2 \times \Delta^2(l_1 l_2 L) \omega(l_1 l_2 l_2 l_1; Lx).$$

Au total, en regroupant (5), (6), (7), (8) on arrive au résultant suivant :

$$\mathcal{V}_J = - (c_1 + c_3) f_k(l_1 j_1 l_2 j_2 J) F^k - (c_2 + c_4) g_x(l_1 j_1 l_2 j_2 J) G^x - 2\Pi \{ -c_3 f_k(l_1 l_2 J) F^k + c_2 g_x(l_1 l_2 J) G^x \} \quad (9)$$

avec, pour poids de l'état singulet :

$$\Pi = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{j_1+j_2+l_1+l_2}}{2(2l_1+1)(2l_2+1)} \times [J(J+1) - J_1(j_1+1) - J_2(j_2+1)].$$

Si les nucléons 1 et 2 sont identiques et sur des orbites différentes, on utilisera les fonctions d'onde

antisymétriques  $\frac{1-P_x P_\sigma}{\sqrt{2}} (x_1 \sigma_1 x_2 \sigma_2 n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2, JM)$ ,  
ce qui conduit à la même expression (9) pour  $\mathcal{V}$ ;  
aux substitutions suivantes près :

$$c_1 \rightarrow c_1 - c_4, \quad c_2 \rightarrow c_2 - c_3, \quad c_3 \rightarrow c_3 - c_2, \quad c_4 \rightarrow c_4 - c_1.$$

Enfin, si les nucléons sont identiques et sur une même orbite, les fonctions d'ondes  $(x_1 \sigma_1 x_2 \sigma_2 | (nlj)^2 JM)$  sont antisymétriques pour les valeurs paires de  $J$  et symétriques pour les valeurs impaires. On utilisera donc encore (9) en se bornant aux valeurs paires de  $J$  et en notant que  $F^k = G^k$  ( $k$  et  $x$  prenant alors les mêmes valeurs).

**4. Calcul de la valeur moyenne de  $\mathcal{V}$  pour une configuration  $(n_1 l_1 j_1)^{+1} - (n_2 l_2 j_2)^{-1}$ .** — Racah [14] calcule dans le schéma  $LSM_L M_S$  les éléments de matrice de

$$\sum_b V(r_{1b}), \quad \sum_b (P_x V)_{1b}, \quad \sum_b (P_x P_\sigma V)_{1b},$$

où  $1$  indique un nucléon d'une espèce dans un état quantique  $(n_1 l_1)$  et  $b$  les nucléons d'une espèce différente situés sur une orbite  $(n_2 l_2)$ . Les sommes portent sur tous ces derniers nucléons au nombre de  $4l_2 + 1$ .

Lorsque la couche  $(n_2 l_2, j_2 = l_2 + \frac{1}{2})$  est déjà remplie et qu'il reste un trou sur la couche  $(n_2 l_2,$

$j_2 = l_2 - \frac{1}{2})$ , on voit que les trous des couches  $(n_2 l_2), (n_2 l_2 j_2)$  se correspondront. Se basant sur cette remarque, on peut d'abord calculer la valeur moyenne  $\mathcal{V}_{LS}$  de  $\mathcal{V}$  en couplage  $LS$ .

$$\mathcal{V}_{LS} = \left[ c_1 + c_3 \left\langle \frac{1-P_\sigma}{2} \right\rangle \right] f_k(l_1 l_2 L) F^k + \left[ c_2 + c_4 \left\langle \frac{1-P_\sigma}{2} \right\rangle \right] \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2(2L+1)} C_{l_1 l_2} G^L,$$

avec :

$$\left\langle \frac{1-P_\sigma}{2} \right\rangle = \left\langle SM_S \left| \frac{1-P_\sigma}{2} \right| SM_S \right\rangle = \delta_{S,0}$$

et

$$\frac{1}{2} C_{l_1 l_2} = \begin{cases} 0 & \text{si } l_1 + l_2 + L \text{ impair,} \\ \Delta^2(l_1 l_2 L) \left[ \frac{g!}{(g-l_1)!(g-l_2)!(g-L)!} \right]^2 & \text{si } l_1 + l_2 + L = 2g \text{ pair.} \end{cases} \quad (10)$$

