# Propagation des ondes électromagnétiques planes dans un plasma homogène ( ionosphère )

Raymond Jancel, Théo Kahan

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 15, JANVIER 1954, PAGE 26.

# PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PLANES DANS UN PLASMA HOMOGÈNE (IONOSPHÈRE)

Par RAYMOND JANCEL et THÉO KAHAN,
Institut Henri Poincaré, Sorbonne.

**Sommaire.** — En s'appuyant sur des résultats antérieurs [1], les auteurs étudient la propagation des ondes dans un milieu ionisé tel que l'ionosphère homogène, en présence d'un champ magnétique constant, en particulier l'indice de réfraction, la biréfringence, la vitesse de phase et de groupe, l'affaiblissement, la polarisation des ondes, les fréquences limites, etc. à la lumière des diverses approximations admises au cours des calculs. Confrontation avec les théories classiques (Appleton, Hartree, etc.), discussion des approximations et de la validité des formules habituelles relatives à l'ionosphère.

L'objet du présent Mémoire est l'analyse mathématique de la propagation des ondes électromagnétiques planes dans l'ionosphère supposée homogène, fondée sur la théorie magnétoionique des milieux gazeux non uniformes légèrement ionisés, établie par les auteurs dans des travaux antérieurs [1].

1. **Équations d'onde dans un gaz ionisé : ondes planes.** — Nous étudions la propagation d'ondes électromagnétiques dans un gaz ionisé dont la perméabilité magnétique est supposée égale à celle du vide (et dont nous préciserons plus loin les propriétés diélectriques). Si l'on désigne alors par $\mathbf{I}$ la densité de courant, correspondant au déplacement des charges électriques du milieu sous l'action du champ électromagnétique, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{I}\right), \tag{2}$$

avec

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0.$$

(Dans ces équations, on emploie les unités électromagnétiques pour les champs magnétiques et les unités électrostatiques pour les champs, courants et charges électriques.)

Posons

$$\mathbf{I} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \tag{3}$$

(où $\mathbf{P}$ désigne la polarisation électrique du milieu) et

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \tag{4}$$

L'équation (2) s'écrit alors :

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{5}$$

et, en combinant convenablement les équations (1), (4) et (5), on obtient les équations de propagation :

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}, \tag{6}$$

$$\Box\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{P}. \tag{7}$$

Pour étudier les propriétés des ondes planes monochromatiques, nous chercherons des solutions des équations (6), (7) de la forme :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\mathbf{N}\mathbf{r}}{u}\right)\right] \tag{8}$$

et nous supposerons que les vecteurs $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{P}$

sont tous de ce type. Dans cette expression, $u$ est complexe, sa partie réelle représentant la vitesse de phase de l'onde, sa partie imaginaire donnant un facteur d'atténuation des ondes. $\mathbf{N}$ est la normale au plan d'onde, $\mathbf{r}$ le rayon vecteur du point courant.

D'après (8), on voit facilement que :

$$\Delta \mathbf{U} = -\frac{\omega^2}{u^2}\mathbf{U}, \qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U} = -\frac{\omega^2}{u^2}(\mathbf{U}.\mathbf{N})\mathbf{N};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{U} = -i\frac{\omega}{u}(\mathbf{N}\wedge\mathbf{U}), \qquad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = i\omega\mathbf{U}$$

et en portant ces expressions dans les équations de propagation on obtient les équations :

$$\frac{c^2}{u^2}\mathbf{E} - \mathbf{D} - \frac{c^2}{u^2}(\mathbf{E}.\mathbf{N})\mathbf{N} = 0 \tag{9}$$

et

$$\left(\frac{c^2}{u^2} - 1\right)\mathbf{H} = \frac{4\pi c}{u}(\mathbf{N}\wedge\mathbf{P}) \tag{10}$$

qui déterminent complètement la propagation d'une onde plane, si l'on connaît la relation entre $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ qui caractérise précisément le milieu considéré. On peut cependant déduire directement de (9) et (10) certaines propriétés de l'onde plane; en effet, multiplions scalairement par $\mathbf{N}$ l'équation (9), il vient :

$$\mathbf{N}.\mathbf{D} = 0. \tag{11}$$

Le vecteur $\mathbf{D}$ est donc dans le plan d'onde. De même, si l'on multiplie (9) vectoriellement par $\mathbf{N}$, on a :

$$\left(\frac{c^2}{u^2} - 1\right)(\mathbf{N}\wedge\mathbf{E}) = 4\pi(\mathbf{N}\wedge\mathbf{P})$$

et, en portant dans (10), il vient :

$$\mathbf{H} = \frac{c}{u}(\mathbf{N}\wedge\mathbf{E}), \tag{12}$$

d'où l'on déduit que $\mathbf{H}$ est dans le plan d'onde et est perpendiculaire à $\mathbf{E}$.

