Mécanique du point

A. Proca

▶ **To cite this version:**

A. Proca. Mécanique du point. Journal de Physique et le Radium, 1954, 15 (2), pp.65-72. 10.1051/jphysrad:0195400150206500 . jpa-00234865

HAL Id: jpa-00234865
https://hal.science/jpa-00234865

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Tome 15. N° 2. Février 1954.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

MÉCANIQUE DU POINT

Par A. PROCA,
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — La mécanique classique actuelle ne tire pas avantage de toutes les ressources mises à sa disposition par le principe de la relativité restreinte. L'auteur propose donc une nouvelle forme de mécanique qui se réduit à la précédente dans un cas particulier et dont le pouvoir de description semble plus étendu.

L'hypothèse de base consiste à admettre que les équations fondamentales font intervenir non pas les x^k, mais de nouvelles variables ξ, de caractère spinoriel, à partir desquelles on peut calculer les grandeurs d'univers. Autrement dit, le mouvement d'un point matériel est déterminé non pas dans l'espace-temps, mais dans certains espaces spinoriels sous-jacents, liés à l'Univers par l'intermédiaire de l'espace des vitesses.

On écrit les équations du mouvement et leurs intégrales premières simples. Le point matériel ainsi défini possède un spin. Son mouvement ne suit pas en général la loi d'inertie; il est constitué par la superposition d'un déplacement à vitesse constante et d'un « tremblement de Schrödinger ». Ce dernier peut être absent et dans ce cas particulier le point se meut à vitesse constante comme en Mécanique classique. On étudie ensuite le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique et l'on retrouve l'expression de la force de Lorentz ainsi que l'effet d'un moment électromagnétique sous la même forme qu'en électrodynamique classique.

1. Les nouveaux résultats expérimentaux concernant les diverses particules fondamentales, ainsi que les graves difficultés que rencontre la théorie dans sa forme actuelle, rendent indispensable une révision complète de celle-ci.

Les nouvelles exigences sont très variées et il semble difficile à l'heure actuelle d'établir un formalisme cohérent qui puisse résoudre à la fois, par exemple, le problème de la self-énergie et celui de la quantification de la masse. Pour un certain temps encore, nous serons obligés de chercher des solutions partielles, résolvant tel ou tel problème particulier, avant d'aboutir à une synthèse générale, complètement satisfaisante. Or, il est clair que nous arriverons à cette synthèse d'autant plus facilement que nos instruments d'investigation seront plus parfaits. Il ne semble donc pas dénué d'intérêt d'examiner avant toute chose ces instruments, — en d'autres termes la Mécanique du point matériel, — pour voir s'ils ne peuvent être améliorés, et cela d'une façon tout à fait générale, sans référence à une difficulté ou un problème particuliers.

2. Par « Mécanique » nous devons naturellement entendre la mécanique quantique. Celle-ci procède cependant de la mécanique classique et il est évident que les imperfections de cette dernière se répercuteront sur la mécanique quantique elle-même. Le programme de travail correct consisterait donc à soumettre la mécanique classique à un examen critique, comme indiqué plus haut, à essayer de l'améliorer si nécessaire et à passer ensuite à la mécanique quantique par le processus de quantification usuel. C'est dans cette voie que nous tenterons de nous engager.

3. Pour analyser la situation actuelle, remarquons que, lorsqu'on néglige les effets de gravitation et qu'on tient compte de l'inertie au moyen d'un coefficient de masse, la mécanique classique des particules fondamentales est dominée entièrement par le principe de la relativité restreinte. En d'autres termes, elle doit satisfaire aux exigences de cette relativité.

Or, certaines de ces exigences sont de telle nature que l'on a recherché des raisons pour ne pas s'y plier, ce qui équivaut au fond à un rejet partiel du principe de relativité. Nous sommes ainsi placés devant l'alternative suivante : ou bien admettre toutes les

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:0195400150206500

conséquences de ce principe ou bien le rejeter. Cette dernière attitude étant insoutenable dans l'état actuel de la science, nous sommes tenus jusqu'à nouvel ordre à accepter *toutes* les conséquences qui découlent de l'application du principe de relativité.

L'exemple le plus frappant de cet état de choses est l'existence, requise par la relativité, de caractéristiques qui se traduisent par des « énergies » ou « masses » négatives. En théorie classique la masse au repos d'un corpuscule de moment p_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) peut être soit $m_0 = +\sqrt{-\sum_1^4 p_\rho^2}$ soit $-m_0$. Il est exact que quelques fois le double signe n'est pas gênant et que nous pouvons passer sous silence les cas où $m_0 < 0$. Il n'en est pas moins vrai que cette règle n'est pas générale. Bien au contraire, le double signe de m_0 est lié essentiellement au caractère quadratique de l'invariant de la relativité. Tant que nous admettrons la validité de la relativité restreinte, nous devrons donc compter avec la possibilité d'un signe négatif, quitte à l'interpréter physiquement, si possible, d'une manière satisfaisante.

4. Une autre remarque relative aux améliorations souhaitables de la mécanique concerne la possibilité de décrire classiquement une particule possédant un spin différent de zéro.

On a souvent écrit que le spin est un effet quantique; le seul argument à l'appui de cette thèse est le fait qu'on n'a pas encore réussi à décrire une particule à spin en mécanique classique. Diverses tentatives ont été faites en ce sens (1), mais qui n'ont pas toujours abouti à des résultats complets ou indiscutables.