Si l'on passe du couplage  $LS$  au couplage  $jj$ , on trouve

$$\mathcal{V}_J = c_1 f_k(l_1 j_1 l_2 j_2 J) F^k + c_3 \Pi f_k(l_1 l_2 L = J) F^k + c_2 \sum_{LS} \varphi_{LS}(l_1 j_1 l_2 j_2 J) G^L + c_4 \Pi \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2(2J+1)} C_{l_1 l_2} G^J, \quad (11)$$

avec

$$\varphi_{LS}(l_1 j_1 l_2 j_2 J) = |\langle l_1 j_1 l_2 j_2 JM | l_1 l_2 LSJM \rangle|^2 \times \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2(2L+1)} C_{l_1 l_2}. \quad (12)$$

les carrés des coefficients de la transformation  $LS-jj$  s'expriment explicitement de façon aisée (voir, par exemple, [7]).

**5. Choix du potentiel  $\mathcal{V}$ .** — Les coefficients  $c$  de l'expression (3) sont déterminés à partir des données sur le deutéron [17] et par les conditions de saturation (\*).

On a choisi :

$$(c_1; c_2; c_3; c_4) = \left( 1; 4; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Pour la partie  $V$  du potentiel (3), l'expression qui semble la plus voisine de la réalité (lorsque les deux nucléons ne sont pas trop voisins l'un de l'autre) est celle de Yukawa :

$$V_Y \left( \frac{r_{12}}{r_0} \right) = V e^{-\frac{r_{12}}{r_0}} \frac{r_{12}}{r_0}.$$

Pour des mésons  $\pi$ ,  $r_0$  est de l'ordre du rayon nucléaire  $1,4 \cdot 10^{-13}$  em. Nous prendrons par la suite cette longueur comme une unité, d'où

$$V_Y = V \frac{e^{-r_{12}}}{r_{12}}$$

et pour le rayon nucléaire  $R = A^{\frac{1}{3}}$ ;  $V \simeq 5$  MeV puisque  $(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) V \simeq 30$  MeV pour le deutéron.

En pratique, le potentiel de Yukawa conduit à des calculs numériques longs pour les intégrales radiales  $F^k$  et  $G^k$ . Au contraire, celles-ci prennent des formes simples pour des potentiels de type gaussien :

$$V e^{-r_{12}^2}, \quad V \frac{e^{-r_{12}^2}}{r_{12}}, \quad V \frac{e^{-r_{12}^2}}{r_{12}^2}.$$

Pour les noyaux lourds ( $RaE$ ), le rayon moyen des orbites des derniers nucléons étant supérieur à  $r_0 = 1$ , ces divers potentiels gaussiens ont le même effet qu'un potentiel  $V \delta \left( \frac{r_{12}}{r_0} \right)$ , ce que nous avons vérifié avec le choix que nous avons fait des fonctions d'onde d'approximation d'ordre zéro (cf. § 7). La même vérification a été faite pour le potentiel de Yukawa : pour des noyaux de  $A \approx 60$ , l'ordre

(\*) On attribue surtout à la force tensorielle la différence des énergies de liaison dans les états triplet et singulet du deutéron ( $c_3, c_4 \simeq 0$ ). Mais comme le calcul des éléments de matrice pour ce potentiel, en couplage  $jj$ , est long, nous remplaçons son effet par celui des forces de Bartlett et Heisenberg qui lient aussi davantage les états triplets.

des niveaux obtenu est le même avec les deux potentiels.

### 6. Cas des formes limites du potentiel $V(r_{12})$ pour un neutron et un proton externes.

*a. Potentiel gaussien à portée infinie.* — L'expression des  $\mathcal{V}_J$  se simplifie beaucoup puisque le développement de  $V(r_{12})$  ne contient que  $P_0(\cos \omega_{12})$ . On a ainsi :

Si  $n_1 \neq n_2$ ,  $l_1 \neq l_2$  (2) :

$$\mathcal{V}_J = -(c_1 + c_3)F^0 + 2c_3\Pi F^0 \quad (\text{avec } F^0 = V)$$

$\mathcal{V}_J$  est alors une fonction croissante de  $J$  pour  $j_1 = l_1 \pm \frac{1}{2}$ ;  $j_2 = l_2 \mp \frac{1}{2}$ , décroissante dans les autres cas. On a alors la règle stricte de Nordheim [16].