D'autre part, on obtient également $\left(\text{en remarquant que } \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{i\omega}{u}(\mathbf{H}\wedge\mathbf{N}) \text{ et que } \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{D}\right)$,

$$\mathbf{D} = \frac{c}{u}(\mathbf{H}\wedge\mathbf{N}), \tag{13}$$

de sorte que $\mathbf{D}$ est perpendiculaire à $\mathbf{H}$.

Nous voyons donc que le plan d'onde est défini par les vecteurs orthogonaux $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ qui forment avec $\mathbf{N}$ un trièdre direct; le champ électrique $\mathbf{E}$ est oblique par rapport à $\mathbf{N}$, mais est situé dans le plan $(\mathbf{D}, \mathbf{N})$ d'après (12). On voit de même que le vecteur de Poynting :

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}) \tag{14}$$

est situé également dans le plan $(\mathbf{D}, \mathbf{N})$ et que l'angle $(\widehat{N, S})$ qu'il fait avec la normale est égal à l'angle $(\widehat{D, E})$.

2. **Propriétés diélectriques du milieu** [1]. — Nous considérons le milieu comme un gaz ionisé constitué de deux sortes de particules : des particules lourdes neutres ou chargées (ions) et des électrons libres de densité statistiquement uniforme $n_2$ et nous supposerons dans la suite que la contribution des ions à la conductivité du milieu est négligeable. Nous supposerons de plus la présence d'un champ magnétique constant $\mathbf{H_0}$ (champ magnétique terrestre). Les propriétés diélectriques sont déterminées par le courant moyen $\mathbf{I}$ de déplacement créé par l'onde électromagnétique et le champ $\mathbf{H_0}$ et, comme on peut toujours négliger l'action du champ magnétique oscillant de l'onde, il suffit d'évaluer les effets croisés du champ oscillant $\mathbf{E}$ et du champ constant $\mathbf{H_0}$. Dans ces conditions, nous avons vu [1] qu'un tel milieu est caractérisé par un tenseur diélectrique $\varepsilon_{\mu\nu}$ que nous écrirons ici en supposant que le champ $\mathbf{H_0}$ a pour composantes $(0, -H_0\sin\varphi, H_0\cos\varphi)$, d'où :

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 1 + 4\pi\mu\left(\frac{K_1}{\omega}\sin\omega t - K_2\cos\omega t\right),\\
&\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -4\pi\mu\omega_H\left(\frac{K'_1}{\omega}\sin\omega t + 2K'_2\cos\omega t\right)\cos\varphi,\\
&\varepsilon_{xz} = -\varepsilon_{zx} = -4\pi\mu\omega_H\left(\frac{K'_1}{\omega}\sin\omega t + 2K'_2\cos\omega t\right)\sin\varphi,\\
&\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

où $K_1$, $K_2$, $K'_1$ et $K'_2$ sont des intégrales que nous avons précédemment définies [1]. Nous avons posé également

$$\omega_H = \frac{e_2 H_0}{m_2 c} \qquad \text{et} \qquad \mu = 8\pi n_2 e_2^2.$$

Étant donnée la forme complexe adoptée pour les champs, il sera indiqué d'utiliser le tenseur $\varepsilon$ sous la forme complexe correspondante, soit :

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy} = \varepsilon'_{zz} = 1 - 4\pi\mu\left(K_2 + i\frac{K_1}{\omega}\right),\\
&\varepsilon'_{xy} = -\varepsilon'_{yx} = -4\pi\mu\omega_H\left(2K'_2 - i\frac{K'_1}{\omega}\right)\cos\varphi,\\
&\varepsilon'_{xz} = -\varepsilon'_{zy} = -4\pi\mu\omega_H\left(2K'_2 - i\frac{K'_1}{\omega}\right)\sin\varphi,\\
&\varepsilon'_{yz} = \varepsilon'_{zy} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{15'}$$

Par définition, ce tenseur établit la relation entre les vecteurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$

$$D_\mu = \sum_\mu \varepsilon_{\mu\nu} E_\nu;$$

en portant celle-ci dans l'équation (9), on peut calculer les indices de réfraction correspondant aux différents modes de propagation des ondes planes et établir ainsi la biréfringence de l'ionosphère.