En mécanique quantique le spin apparaît dès qu'on tient compte de la relativité. Il semble assez probable qu'il en soit également ainsi en mécanique classique et que l'origine du spin doive être cherchée plutôt dans les rotations fondamentales de la relativité que dans les discontinuités de la quantification. Quoi qu'il en soit, la description du spin nécessite l'introduction de nouvelles variables dont le choix n'est pas aisé; heureusement, une réponse raisonnable à ce problème peut être fournie par l'observation du paragraphe suivant.

(1) *Voir* en particulier : M. MATHISSON, *Acta Phys. Polonica*, 1937, **6**, 163 et T. W. WEYSSENHOFF, *ibid.*, 1947, **9**, 1. *Voir* également L. DE BROGLIE, *La théorie des particules de spin* $\frac{1}{2}$, Gauthier-Villars, Paris, 1952 où se trouve un exposé de la théorie de WEYSSENHOFF. *Voir* la critique de cette dernière par C. MØLLER, *Comm. Dublin Institute*, A, n° 5 et *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1949, **11**, 251. Enfin citons M. H. L. PRYCE, *Proc. Roy. Soc.*, 1948, A **195**, 62; HÖNL, *Naturwiss*, 1938, **26**, 408; HÖNL et PAPAPETROU, *Z. Physik*, 1939, **112**, 512 et 1939, **114**, 478; PAPAPETROU, *Proc. Roy. Soc.*, 1951, **209**, 248 et 260.

5. La condition de covariance par rapport aux transformations de Lorentz a permis de caractériser les grandeurs susceptibles de décrire les phénomènes physiques (scalaires, vecteurs, etc.) et même d'établir en quelque sorte une hiérarchie, basée sur leur complexité croissante. Parmi ces grandeurs figurent non seulement les tenseurs, mais aussi les spineurs. On peut même dire que, dans la hiérarchie ci-dessus, les spineurs de rang 1 sont « plus simples » que le tenseur le plus élémentaire, à savoir le vecteur; en effet on peut former un vecteur à partir de spineurs par des opérations rationnelles, alors que l'inverse n'est pas vrai.

Or, pour des raisons évidentes aucune théorie classique ne fait appel aux spineurs (2). Il est vrai qu'aucune grandeur physique *mesurable* ne peut être représentée par un spineur en raison du caractère bivalent de ce dernier, mais cette éventualité n'est pas la seule possible. Tout en supposant que les grandeurs physiques mesurables dans l'espace-temps sont exclusivement des tenseurs, il est bien difficile de ne pas admettre que l'introduction des spineurs dans la théorie présente des avantages marqués, en raison des possibilités qu'elle offre d'utiliser toutes les ressources du groupe de Lorentz. Les paragraphes suivants sont destinés à montrer le parti qu'on peut tirer de cette supposition.

6. **Hypothèse de base.** — Le nombre minimum de spineurs compatible avec l'invariance par rapport au groupe de Lorentz, que nous postulons, est deux. Désignons par ξ l'ensemble de ces deux spineurs, groupés comme dans le ψ de la théorie de Dirac et posons comme d'habitude $\xi^+ = i\xi^*\gamma^4 =$ adjoint de ξ.

Nos hypothèses fondamentales s'énoncent alors de la façon suivante :

I. *Tout phénomène physique et en particulier le mouvement d'un point est décrit au moyen des spineurs* ξ *et* ξ^+.

Les résultats expérimentaux se référant à des mesures dans l'espace-temps, il est indispensable de compléter I, en indiquant de quelle façon cet espace-temps est relié aux espaces spinoriels ξ et ξ^+. A cet effet nous allons admettre que :

II. *Si* τ *est un paramètre invariant en fonction duquel on définit le mouvement et* γ^ρ *les matrices* 4×4 *tels que* $\gamma^r\gamma^s + \gamma^s\gamma^r = 2\delta^{rs}$, *on posera*

$$\boxed{\frac{dx^\rho}{d\tau} = \xi^+\gamma^\rho\xi} \qquad (\rho = 1, 2, 3, 4).$$

(2) *Voir* toutefois la *théorie du gyroscope*, de F. Klein, qui semble être le premier à avoir utilisé des grandeurs spinorielles dans un problème de Mécanique classique ainsi que l'a rappelé récemment M. Bopp. Chez cet auteur ainsi que chez Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*), que le premier cite d'ailleurs, les grandeurs spinorielles s'introduisent comme des variables auxiliaires dans l'étude des rotations; les équations fondamentales n'en sont pas modifiées.

Ce choix est arbitraire, mais naturel. Le second membre est le seul vecteur réel du genre temps formé bilinéairement avec ξ et ξ^+ qu'on puisse identifier à un vecteur d'univers caractérisant le mouvement.

D'après I donc, les équations de base de la théorie relient les ξ, ξ^+ et leurs dérivées : les phénomènes et en particulier le mouvement d'un point, sont déterminés non plus dans l'espace-temps x^ρ mais dans les espaces spinoriels sous-jacents ξ, ξ^+ liés à la vitesse. Nous pouvons considérer ces espaces comme les éléments fondamentaux dans la description des phénomènes. Corrélativement, on peut dire que les transformations fondamentales ne sont pas celles qui concernent les vecteurs x^ρ mais celles qui définissent les spineurs fondamentaux, dont résultent les transformations de Lorentz.