Si  $n_1 = n_2$ ,  $l_1 = l_2$ , mais  $j_1 \neq j_2$  :

$$\mathcal{V}_J = -(c_1 + c_3)F^0 + 2[c_3 - (-1)^J c_2]\Pi F^0.$$

Comme  $c_2 \gg c_3$  on a une variation monotone de  $\mathcal{V}_J$  pour les  $J$  pairs et une variation opposée pour les  $J$  impairs.

Si  $n_1 = n_2$ ,  $l_1 = l_2$ ,  $j_1 = j_2$  :

$$\mathcal{V}_J = -[c_1 + c_3 - (-1)^J (c_2 + c_4)]F^0 + 2[c_3 - (-1)^J c_2]\Pi F^0,$$

avec les mêmes remarques que ci-dessus.

*b. Potentiel de contact* [7], [18]. — Dans le cas d'un potentiel de contact, les potentiels de Wigner et de Majorana se confondent, de même que ceux de Bartlett et de Heisenberg.

Posant :

$$V(r_{12}) = \frac{V}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2) \delta(\omega_{12}), \quad (13)$$

on fera d'abord le calcul dans le schéma  $l_1 l_2 L M_L$  (voir [7]). On trouve (3)

$$\mathcal{V}_J = -I_r \frac{V}{4\pi} \left\{ (c_1 + c_2) \sum_{LS} (2L+1) \varphi_{LS}(l_1 j_1 l_2 j_2 J) + (c_3 + c_4) \sum_{LS} (2L+1) (-1)^{l-S} \varphi_{LS}(l_1 j_1 l_2 j_2 J) \right\}, \quad (14)$$

(2) Dans ce cas, pour une configuration  $(n_1 l_1 j_1) - (n_2 l_2 j_2)^{-1}$  on a :

$$\mathcal{V}_J = c_1 F^0 + c_3 \Pi F^0$$

qui a les mêmes variations en fonction de  $J$ .

(3) Pour une configuration  $n_1 l_1 j_1 - (n_2 l_2 j_2)^{-1}$ , on trouve de même

$$\mathcal{V}_J = (c_1 + c_2) \sum_{LS} \varphi_{LS}(l_1 j_1 l_2 j_2 J) G^{L+} + (c_3 + c_4) \Pi \times \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{2J+1} \frac{1}{2} C_{l_1 l_2} G^J,$$

où

$$G^k = F^k = (2k+1) \frac{V}{4\pi} I_r.$$

où  $I_r$  est l'intégrale radiale :

$$I_r = \int \frac{dr}{r^2} [R_{n_1 l_1}(r) R_{n_2 l_2}(r)]^2,$$

$\varphi_{LS}$  est défini en (12).

**7. Détermination des fonctions d'onde radiales et calcul des  $F^k$  et  $G^k$ .** — Les intégrales  $F^k$  et  $G^k$  sont difficiles à évaluer en général. Nous avons adopté la méthode de Talmi [3] valable lorsque l'approximation d'ordre zéro est relative à un oscillateur harmonique avec la fonction  $\xi(r)$  de (2) prise égale à une constante.

Les fonctions d'onde radiales de l'approximation d'ordre zéro sont :

$$R_{nl}(r) = N_{nl} e^{-\frac{\nu}{2} r^2} r^{l+1} L_{n+l+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\nu r^2), \quad (15)$$

où  $N_{nl}$  est un facteur de normalisation et  $L_{n+l+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}$  un polynôme de Laguerre d'ordre demi-entier.

Il faut fixer la valeur du paramètre  $\nu$  de (15), ou de  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$  que nous avons choisi, lié à l'intervalle  $\hbar\omega$  des niveaux de l'oscillateur par

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m\mu^2}.$$

Nous avons fixé  $\mu$  d'une manière plus précise en prenant le rayon moyen de l'orbite  $a \simeq \mu\sqrt{2}$  et en l'égalant à  $R = (A-2)^{\frac{1}{3}}$  en unité  $r_0$ ; alors

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{ma^2} = \frac{\hbar^2}{mR^2} \quad (R \text{ rayon du « core »).$$

Pour  $A = 40$  ( $^{40}\text{K}$ ),  $\mu = 2,38$  et  $\hbar\omega = 2$  MeV,

$A = 210$  ( $^{210}\text{RaE}$ ),  $\mu = 4,19$ ,  $\hbar\omega = 0,65$  MeV,

valeurs qui semblent convenables : dans le modèle à une particule, elles doivent être liées aux intervalles d'énergie observés entre le fondamental et les premiers niveaux excités des noyaux impairs.