3. **Indices de réfraction, atténuation, vitesses de phase et de groupe.** — Nous supposerons que le champ $\mathbf{H}_0$ fait un angle $\varphi$ avec la normale à l'onde $\mathbf{N}$, et nous prendrons celle-ci comme axe $Oz$; on peut admettre, sans diminuer la généralité que $\mathbf{H}_0$ est dans le plan $yOz$ et qu'il a pour composantes $(0, -H_0\sin\varphi, H_0\cos\varphi)$. Avec ces conventions, l'équation (9) s'écrit en utilisant (15′) :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{c^2}{u^2}E_x-\varepsilon'_{xx}E_x-\varepsilon'_{xy}E_y-\varepsilon'_{xz}E_z=0,\\ &-\varepsilon'_{yx}E_x+\frac{c^2}{u^2}E_y-\varepsilon'_{yy}E_y=0,\\ &-\varepsilon'_{zx}E_x\qquad\qquad -\varepsilon'_{zz}E_z=0.\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Nous avons un système homogène et linéaire en $E_x$, $E_y$, $E_z$ qui n'a des solutions que si son déterminant est nul, soit :

$$D=\begin{vmatrix}\dfrac{c^2}{u^2}-\varepsilon'_{xx} & -\varepsilon'_{xy} & -\varepsilon'_{xz}\\ -\varepsilon'_{yx} & \dfrac{c^2}{u^2}-\varepsilon'_{yy} & 0\\ -\varepsilon'_{zx} & 0 & -\varepsilon'_{zz}\end{vmatrix}=0.\qquad(17)$$

On obtient, en développant ce déterminant, une équation bicarrée en $\frac{c}{u}$ qui s'écrit :

$$\varepsilon'_{xx}\frac{c^4}{u^4}-(2\varepsilon'^2_{xx}+\varepsilon'^2_{xz})\frac{c^2}{u^2}+\varepsilon'_{xx}\Delta=0,\qquad(17')$$

où l'on a posé :

$$\Delta=\varepsilon'^2_{xx}+\varepsilon'^2_{xy}+\varepsilon'^2_{xz}.$$

L'équation (17′) admet deux solutions en $Y=\frac{c^2}{u^2}$ qui sont définies par :

$$\left.\begin{matrix}Y_1\\Y_2\end{matrix}\right\}=\frac{2\varepsilon'^2_{xx}+\varepsilon'^2_{xz}\pm\sqrt{\varepsilon'^4_{xz}-4\varepsilon'^2_{xx}\varepsilon'^2_{xy}}}{2\varepsilon'_{xx}}.\qquad(18)$$

Le système (16) a donc deux solutions correspondant respectivement aux signes + et — du 2<sup></sup>e membre de (18), ce qui met en évidence la biréfringence de l'ionosphère. (Remarquons qu'à chaque valeur de (18) correspondent deux solutions en $\frac{c}{u}$, mais ces deux déterminations impliquent seulement l'inversion du sens de la propagation le long de $\mathbf{N}$; nous prendrons toujours dans la suite le signe +).

La grandeur $\frac{c}{u}$ représente l'indice de réfraction complexe et l'on détermine l'indice réel $n$ et le facteur d'absorption $k'$, en posant :

$$Y=\frac{c^2}{u^2}=(n-ik'^2)=L-iM,\qquad(19)$$

d'où l'on tire :

$$\left.\begin{aligned} n&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{L+\sqrt{L^2+M^2}},\\ k'&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-L+\sqrt{L^2+M^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

et la vitesse de phase $V$ et le coefficient d'atténuation $\beta$ sont donnés par :

$$V=\frac{c}{n},\qquad \beta=\frac{\omega k'}{c}.\qquad(21)$$

Ces grandeurs se calculent donc directement en fonction des quantités $K_1$, $K_2$, $K'_1$ et $K'_2$ données par les équations (15′). La vitesse de groupe des ondes $u$ se calculera de même en utilisant la relation bien connue :

$$\frac{1}{u}=\frac{\mathrm{d}(n\omega)}{c\,\mathrm{d}\omega}=\frac{1}{cn}\left[n^2+\frac{\omega}{2}\frac{\mathrm{d}(n^2)}{\mathrm{d}\omega}\right].\qquad(22)$$