Le lien entre les espaces spinoriels et l'espace-temps ordinaire x^ρ est donné par II. Le passage de l'un à l'autre peut se définir en faisant correspondre une courbe de ξ, ξ^+, donnée sous forme paramétrique $\xi_r = f_r(\tau)$ à une courbe de l'univers définie paramétriquement par les équations différentielles $dx^\rho = \xi^+(\tau)\,\gamma^\rho\xi(\tau)\,d\tau$. La donnée des ξ et ξ^+ ne permet pas de calculer les coordonnées elles-mêmes mais seulement leurs dérivées. Les coordonnées restent indépendantes de ξ.

7. **Notations.** — ξ est une matrice à une colonne, d'éléments complexes ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ayant la même variance que le ψ de la théorie de l'électron de Dirac. En fonction de la matrice transposée et conjuguée, $\tilde{\xi}^*$, la matrice adjointe ξ^+ s'écrit

$$\xi^+ = i\tilde{\xi}^*\gamma^4. \tag{1}$$

$\gamma^\rho (\rho = 1, 2, 3, 4)$ sont les matrices 4×4 de von Neumann (tel que l'invariant quadratique soit $\xi^+\xi$) et $\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$. Nous adopterons les notations suivantes (qui sont celles de Pauli) pour les 16 covariants quadratiques formés à partir des produits de γ^ρ :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Invariant} & \Omega_1 = -i\xi^+\xi, \\ \text{Vecteur d'univers} & u^\rho = \xi^+\gamma^\rho\xi, \\ \text{Tenseur antisymétrique.} & m_{\rho\sigma} = i\xi^+\dfrac{i}{2}(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho)\xi, \\ \text{Pseudo-vecteur} & w^\rho = i\xi^+ i\gamma^5\gamma^\rho\xi, \\ \text{Pseudo-invariant} & \Omega_2 = \xi^+\gamma^5\xi. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Ces 16 termes ne sont pas indépendants, mais liés par neuf relations quadratiques bien connues [3]. On a, par exemple :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma(u^\rho)^2 = -\Sigma(w^\rho)^2 = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2), \\ \dfrac{1}{2}\Sigma(m_{\rho\sigma})^2 = \Omega_1^2 - \Omega_2^2, \\ u^\rho m_{\rho\sigma} + \Omega_2 w_\sigma = 0, \qquad \ldots \end{array}\right\} \tag{3}$$

(3) Citons seulement les travaux de O. COSTA DE BEAUREGARD, *Thèse*, Paris, 1943; KOFINK, *Annalen der Physik*, 1940, **38**, 421; G. PETIAU, *J. Math. pures et appl.*, 1946, **25**, 335.

Dans l'espace-temps nous utilisons les coordonnées

$$x^k \quad \text{et} \quad x^4 = ict = ix^0,$$

c étant la vitesse de la lumière.

Nous appelons τ le paramètre réel par rapport auquel on considère la variation des diverses grandeurs. On a par hypothèse

$$\frac{dx^\rho}{d\tau} = \xi^+\gamma^\sigma\xi. \tag{II}$$

Appelons ds l'élément de « temps propre » de la particule dans l'espace-temps ordinaire, défini par

$$-c^2\,ds^2 = \sum_1^4 (dx^\rho)^2. \tag{4}$$

On aura alors en vertu de (II) et de (3) :

$$-c^2\frac{ds^2}{d\tau^2} = \Sigma(u^\rho)^2 = -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2),$$

soit

$$d\tau = \frac{\pm c}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}\,ds. \tag{5}$$

On en déduit l'expression de la *vitesse d'univers* de la particule

$$v^\rho = \frac{dx^\rho}{ds} = \frac{\pm c(\xi^+\gamma^\rho\xi)}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \qquad \text{et} \qquad \Sigma(v_\rho)^2 + c^2 = 0. \tag{6}$$

8. **Lagrangien en l'absence de champ.** — Considérons maintenant le mouvement libre d'un point donné.

Le lagrangien correspondant dépendra essentiellement des ξ. Pour des raisons de variance relativiste, sa forme la plus simple sera celle qui nous est déjà familière :

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi^+}{d\tau}\xi - \xi^+\frac{d\xi}{d\tau}\right). \tag{7}$$

Si nous considérions l'analogie avec d'autres cas connus de la mécanique ondulatoire, nous serions tentés d'ajouter à ce premier terme un second, de la forme $ik^2\xi^+\xi$. Nous verrons cependant plus loin (§ 19) que ce terme est naturellement englobé dans les termes d'interaction avec un champ extérieur. Il n'y a donc pas lieu de l'introduire dans la description du comportement de la particule en l'absence de toute interaction.

Par contre, d'autres termes s'introduiront dans le lagrangien en raison des conditions dans lesquelles doit avoir lieu sa variation. En effet, d'après notre hypothèse fondamentale II, le covariant quadratique $\xi^+\gamma^\rho\xi$ doit toujours être égal à $\frac{dx^\rho}{d\tau} = \dot{x}^\rho$. Nous sommes en présence d'une variation avec conditions de liaison. Utilisons le procédé des multiplicateurs et considérons quatre fonctions inconnues λ_ρ de τ formant les composantes d'un vecteur.