Avec ces valeurs de  $\mu$ , nous avons vérifié que les erreurs commises en remplaçant  $R_{nl}$  par  $R_{0l} = R_l$  étaient de quelques pour-cent sur la séparation des niveaux (les valeurs de  $n \geq 1$  se rencontrant pour les noyaux moyens et lourds). *Dans ce qui suit, on a toujours pris  $n = 0$ .*

La méthode de Talmi consiste à introduire les coordonnées

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

du centre de gravité des nucléons 1 et 2, et les coordonnées relatives :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

On a alors :

$$F^k(n_1 l_1, n_2 l_2) = \sum_{\rho=0}^{l_1+l_2} \alpha_{\rho}(k) I_{\rho}, \quad G^z = \sum_{\rho=0}^{l_1+l_2} \beta_{\rho}(z) I_{\rho}, \quad (16)$$

où les  $I_{\rho}$  dépendent de  $\mu$  :

$$I_{\rho} = \frac{N_{\rho}^2}{2^{l_1+1} \sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \mu^2 r} V(r) r^{2\rho+2} dr, \quad (17)$$

tandis que les  $\alpha_{\rho}$ ,  $\beta_{\rho}$  dépendent de  $k$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  mais non de  $\mu$ .

Les valeurs de  $I_{\rho}$  pour divers potentiels  $V$  ont été données par Talmi (4). On a, par exemple :

Potentiel gaussien :

$$I_{\rho} = V(4\mu^2 + 1)^{-\rho - \frac{1}{2}};$$

Potentiel de Yukawa :

$$I_0 = V \left\{ \frac{1}{\mu \sqrt{\pi}} - [1 - \Phi(\mu)] e^{\mu^2} \right\}, \quad \dots,$$

avec

$$\Phi(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mu} e^{-x^2} dx.$$

Sous cette forme, les  $I_{\rho}$  du potentiel de Yukawa se présentent comme la différence petite de deux termes positifs grands et presque égaux. Il est plus pratique [25] de les ramener aux fonctions  $Hh_n$  tabulées pour certaines valeurs de  $n$  (British Association Tables)

$$I_{\rho} = V \frac{e^{\mu^2}}{\mu \sqrt{\pi}} 2^{\rho} \rho! Hh_{2\rho+1}(\mu \sqrt{2}). \quad (18)$$

**8. Résultats : Noyaux avec  $40 \leq A \lesssim 60$ .** —

Le cas le plus typique est celui de  ${}_{19}^{40}K_{21}$  (cf. tableau I) présentant un trou en protons dans la couche  $d_{3/2}$  et un neutron en  $f_{7/2}$ . On remarquera que le spin de l'état fondamental est  $\frac{1}{2}$  conformément à l'expérience. Le moment magnétique théorique de  $-1,70$ , est assez différent de la valeur expérimentale  $-1,30$ . Il convient toutefois de noter, comme l'a fait Feenberg [19], que le couplage  $LS$  conduit à quatre configurations possibles  ${}^3H_4$ ,  ${}^3G_4$ ,  ${}^3F_4$  et  ${}^1G_4$ , toutes de moment magnétique positif. La différence de  $0,40$  magnétons nucléaires, assez exceptionnelle pour les noyaux impair-impairs légers, peut être expliquée de façon qualitative satisfaisante par la variation des moments magnétiques anormaux de nucléons liés à un noyau [20]. Nous donnons dans la figure 1 l'ordre des niveaux pour les potentiels

de contact, de Yukawa et constant (colonnes  $\delta$ ,  $Y$ ,  $\infty$ , respectivement). Entre les potentiels  $\delta$  et  $Y$  il y a croisement des niveaux 2 et 5, l'ordre des niveaux