Un cas particulier des équations (20), important pour les applications, est celui où $M \ll L$, car on peut alors écrire :

$$n\simeq\sqrt{L},\qquad k'\simeq\frac{M}{2\sqrt{L}}.\qquad(20')$$

Il sera commode pour les applications de faire apparaître dans (18) l'angle $\varphi$; à cet effet nous poserons en accord avec (15′) :

$$\varepsilon'_{xx}=\varepsilon'_{yy}=\varepsilon'_{zz}=\varepsilon_{\mathrm{I}}$$

et

$$\varepsilon'_{xy}=\varepsilon_{\mathrm{II}}\cos\varphi,\qquad \varepsilon'_{xz}=\varepsilon_{\mathrm{II}}\sin\varphi$$

de sorte que (18) s'écrira :

$$\left.\begin{matrix}Y_1\\Y_2\end{matrix}\right\}=\frac{2\varepsilon_{\mathrm{I}}^2+\varepsilon_{\mathrm{II}}^2\sin^2\varphi\pm\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{II}}^4\sin^4\varphi-4\varepsilon_{\mathrm{I}}^2\varepsilon_{\mathrm{II}}^2\cos^2\varphi}}{2\varepsilon_{\mathrm{I}}}.\qquad(18')$$

Nous étudierons les deux cas particuliers bien connus de la propagation le long du champ magnétique terrestre et perpendiculaire à ce champ.

*a. Propagation longitudinale.* — On a dans ce cas $\varphi=0$, d'où les deux solutions :

$$Y_{1l}=\varepsilon_{\mathrm{I}}+i\varepsilon_{\mathrm{II}},\qquad Y_{2l}=\varepsilon_{\mathrm{I}}-i\varepsilon_{\mathrm{II}}.\qquad(23)$$

Nous verrons que $Y_{1l}$ représente l'onde extraordinaire et $Y_{2l}$ l'onde ordinaire.

*b. Propagation transversale.* — On a alors $\varphi=\frac{\pi}{2}$, d'où :

$$Y_{1t}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}^2+\varepsilon_{\mathrm{II}}^2}{\varepsilon_{\mathrm{I}}},\qquad Y_{2t}=\varepsilon_{\mathrm{I}},\qquad(24)$$

où $Y_{1l}$ est le rayon extraordinaire et $Y_{2l}$ le rayon ordinaire.

4. **Polarisation des ondes.** — Pour étudier la polarisation des ondes, il suffit de résoudre les équations (16) pour les valeurs de $Y$ données par (18) et d'évaluer le rapport des composantes du champ électrique dans un plan perpendiculaire à **N**, c'est-à-dire, avec nos notations, de calculer $\frac{E_y}{E_x}$. Remarquons d'ailleurs que d'après (12) et (13), nous avons dans notre système d'axes :

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \frac{c}{u} H_y = \frac{c^2}{u^2} E_x, \\ D_y &= -\frac{c}{u} H_x = \frac{c^2}{u^2} E_y, \\ D_z &= H_z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

de sorte que le rapport $\frac{E_y}{E_x}$ peut aussi s'écrire :

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{D_y}{D_x} = -\frac{H_x}{H_y}. \tag{26}$$

D'après la 2<sup>e</sup> équation du système (16), il vient :

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\varepsilon'_{xy}}{\varepsilon'_{yy} - \frac{c^2}{u^2}} = \frac{\varepsilon_{\text{II}} \cos\varphi}{\varepsilon_{\text{I}} - \frac{c^2}{u^2}}. \tag{27}$$

Le 2<sup>e</sup> membre de (27) est en général un nombre complexe qui détermine d'une part le rapport des modules de $E_y$ et $E_x$ et, d'autre part, leur différence de phase : l'extrémité du vecteur **D** (ou encore la projection de **E** sur $xOy$) décrit donc une ellipse dont le sens de parcours est donné par le signe du déphasage entre $E_y$ et $E_x$.

Naturellement à chaque direction de propagation correspondent deux valeurs du rapport $\frac{E_y}{E_x}$, données par $Y_1$ et $Y_2$ : pour chacune de ces valeurs, nous avons une ellipse dans le cas général, et il est facile de montrer que celles-ci sont parcourues en sens inverse. Posons en effet :

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_1} = \frac{\varepsilon'_{xy}}{\varepsilon'_{xx} - Y_1}, \qquad \left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_2} = \frac{\varepsilon'_{xy}}{\varepsilon'_{xx} - Y_2}.$$

En multipliant membre à membre ces deux équations, il vient :