Le lagrangien en l'absence de champ sera alors

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi^+}{d\tau}\xi - \xi^+\frac{d\xi}{d\tau}\right) + \lambda_\rho(\dot{x}^\rho - \xi^+\gamma^\rho\xi) \qquad (8)$$

et la variation portera sur ξ^+, ξ et x.

D'ailleurs, quelles que soient les raisons plus ou moins valables qui nous ont conduit à la forme (8), ce lagrangien constitue une nouvelle hypothèse à ajouter à celles du paragraphe 6.

9. **Équations du point matériel libre. Quantité de mouvement.** — Les équations fondamentales déduites de (8) sont

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\lambda_\rho\gamma^\rho\xi, \qquad \frac{d\xi^+}{d\tau} = +\lambda_\rho\xi^+\gamma^\rho, \qquad (9)$$

$$\frac{dx^\rho}{d\tau} = \xi^+\gamma^\rho\xi, \qquad \frac{d\lambda_\rho}{d\tau} = 0. \qquad (10)$$

Les dernières (10), ne sont autres que

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\rho}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\rho},$$

qui introduisent $\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\rho}$ le moment conjugué de x, autrement dit la « *quantité de mouvement* ». Dans la nouvelle théorie *la quantité de mouvement a donc comme composantes les multiplicateurs de Lagrange* utilisés lors de la variation.

En l'absence de champ, d'après (10), cette *quantité de mouvement est un vecteur constant* (4) qui n'est pas nécessairement proportionnel à la vitesse d'univers comme en théorie classique.

Il en est ainsi chaque fois que la particule possède un spin et cette différence entre vitesse et quantité de mouvement peut devenir très intéressante du point de vue expérimental. Le comportement d'un tel corpuscule pourrait être différent de celui que nous connaissons dans des conditions convenablement choisies.

En admettant que le vecteur constant λ_ρ soit également du genre temps, $\lambda_\rho\lambda^\rho < 0$, nous pouvons définir l'invariant

$$\left.\begin{aligned} \lambda = m_0 c = \sqrt{-\lambda_e\lambda^\rho}, \\ \lambda^2 + \lambda_\rho\lambda^\rho = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

m_0 représente la *masse au repos* de la particule qui apparaît ici comme une constante d'intégration.

10. **Grandeurs d'espace-temps pour le mouvement libre. Vitesse.** — A étant une matrice 4×4 quelconque, on déduit des équations (9) la relation générale suivante où $[A, B] = AB - BA$:

$$\frac{d}{d\tau}(\xi^+A\xi) = \lambda_\rho\xi^+[\gamma^\rho, A]\xi \qquad (12)$$

qui permet une série de conclusions intéressantes :

En posant par exemple $A = 1$, on a une intégrale première

$$\frac{d\Omega_1}{d\tau} = 0. \qquad (13)$$

Avec $A = \gamma^5$ et $\gamma^5\gamma^\rho$, on trouve

$$\frac{d\Omega_2}{d\tau} = 2\lambda_\rho w^\rho \qquad (14)$$

et

$$\frac{dw^\rho}{d\tau} = 2\lambda^\rho\Omega_2, \qquad (15)$$

lesquelles entraînent

$$\frac{d^2\Omega_2}{d\tau^2} + 4\lambda^2\Omega_2 = 0. \qquad (16)$$

On a également une autre intégrale première

$$(\lambda_\rho\lambda_\sigma + \lambda^2\delta_{\rho\sigma})w^\rho = \text{const.} \qquad (17)$$

et en conséquence aussi

$$\frac{d^2w_\sigma}{d\tau^2} + 4\lambda^2 w_\sigma = \text{const.} \qquad (18)$$

En posant $A = \gamma^\sigma$, on obtient la dérivée de la vitesse, donc la *loi du mouvement proprement* dite. On a

$$\boxed{\frac{du^\sigma}{d\tau} = -2\lambda_\rho m^{\rho\sigma}.} \qquad (19)$$

On en déduit une autre intégrale première

$$\lambda u^\rho = \text{const.} \qquad (20)$$

En tenant compte de (23) que nous établirons plus loin, nous pouvons finalement écrire

$$\boxed{\frac{d^2u^\sigma}{d\tau^2} + 4\lambda^2 u^\sigma = \text{const.} = -4\lambda^\sigma(\lambda_\rho u^\rho),} \qquad (21)$$

d'où l'on déduit que l'expression générale de la vitesse sera

$$u^\sigma = \frac{dx^\sigma}{d\tau} = A^\sigma e^{2i\lambda\tau} + B^\sigma e^{-2i\lambda\tau} + C^\sigma, \qquad (22)$$

avec

$$C^\sigma = -\frac{\lambda^\sigma}{\lambda^2}(\lambda_\rho u^\rho) = \text{const.}$$

On lit sur cette formule le comportement d'un point matériel en l'absence de champ. On y voit que dans le cas particulier où les conditions initiales sont telles que $A^\sigma = B^\sigma = 0$ *le point se déplace à vitesse constante comme en mécanique classique.* En général cependant, la vitesse oscille avec la fréquence $2\lambda = 2m_0c$ d'une manière assez compliquée, surtout pour la vitesse d'univers, laquelle contient également un autre terme oscillant Ω_2. Le

(4) Noter qu'il s'agit ici de constance par rapport au paramètre τ. Dans la plupart des cas cela équivaut à une « constance d'univers » $\frac{d\lambda_\rho}{ds} = 0$, à cause de la proportionnalité (5) entre $d\tau$ et le temps propre ds.

détail de ces conditions et l'expression des coefficients sont donnés au paragraphe 12.