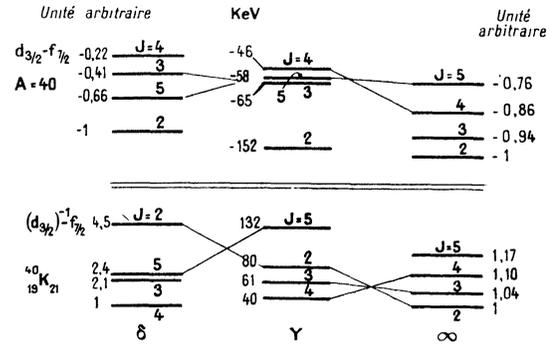


Fig. 1.

pour le potentiel de Yukawa étant toutefois plus voisin de celui d'une interaction de contact que de celui de portée infinie. A titre de comparaison nous donnons les niveaux calculés pour la configuration  $d_{3/2} - f_{7/2}$   $A = 40$ . Si le potentiel  $\mathcal{V}$  était du type Wigner, on aurait un simple renversement de l'ordre des niveaux dans les deux configurations de la figure 1; c'est ce qui a lieu effectivement pour les potentiels  $\delta$ , car alors le potentiel de Majorana se ramène à un potentiel de Wigner tandis que ceux de Bartlett et Heisenberg sont peu importants. Au contraire, pour un potentiel de Yukawa, cette

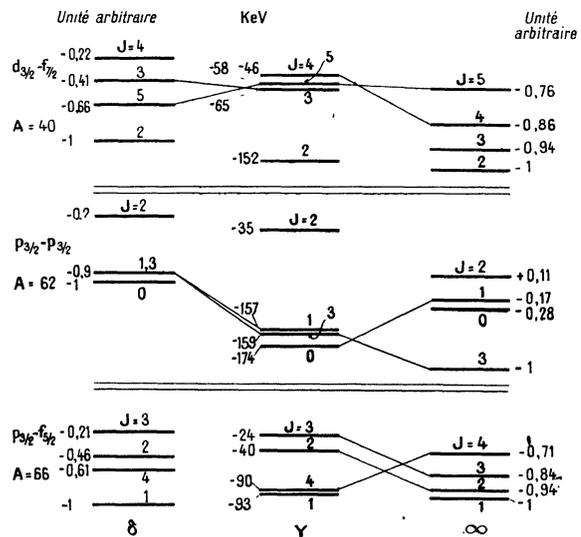


Fig. 2.

(4) Notre définition de  $I_{\rho}$  diffère par un facteur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  de celle de cet auteur :

$$I_{\rho} = \int R_{\rho}^2(r) V(r) dr.$$

loi simple n'est plus vraie. Pour le potentiel  $Y$ , nous avons donné la valeur des  $\mathcal{V}_J$  en prenant  $V = 5$  MeV.

D'une façon générale, il est à prévoir que les résultats avec les potentiels  $\delta$  et  $Y$  sont d'autant

plus voisins que  $A$  est plus élevé, avec notre choix de  $\mu \sqrt{2} = (A - 2)^{\frac{1}{2}}$  (le potentiel  $\delta$  correspond à  $\mu \rightarrow \infty$ ). C'est ce que nous avons vérifié en étudiant les cas suivants :

$$\begin{aligned} p_{3/2} - p_{3/2} & \quad A = 62, & \mu = 2,77; \\ p_{3/2} - f_{5/2} & \quad A = 66, & \mu = 2,83. \end{aligned}$$

Les  $A$  choisis correspondent aux  $A$  moyens pour ces configurations. La figure 2 schématise les résultats obtenus, y compris ceux de la configuration  $d_{3/2} - f_{7/2}$ ,  $A = 40$  ( $\mu = 2,38$ ) déjà étudié à propos de  ${}^4_0K$ . *Tout croisement de niveaux entre  $\delta$  et  $Y$  a disparu pour  $A = 62$ .*

La figure 3 donne les niveaux de la configuration  $p_{1/2} - f_{3/2}$  précédente joints à ceux de  $p_{1/2} - (f_{3/2})^{-1}$ ,  $A = 66$ . Cette dernière configuration serait celle