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_2} = \frac{\varepsilon'^2_{xy}}{(\varepsilon'_{xx} - Y_1)(\varepsilon'_{xx} - Y_2)} = \frac{\varepsilon'^2_{xy}}{\varepsilon'^2_{xx} - \varepsilon'_{xx}(Y_1 + Y_2) + Y_1 Y_2}$$

et, comme d'après (17′) :

$$Y_1 + Y_2 = \frac{2\varepsilon'^2_{xx} + \varepsilon'^2_{xz}}{\varepsilon'_{xx}}, \qquad Y_1 Y_2 = \Delta,$$

il vient :

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_2} = \frac{\varepsilon'^2_{xy}}{\varepsilon^2_{xx} - (2\varepsilon'^2_{xx} + \varepsilon'^2_{xy}) + \Delta} = 1. \tag{28}$$

Les différences de phase entre $E_y$ et $E_x$ correspondant aux deux rapports sont donc de signes contraires et de sens de parcours inversés.

Nous appliquerons maintenant ces résultats aux cas particuliers des propagations longitudinales et transversales.

*a. Propagation longitudinale.* — On vérifie immédiatement en utilisant (23) et (27) et en posant $\varphi = 0$, que :

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_{1l}} = i, \qquad \left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_{2l}} = -i. \tag{29}$$

On obtient également à partir de (16), $E_z = 0$, de sorte que le champ électrique **E** est transversal. D'après (29), nous voyons que les ondes sont, dans ce cas, polarisées circulairement : à $Y_{1l}$ correspond une onde dextrorsum et l'on retrouve bien le rayon extraordinaire de la théorie habituelle [2] (nous vérifierons aussi au prochain chapitre que l'indice de réfraction, moyennant certaines approximations, est donné par les formules classiques); on a de même pour $Y_{2l}$ une onde sinistrorsum qui définit le rayon ordinaire.

Étant donnée l'importance de ces cas particuliers, il peut être utile d'étendre les résultats précédents au cas où l'angle $\varphi$ est petit. En posant $\sin\varphi \sim \varphi$ et $\cos\varphi \sim 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, on a d'après (18′) en négligeant les termes en $\varphi^4$ :

$$\left.\begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \end{matrix}\right\} \# \frac{2\varepsilon_{\text{I}}^2 + \varepsilon_{\text{II}}^2\varphi^2 \pm 2i\varepsilon_{\text{I}}\varepsilon_{\text{II}}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)}{2\varepsilon_{\text{I}}},$$

d'où :

$$\left.\begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \end{matrix}\right\} \# (\varepsilon_{\text{I}} \pm i\varepsilon_{\text{II}})\left[1 \pm \frac{\varphi^2}{2i}\,\frac{\varepsilon_{\text{II}}}{\varepsilon_{\text{I}}}\right]. \tag{30}$$

On a de même pour le rapport $\frac{E_y}{E_x}$, d'après (30) :

$$\frac{E_y}{E_x} \# \frac{\varepsilon_{\text{II}}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)}{\varepsilon_{\text{I}} - (\varepsilon_{\text{I}} \pm i\varepsilon_{\text{II}})\left(1 \pm \frac{\varphi^2}{2i}\,\frac{\varepsilon_{\text{II}}}{\varepsilon_{\text{I}}}\right)},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{E_y}{E_x} \# \pm i\left[1 - \frac{\varphi^2}{2}\left(1 \pm \frac{\varepsilon_{\text{II}}}{i\varepsilon_{\text{I}}}\right)\right]. \tag{30′}$$

*b. Propagation transversale.* — On trouve à partir de (24) et (27) les relations suivantes pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ :

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_{1t}} = \left(\frac{E_x}{E_y}\right)_{Y_{2t}} = 0 \tag{31}$$

qui nous montrent que, pour les deux indices, les ondes sont linéairement polarisées.

A $Y_{1t}$ correspond le rayon extraordinaire; d'après (16) et (31), on voit tout de suite que $E_y = 0$ et que $E_x$ et $E_z$ sont $\neq 0$ : le champ électrique $\mathbf{E}$ est donc perpendiculaire au champ magnétique constant $\mathbf{H}_0$ et sa composante dans le plan d'onde est dirigée selon O$x$; mais il a aussi une composante longitudinale donnée par :

$$E_z = \frac{\varepsilon'_{xz}}{\varepsilon'_{zz}} E_x = \frac{\varepsilon_{\mathrm{II}}}{\varepsilon_{\mathrm{I}}} E_x.$$