11. **Spin.** — En posant

$$A = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu),$$

on trouve

$$\lambda_\mu u_\nu - \lambda_\nu u_\mu + \frac{1}{2}\frac{dm_{\mu\nu}}{d\tau} = 0 \qquad (23)$$

ou

$$\lambda_\mu dx_\nu - \lambda_\nu dx_\mu + \frac{1}{2} dm_{\mu\nu} = 0 \qquad (24)$$

ou encore

$$x_\mu\lambda_\nu - x_\nu\lambda_\mu - \frac{1}{2} m_{\mu\nu} = \text{const.} \qquad (25)$$

Nous pouvons donc affirmer que la particule libre possède un *spin*, donné par $\frac{1}{2}m_{\mu\nu}$, *ou plus généralement par*

$$\text{Spin} = \frac{1}{2} m_{\mu\nu} + \text{const.}, \qquad (26)$$

l'équation de définition (24) ne le fixant en réalité qu'à une constante arbitraire près.

Compte tenu de (23), on trouve l'intégrale première

$$\lambda_\mu m_{\nu\rho} + \lambda_\nu m_{\rho\mu} + \lambda_\rho m_{\mu\nu} = \text{const.} \qquad (27)$$

En dérivant (23), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d^2 m_{\mu\nu}}{d\tau^2} &= 4\lambda^\rho(\lambda_\mu m_{\rho\nu} - \lambda_\nu m_{\rho\mu}) \\ &= -4\lambda^\rho(\text{const.} - \lambda_\rho m_{\mu\nu}) \\ &= \text{const.} - 4\lambda^2 m_{\mu\nu},\end{aligned}$$

donc

$$\frac{d^2 m_{\mu\nu}}{d\tau^2} + 4\lambda^2 m_{\mu\nu} = \text{const.} = -4\lambda^\rho(\Sigma\lambda_\mu m_{\nu\rho}). \qquad (28)$$

La définition du spin dépend du choix de la constante arbitraire. On peut la prendre nulle, auquel cas le spin est égal à $\frac{1}{2}m_{\mu\nu}$. Avec cette hypothèse une particule classique (qui sera étudiée plus loin au paragraphe 14) aura un spin dont toutes les composantes seront *constantes* et non pas nécessairement nulles dans la mesure où l'on ne confond pas ces constantes avec celles du second membre. Remarquons que ces deux possibilités sont équivalentes : d'après (23) si $m_{\mu\nu} = \text{const.}$ on a λ_μ proportionnel à la vitesse et la particule est bien un point matériel classique.

Si l'on tient absolument à définir un « spin » dont les composantes soient nulles pour le cas particulier d'un corpuscule classique, il faudra choisir la constante dans (26) de façon que la solution de (28) soit purement oscillante. Dans ce cas le « spin » peut s'écrire sous une forme simple, à savoir :

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} m_{\mu\nu} + \text{const.} \\ &= \frac{\lambda_\rho}{2\lambda^2}(\lambda_\mu m_{\nu\rho} - \lambda_\nu m_{\mu\rho})\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\lambda^2}\frac{d}{d\tau}(\lambda_\mu u_\nu - \lambda_\nu u_\mu) \\ &= \frac{1}{4\lambda^2}\frac{d^2}{d\tau^2}(\lambda_\mu x_\nu - \lambda_\nu x_\mu).\end{aligned}$$

On vérifie aisément à l'aide de (21) que (23) est satisfaite par cette valeur de $S_{\mu\nu}$; d'autre part dans le cas classique $\lambda_\mu u_\nu - \lambda_\nu u_\mu = 0$, donc immédiatement $S_{\mu\nu} = 0$ (5).

12. **Solution générale. « Potentiels ».** — Des équations (9) et (10) on déduit

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \lambda^2\xi = 0, \qquad \frac{d^2\xi^+}{d\tau^2} + \lambda^2\xi^+ = 0, \qquad \frac{d\lambda_\rho}{dt} = 0.$$

La solution générale s'écrit donc

$$\xi = a\,e^{i\lambda\tau} + b\,e^{-i\lambda\tau}, \qquad \xi^+ = b^+ e^{i\lambda\tau} + a^+ e^{-i\lambda\tau}, \quad (29)$$

où $\lambda_\rho\lambda^\rho + \lambda^2 = 0$ et où λ_ρ, a, b sont des constantes satisfaisant aux équations

$$\left.\begin{aligned}(i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho)a &= 0, & (-i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho)b &= 0, \\ a^+(i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho) &= 0, & b^+(-i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho) &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

On peut écrire la solution de ces équations (30) sous une forme commode, en remarquant que deux des composantes de a et deux de b, donc quatre en tout, sont arbitraires dans la solution. Considérons alors quatre constantes complexes arbitraires φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 groupées en une colonne φ et que nous appellerons « potentiel » (6). La solution des équations (30) s'écrit alors simplement :

$$\left.\begin{aligned}a &= (-i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho)\varphi, & b &= (i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho)\varphi, \\ a^+ &= \varphi^+(-i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho), & b^+ &= \varphi^+(i\lambda + \lambda_\rho\gamma^\rho).\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

La forme générale des ξ en fonction de τ est donnée par (29) avec (31) ou encore par

$$\left.\begin{aligned}\xi &= 2(\lambda\sin\lambda\tau + \lambda_\rho\gamma^\rho\cos\lambda\tau)\varphi, \\ \xi^+ &= \varphi^+.2(-\lambda\sin\lambda\tau + \lambda_\rho\gamma^\rho\cos\lambda\tau).\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

On voit apparaître dans la solution générale les deux signes de λ, comme l'exige la relativité.