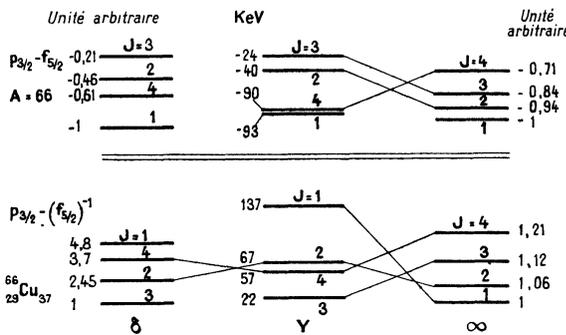
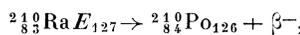


Fig. 3.

de  ${}^{66}_{29}Cu_{37}$  si l'on admet la validité de nos calculs quand on remplace les couches par des sous-couches saturées. On voit qu'il y a encore croisement entre les niveaux 2 et 4 pour les colonnes  $\delta$  et  $Y$  bien que  $A = 66$ . Nordheim attribue le spin 1 au  ${}^{66}Cu$ , ce qui serait conforme à la valeur théorique pour la configuration  $p_{3/2} - f_{5/2}$ , mais les données expérimentales sont insuffisantes pour justifier son choix.

*Noyaux avec  $A > 60$ .* — On ne considérera alors que le potentiel  $V$  de contact. Le cas le plus intéressant est celui du  ${}^{210}_{84}RaE_{127}$ , déjà étudié en détail par Pryce [7]. La transition



conduit à l'état fondamental  $0^+$  du polonium, le spectre  $\beta$  n'étant accompagné d'aucun  $\gamma$ . La forme du spectre, très différente des types permis ou « uniques » avait conduit Konopinski [21] à classer la transition comme  $\Delta J = 2$ , non. Les deux termes  $\beta\bar{\sigma}$  et  $\beta\bar{\alpha}$  de l'interaction tensorielle pure suffisaient alors à expliquer la forme du spectre. La correction due au champ coulombien à l'intérieur du noyau invalide ce résultat [22]. Petschek et Marshak [23] ont alors expliqué la forme du spectre par une transition  $\Delta J = 0$ , oui avec une combinaison des interactions  $T$  et  $P$ . L'état fondamental du  $RaE$  serait

alors  $0^-$  fourni par la configuration  $1h_{9/2}$  pour le proton,  $2g_{9/2}$  pour le neutron.

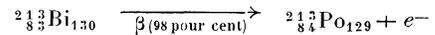
On obtient alors l'ordre suivant, pour les niveaux :

TABLEAU II.

$J$ .	$-\mathcal{V}_J$ (unité arbitraire).	$J$ .	$-\mathcal{V}_J$ (unité arbitraire).
0.....	1	7.....	0,18
1.....	0,51	5.....	0,17
9.....	0,30	4.....	0,13
2.....	0,24	6.....	0,071
3.....	0,21	8.....	0,036

en accord avec les résultats de Pryce.

L'interprétation de Petschek et Marshak présente cependant des difficultés. En premier lieu, le facteur de correction par rapport à la forme permise varie beaucoup en fonction de l'énergie de l'électron émis, par suite d'une compensation assez accidentelle résultant d'un choix particulier d'éléments de matrice nucléaires. D'autre part, la transition  ${}^{209}_{82}Pb_{127} \rightarrow {}^{209}_{83}Bi_{126}$  devrait correspondre à  $g_{9/2} \rightarrow h_{9/2}$ , c'est-à-dire aussi  $\Delta J = 0$ , oui. La seule différence avec le  $RaE$  est l'énergie maxima du spectre 0,68 MeV au lieu de 1,17 MeV. Or le spectre de  ${}^{209}Pb$  est à forme permise, au moins au-dessus de 150 keV [24]; on est alors obligé d'admettre une transition  $\Delta J = 1$ , oui  $i_{11/2} \rightarrow h_{9/2}$  (\*), l'élément de matrice de l'interaction  $P$  étant ici nul [9]. Ce changement pour l'orbite du  $127^e$  neutron de  $RaE$  par rapport à  ${}^{209}Pb$  peut être dû à l'interaction neutron-proton, mais semble difficile à expliquer. Pour éclaircir la question, il serait intéressant de connaître la forme du spectre



qui correspondrait à  $h_{9/2} \rightarrow g_{9/2}$ , c'est-à-dire encore à une transition  $\Delta J = 0$ , oui. Petschek [9] indique encore ici une transition  $\Delta J = 1$ , oui :  $h_{9/2} \rightarrow i_{11/2}$ , mais il ne semble pas que la forme du spectre ait été étudiée.