Le choix des constantes arbitraires a et b, ou λ_ρ, correspond aux diverses « conditions initiales » envisagées. Notons que ces « conditions initiales » sont plus nombreuses qu'en théorie classique et concernent également certaines caractéristiques de la particule elle-même et non pas seulement des éléments du mouvement. En les choisissant convenablement on obtiendra des cas particuliers inté-

(5) Ce choix peut être guidé par des considérations d'interaction ou de quantification, *voir* par exemple le paragraphe 17. De même, c'est l'expression $\frac{1}{2}m_{\mu\nu}$ (constante nulle) qui possède les valeurs propres correctes, lorsqu'on quantifie au moyen des relations de commutation habituelles.

(6) Ce procédé a été appliqué par M. B. Kwal à la théorie de l'électron de Dirac.

ressants, tel par exemple celui où ξ ne contient que la masse d'un seul signe, examiné au paragraphe suivant.

13. **Cas harmonique. Particule classique.** — Ce cas, que nous appellerons le «cas harmonique», est réalisé lorsque par exemple, $a=0$ [valeur qui satisfait bien aux conditions (30)]. On a alors simplement

$$\xi = b\, e^{-i\lambda\tau}, \qquad \xi^+ = b^+ e^{i\lambda\tau}. \tag{33}$$

Examinons comment se présente alors le mouvement dans l'espace-temps.

Remarquons d'abord que toutes les grandeurs réelles de la forme $\xi^+ A \xi$ dans cet espace sont des constantes.

$\Omega_1 = -ib^+b$ est une constante dans tous les cas, mais le second groupe d'équations (31) donne aussi

$$\Omega_2 = b^+\gamma^5 b = 0. \tag{34}$$

Il en résulte, d'après (6), que la *vitesse d'univers de la particule est constante*

$$v^\sigma = \frac{c(b^+\gamma^\sigma b)}{\Omega_1} = \frac{ic(b^+\gamma^\rho b)}{b^+ b} \tag{35}$$

et donc que *la particule est assimilable à un point matériel classique.*

En multipliant les deux équations (30) par γ^σ, b et b^+ et en ajoutant, on obtient

$$-i\lambda\, b^+\gamma^\sigma b + \lambda^\sigma b^+ b = 0,$$

d'où en comparant avec (35) et (11)

$$\boxed{\lambda^\sigma = m_0 v^\sigma.} \tag{36}$$

Dans ce cas donc, la quantité de mouvement est proportionnelle à la vitesse, ce qui justifie encore une fois l'assimilation de m_0 à la masse au repos et de λ_σ à la quantité de mouvement.

Les composantes de $m_{\mu\nu}$ sont constantes celles de $S_{\mu\nu}$, nulles en vertu de (36).

Le cas harmonique décrit donc bien une particule classique. Inversement, si le spin est constant ou nul et que simultanément on ait $\Omega_2 = 0$, on aura affaire à une particule classique. En effet, on a alors $m_{\mu\nu} = \text{const.}$ donc, d'après (23), λ_μ proportionnel à u_μ. Comme en général [*voir* (3)]

$$u^\rho m_{\rho\nu} = -\Omega_2 w_\nu = 0,$$

on en déduit $\lambda^\rho m_{\rho\nu} = 0$, donc d'après (19), $\frac{du_\nu}{d\tau} = 0$; la particule se meut donc à vitesse constante.

Le cas de la particule classique, c'est-à-dire celui pour lequel le mouvement a lieu conformément au *principe d'inertie* n'est donc qu'un cas particulier du mouvement libre. Dans le cas général, ce principe n'est plus valable sous sa forme classique, mais il est aisé de voir par quoi il est remplacé.

Remarquons enfin que le spin apparaîtra lorsqu'on passe du cas harmonique au cas général, c'est-à-dire *lorsqu'on introduira dans l'expression de ξ la masse $-m_0$ en même temps que $+m_0$.* C'est là le mécanisme par lequel la relativité introduit le spin, et ce mécanisme n'a rien à voir avec l'analogie d'un corps tournant : l'essentiel n'est pas la rotation d'une masse positive, mais plutôt l'oscillation entre $+m_0$ et $-m_0$, véritable contrepartie classique du « tremblement de Schrödinger ». C'est là aussi la raison pour laquelle l'apparition du spin n'entraîne pas une augmentation de l'énergie totale par apport d'une énergie de rotation, ce qui se produirait inévitablement dans le cas d'un corps en rotation.

Le mécanisme ci-dessus est exactement celui par lequel le spin s'introduit en mécanique ondulatoire de l'électron où il a eu le succès que l'on sait (7).

14. **Particules classiques au repos.** — La manière dont les spineurs interviennent dans la théorie apparaît plus clairement lorsqu'on considère le cas d'une particule classique au repos. Dans ce cas puisque $\lambda_\rho = m_0 v_\rho$, la condition $v_k = 0$ se traduit par $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ et entraîne, soit $i\lambda = \lambda_4$, soit $i\lambda = -\lambda_4$. Pour chacun de ces deux cas, les grandeurs d'univers de la particule ne dépendent plus (au repos) que d'un seul spineur (φ_1, φ_2) ou (φ_3, φ_4). Par exemple, pour $i\lambda = \lambda_4$, on a

$$\left.\begin{aligned} i\Omega_1 = u_4 &= -4\lambda^2 i(\varphi_1^*\varphi_1 + \varphi_2^*\varphi_2);\\ m_{23} = -w_1 &= -4\lambda^2(\varphi_1^*\varphi_2 + \varphi_2^*\varphi_1),\\ m_{31} = -w_2 &= +4\lambda^2 i(\varphi_1^*\varphi_2 - \varphi_2^*\varphi_1),\\ m_{12} = -w_3 &= -4\lambda^2(\varphi_1^*\varphi_1 - \varphi_2^*\varphi_2);\\ m_{14} &= m_{24} = m_{34} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Le « spin » m_{pq} se réduit dans ce cas à ses composantes spatiales, lesquelles ont d'ailleurs la même direction que w_r.

5. **Interactions. Particules dans un champ.** — Les lois du mouvement dans un cas d'interaction donné se déduiront du lagrangien (8) augmenté d'un terme d'interaction L_{int}, fonction des ξ, ξ^+ et x^k. Pour que la théorie soit plausible il faut qu'on puisse choisir ce dernier terme de façon à retrouver les formules classiques pour des cas connus, par exemple pour le cas du mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique.

Considérons la manière dont le terme d'interaction L_{int} dépend des ξ et ξ^+. L'hypothèse la plus

(7) Hönl et Papapetrou (*loc. cit.*) ont proposé un modèle de ce type, mais l'ont traité comme un mécanisme dans l'espace-temps soumis aux lois de la mécanique classique. Dans la présente théorie, la « masse négative » apparaît comme apparaissent les « fréquences négatives » dans la théorie du rayonnement.

simple consiste évidemment à admettre une dépendance bilinéaire. On écrira donc

$$L_{\text{int}} = \xi^+ O \xi, \tag{38}$$

où O est un opérateur invariant agissant sur les ξ, fonction des x^k, indépendant des ζ, ξ^+ et tel que L_{int} = réel. Sa forme la plus générale sera donc

$$O = \sum_{\alpha=1}^{16} A_\alpha \gamma\ldots = A_0 + A_\rho \gamma^\rho + \frac{i}{2} A_{\rho\sigma}(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho) + \ldots \tag{39}$$

où $\gamma\ldots$ sont les 16 produits indépendants des γ^ρ, les A_0, A_1, ... 16 fonctions ordinaires des x^ρ, présentant les variances et les conditions de réalité requises pour rendre $\xi^+ O \xi$ invariant et réel.

Ce genre d'interaction est donc décrit par 16 fonctions ordinaires au plus. Les équations du mouvement seront dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi^+}{d\tau} &= \lambda_\rho \xi^+ \gamma^\rho - \xi^+ O, \qquad \frac{d\xi}{d\tau} = -\lambda_\rho \gamma^\rho \xi + O\xi, \\ \frac{dx^\rho}{d\tau} &= \xi^+ \gamma^\rho \xi, \qquad \frac{d\lambda_\rho}{d\tau} = \xi^+ \frac{\partial O}{\partial x_\rho} \xi. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Remarquons que $-i\xi^+\xi = \Omega_1$, reste toujours constante dans le cas général.

La variation de la *vitesse* sera donnée par

$$\frac{d}{d\tau}(\xi^+\gamma^\sigma\xi) = \frac{du^\sigma}{d\tau} = -2\lambda_\rho m^{\rho\sigma} + \xi^+(\gamma^\sigma O - O\gamma^\sigma)\xi. \tag{41}$$

La *force d'univers* se déduira en dérivant par rapport à ds la quantité de mouvement donnée par la dernière équation (40).

16. **Champ électromagnétique.** — L'interaction d'une charge e avec un champ électromagnétique $h_{\rho\sigma} = \frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\rho}$, de potentiel A_ρ, est du type précédent.

Définissons d'abord l'action du champ sur la particule en prenant

$$O = eA_\rho\gamma^\rho. \tag{42}$$

Les équations s'écriront

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -(\lambda_\rho - eA_\rho)\gamma^\rho\xi, \qquad \frac{d\xi^+}{d\tau} = \xi^+(\lambda_\rho - eA_\rho)\gamma^\rho, \\ \frac{d(\lambda_\rho - eA_\rho)}{d\tau} &= eh_{\sigma\rho}u^\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Elles se déduisent de celles d'une particule libre en y remplaçant comme d'habitude les moments λ_ρ par $\lambda_\rho - eA_\rho$. La dernière équation donne

$$\frac{d(\lambda_\rho - eA_\rho)}{ds} = eh_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{ds} = h_{\sigma\rho}ev^\sigma = h_{\rho\sigma}j^\sigma = \text{force de Lorentz}, \tag{44}$$

en appelant $j^\sigma = ev^\sigma$ le courant. Remarquons que la particule étant, par hypothèse, un point géométrique sans dimensions, le courant sera uniquement un courant de convection ev^σ. Même si cette particule possède un moment électromagnétique $M_{\mu\nu}$, la contribution $\frac{\partial M_{\mu\nu}}{\partial x^r}$ de celui-ci au courant sera nulle en raison du fait que $M_{\mu\nu}$ n'est pas étalé dans l'espace.