Dans deux cas moins sûrs correspondant à des sous-couches saturées plus deux nucléons périphériques on trouve (cf. tableau I).

TABLEAU III.

Noyau.	Configuration.	Ordre des niveaux ( $-\mathcal{V}_J$ en unité arbitraire).		$J_{exp}$
${}^{170}_{69}Tm_{101} \dots$	$s_{1/2} - f_{3/2}$	-	$\mathcal{V}_2 = 1$	2
${}^{99}_{39}Y_{51} \dots \dots$	$p_{1/2} - d_{5/2}$			

(\*) *Note sur épreuve.* — En fait, même si cette transition correspond à  $g_{9/2} \rightarrow h_{9/2}$ , l'élément de matrice de l'interaction  $S$  (nul pour la transition  $0^- \rightarrow 0^+$  de  $RaE$ ) intervient aussi, et la compensation que l'on avait pour  $RaE$  dans  $(T, P)$  ne se produira probablement pas dans  $(S, T, P)$  d'où une forme de spectre permise. Ceci est confirmé par la valeur  $\log ft = 5,6$  alors que l'on avait  $\log ft \simeq 8$  pour  $RaE$ . On peut d'ailleurs rencontrer aussi des transitions  $0^- \rightarrow 0^+$  où la compensation ne se produise pas dans  $(T, P)$  d'où une forme de spectre permise et  $\log ft \simeq 5,5$  au voisinage de  $RaE$ . Ceci semble le cas de  ${}^{208}_{81}Tl_{125}$  d'après une étude de Brysk.

9. **Discussion.** — Il convient de discuter dans quelle mesure les résultats obtenus, en bon accord avec les données expérimentales, dépendent des hypothèses faites.

1° Nous avons vu au paragraphe 2 que les fonctions d'ondes non perturbées du problème étaient mal connues. Dans le cas extrême d'un potentiel de contact, ceci n'influe pas sur l'ordre des niveaux : les fonctions d'ondes radiales non perturbées entrent dans le facteur multiplicatif commun  $I_r$  de (14). D'ailleurs, avec le choix du paramètre  $\mu$  que nous avons fait au paragraphe 7, l'ordre des niveaux est le même pour les potentiels de contact et de Yukawa dès que  $A > 60$ .

Mais ce choix n'est pas unique, le calcul de  $\langle r^2 \rangle$ , par exemple, conduit à la relation  $\mu = \frac{a}{\sqrt{4n + 2l + 3}}$  et à des valeurs de  $\mu$  nettement plus petites que celles que nous avons choisies. On rencontre alors la difficulté suivante : le quantum  $\hbar\omega$  à une valeur qui est nettement trop grande :

$$\begin{aligned} A = 40, & \quad \mu = 1,19, & \quad \hbar\omega = 8 \text{ MeV}; \\ A = 210, & \quad \mu = 1,33, & \quad \hbar\omega = 6 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Par contre les séparations  $\mathcal{N}_j$  entre les divers niveaux semblent plus correctes dans ce dernier cas (de l'ordre de 100 keV pour  $A = 40$ ). Il y a là une difficulté qui peut résulter du choix des fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique comme approximation d'ordre zéro.

2° Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 1, le champ coulombien du core peut déformer les fonctions d'onde de l'approximation d'ordre zéro. Nous n'avons pas estimé quantitativement l'influence de cet effet.

3° Nous avons négligé la force tensorielle entre neutron et proton, mais remplacé son effet par celui des forces de Bartlett et Heisenberg dépendant du spin. Il est vraisemblable que cela ne change pas l'ordre des niveaux obtenu.

Nous n'avons pas tenu compte d'une interaction

en  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  entre les deux nucléons externes, une telle force entre deux nucléons étant mal connue.

4° Le modèle collectif de A. Bohr [26] prévoit une interaction indirecte entre les nucléons externes par l'intermédiaire de la surface du noyau, déformée par ces nucléons. Mais cette interaction est faible au voisinage des couches saturées : on doit postuler que la déformabilité du core est petite dans ces noyaux, pour rendre compte des faits expérimentaux qui sont alors en bon accord avec le modèle en couches.

En résumé, nos calculs donnent, très probablement, la valeur exacte du spin de l'état fondamental pour les noyaux impairs-impairs formés de couches saturées et de deux nucléons externes (un nucléon pouvant être remplacé par un « trou »). Ils confirment que pour la détermination de ce spin, on ne peut considérer le modèle en couches simples où l'on suppose que deux nucléons identiques sur une couche forment un ensemble de spin nul : un tel traitement ne ferait pas de distinction entre les configurations  $d_{3/2} - f_{7/2}$  et  $(d_{3/2})^{-1} - f_{7/2}$  par exemple alors que l'ordre des niveaux  $y$  est sensiblement inversé.

Toute tentative pour donner une règle générale comme celle de Nordheim, fondée sur le modèle simple, semble donc illusoire.

Quant aux résultats obtenus en considérant les noyaux à sous-couches saturées + 2 nucléons, ils sont plus incertains, malgré le bon accord avec l'expérience obtenu dans quelques cas.

Nous tenons à remercier les Professeurs Joliot, Leprince-Ringuet et Proca pour l'intérêt qu'ils ont porté à nos recherches et les encouragements qu'ils nous ont prodigués. Ce travail a été, en outre, rendu possible grâce à l'appui matériel du Centre National de la Recherche Scientifique. Enfin, nous sommes redevables au Dr Kronheimer des tables des fonctions  $Hh$ .

Manuscrit reçu le 31 octobre 1953.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] HAXEL O., JENSEN J. H. D. et SUESS H. E. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1766; M. G. MAYER. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 16.  
 [2] KURATH D. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 98.  
 [3] TALMI I. — *Helv. Phys. Acta*, 1952, **25**, 185.  
 [4] EDMONDS A. R. et FLOWERS B. H. — *Proc. Roy. Soc.*, 1952, **215**, 120.  
 [5] NORDHEIM L. W. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 294.  
 [6] *Nuclear Data*, N. B. S. 499. Washington.  
 [7] PRYCE M. H. L. — *Proc. Phys. Soc. A*, 1952, **65**, 773.  
 [8] NORDHEIM L. W. — *Rev. Mod. Physics*, 1951, **23**, 322.  
 [9] PETSCHKE A. G. — *N. Y. O.*, 1951, 3035.  
 [10] MARTY C. et PRENTKI J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **235**, 654.  
 [11] MAYER M. G. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 22.  
 [12] MARTY C., NATAF R. et PRENTKI J. — *C. R. Acad. Sc.* (à paraître).  
 [13] MARTY C., NATAF R. et PRENTKI J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 2387; 1953, **237**, 31 et 137.  
 [14] RACAH G. — *Phys. Rev.*, 1942, **62**, 438.  
 [15] RACAH G. — *Phys. Rev.*, 1942, **61**, 186.  
 [16] NATAF R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 1972.  
 [17] BETHE H. A. et BACHER R. F. — *Rev. Mod. Physics*, 1936, **8**, 108.  
 [18] KURATH D. — *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 218; 1953, **91**, 1430. DE SHALIT A. — *Bull. Am. Phys. Soc.*, 1953, **28**, 19; *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 1479.  
 [19] FEENBERG E. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 1275.  
 [20] TALMI I. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 1248.  
 [21] KONOPINSKI E. J. — *Rev. Mod. Physics*, 1943, **15**, 209.  
 [22] ROSE M. E. et HOLMES D. K. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 190 et O. R. N. L., 1022.  
 [23] PETSCHKE A. G. et MARSHAK R. E. — *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 698.  
 [24] WAPSTRA A. H. — *Thèse*, Amsterdam, 1953.  
 [25] KRONHEIMER E. H. — *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 1003.  
 [26] BOHR A. et MOTTELSON B. R. — *Det. Kgl. Danske Vid. Selsk.*, 1953, **27**, n° 16.