17. **Moment électromagnétique.** — Or, admettons que la particule chargée ayant un spin possède de ce fait un moment électromagnétique qui lui est proportionnel. Cela n'est pas évident *a priori* puisque l'assimilation à un corps tournant n'est plus valable. L'interaction considérée au paragraphe précédent conduit à la force de Lorentz qui représente la totalité de l'action du champ sur la particule, mais n'introduit aucun couplage entre le champ et le moment électromagnétique, ce qui montre qu'elle est incomplète. De nouveaux termes [8] doivent apparaître dans les expressions de la force et le couple exercés sur la particule.

Nous admettons que le moment électromagnétique est proportionnel au spin de la particule et nous ferons l'hypothèse que l'on a

$$\mu_{\rho\sigma} = \frac{c\varkappa}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \times \text{spin} \qquad (\varkappa = \text{const.}). \tag{45}$$

Le facteur multiplicatif n'est constant que lorsque $\Omega_2 = 0$ qui entraîne $u^\rho m_{\rho\sigma} = 0$, donc seulement dans *le cas où le spin n'a pas de composantes de temps dans le système au repos*, dans lequel il se réduit donc à un vecteur tridimensionnel.

Supposons également qu'on prenne égale à zéro la constante additionnelle du spin, lequel serait donc simplement égal à $\frac{1}{2}m_{\rho\sigma}$. Définissons alors l'interaction au moyen d'un opérateur

$$O = eA_\rho\gamma^\sigma - \frac{\varkappa}{4}(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho)h_{\rho\sigma}, \tag{46}$$

où A_ρ est le potentiel du champ, $h_{\rho\sigma}$ le champ correspondant et $\varkappa$ une constante convenable. On en déduit que la force de Lorentz du paragraphe précédent est augmentée du terme supplémentaire attendu. On a en effet

$$\boxed{\frac{d(\lambda_\rho - eA_\rho)}{ds} = h_{\sigma\rho}j^\sigma + \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}.} \tag{47}$$

18. **Couple.** — Les autres équations s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi^+}{d\tau} &= \xi^+(\lambda_\rho - eA_\rho)\gamma^\rho + \frac{\varkappa}{4}h_{\rho\sigma}\xi^+(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho), \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= -(\lambda_\rho - eA_\rho)\gamma^\rho\xi - \frac{\varkappa}{4}h_{\rho\sigma}(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho)\xi. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

[8] Déjà considérés sous leur forme relativiste par divers auteurs.

Avec les notations précédentes, on en déduit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{2}\, m_{\alpha\beta}\right) = (\lambda_\alpha - eA_\alpha)v\beta - (\lambda_\beta - eA\beta)v_\alpha + (\mu_{\sigma\beta}h_{\sigma\alpha} - \mu_{\sigma\alpha}h_{\sigma\beta}) \qquad (49)$$

qui fait intervenir un terme supplémentaire déjà rencontré par d'autres auteurs.

Ainsi donc, on peut retrouver les résultats de l'interaction d'un électron dans un champ électromagnétique prenant une interaction du type bilinéaire $\xi^+ O\,\xi$ avec O égal à (46) et qui s'écrit aussi

$$O = (\gamma_\rho \partial^\rho + k)(\gamma_\sigma A^\sigma), \qquad \partial_\rho = \frac{\partial}{\partial x^\rho}. \qquad (50)$$

19. Remarquons que l'opérateur ci-dessus ne contient pas de terme indépendant des γ^ρ (pas plus d'ailleurs que des termes en γ^5). L'interaction bilinéaire la plus simple est définie par

$$O = ik, \qquad (51)$$

où k est une constante réelle. Les équations sont alors

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = (-\lambda_\rho \gamma^\rho + k)\xi,$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi^+}{\mathrm{d}\tau} = \xi^+(\lambda_\rho \gamma^\rho - k), \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda_\rho}{\mathrm{d}\tau} = 0. \qquad (52)$$

Si ξ_{libre} est la solution connue du cas de la particule libre $k = 0$ étudiée auparavant, la solution de (52) s'écrira

$$\xi = \mathrm{e}^{ik\tau}\xi_{\text{libre}}. \qquad (53)$$

Ce genre d'interaction à laquelle nous avons déjà fait allusion au paragraphe 8 n'agit que sur les ξ et n'affecte pas les grandeurs réelles mesurées dans l'espace-temps.

Plus compliquée apparaît le cas (51) avec un k fonction des x^ρ.

Enfin, nous n'avons considéré jusqu'à présent que des termes d'interaction bilinéaires en ξ et ξ^+. Il est clair que d'autres cas sont possibles et la forme de L_{int} en fonction des ξ et ξ^+ permettra ainsi d'établir un critère de classement des interactions par ordre de complication croissante. On obtiendra ainsi en particulier des mécaniques classiques non linéaires qui ne seront peut-être pas dépourvues d'intérêt.

Manuscrit reçu le 8 septembre 1953.