Il en résulte que le vecteur électrique décrit une ellipse dans le plan $x$O$z$, perpendiculaire à $H_0$. Pour $Y_{2t}$, nous avons immédiatement $E_x = E_z = 0$; le champ électrique est dirigé selon O$y$; il est donc transversal et de plus parallèle au champ magnétique $H_0$; c'est le rayon ordinaire. Nous donnerons aussi les approximations pour le cas où $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ est petit; nous aurons

$$\sin\varphi = \cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}, \qquad \cos\varphi = \sin\theta \sim 0$$

et en négligeant, comme précédemment, les termes en $\theta^4$ :

$$\left.\begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \end{matrix}\right\} \# \frac{2\varepsilon_{\mathrm{I}}^2 + \varepsilon_{\mathrm{II}}^2(1-\theta^2)\left[1 \pm \left(1 - \frac{2\varepsilon_{\mathrm{I}}^2}{\varepsilon_{\mathrm{II}}^2}\theta^2\right)\right]}{2\varepsilon_{\mathrm{I}}},$$

d'où

$$Y_1 \# \frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}^2 + \varepsilon_{\mathrm{II}}^2}{\varepsilon_{\mathrm{I}}}(1-\theta^2) \qquad \text{et} \qquad Y_2 \# \varepsilon_{\mathrm{I}}(1+\theta^2) \quad (32)$$

Le rapport $\frac{E_y}{E_x}$ s'écrit avec (32) :

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{Y_1} = \left(\frac{E_x}{E_y}\right)_{Y_2} \# - \frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}}{\varepsilon_{\mathrm{II}}}\theta. \quad (32')$$

5. **Approximations, fréquences limites et ondes courtes.** — Nous allons montrer qu'en effectuant certaines approximations sur les intégrales $K_1$, $K_2$, $K'_1$ et $K'_2$, dont nous discuterons la légitimité, on peut retrouver les résultats habituels, notamment pour les fréquences critiques; ce qui établira en même temps le domaine de validité des formules classiques.

Nous admettrons d'abord dans tous les calculs qui vont suivre que le terme en $\Gamma_2^2$ (qui intervient dans les intégrales $K$ [1]) est négligeable, ce qui conduit à supposer que le champ électrique de l'onde incidente $\mathbf{E}$ est toujours faible : ceci étant toujours le cas pour les ondes radioélectriques se propageant dans l'ionosphère, nous n'aurons pas ici à nous occuper des corrections en $\Gamma_2^2$. Il en résulte [1] que la fonction de distribution $f_2^{(0)}$ des vitesses de électrons est maxwellienne.

Ceci étant posé, nous allons d'abord considérer le cas où il n'y a pas de champ magnétique et discuter la validité des approximations; puis nous étendrons la méthode au cas général de la propagation en présence d'un champ magnétique constant.

1° *Cas où* $H_0 = 0$. — On a alors

$$\omega_H = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon_{\mathrm{II}} = 0;$$

la biréfringence disparaît et l'indice complexe est fourni dans tous les cas par :

$$\frac{c}{u} = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{I}}},$$

et, d'après (15'), $\varepsilon_{\mathrm{I}}$ est déterminé par les intégrales $K_1$ et $K_2$. L'approximation que nous ferons consistera à négliger $\frac{v_2^2}{\lambda^2}$ devant $\omega^2$ dans le calcul des intégrales qui définissent $\varepsilon_{\mathrm{I}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{II}}$. D'après des résultats antérieurs [1], nous avons en vertu de notre première hypothèse :

$$K_2 = \int_0^\infty \lambda \frac{1-z}{1+z} v_2^4 f_2^{(0)} \left[\frac{1}{6kTA + \Gamma_2^2 m_1 \lambda}\right] \mathrm{d}v_2$$
$$\# \frac{1}{6kT}\int_0^\infty \frac{\lambda}{A}\,\frac{1-z}{1+z} f_2^{(0)} v_2^4\,\mathrm{d}v_2 \quad (33)$$

et

$$K_1 = \int_0^\infty v_2^5 f_2^{(0)} \left[\frac{1}{6kTA + \Gamma_2^2 m_1 \lambda}\right] \mathrm{d}v_2$$
$$\# \frac{1}{6kT}\int_0^\infty \frac{v_2^5}{A} f_2^{(0)}\,\mathrm{d}v_2, \quad (34)$$

où l'on a (dans le système d'unités employé) :

$$z = \frac{e_2^2 H_0^2 \lambda^2}{m_2^2 c^2(\lambda^2\omega^2 + v_2^2)} = \frac{\omega_H^2\lambda^2}{\lambda^2\omega^2 + v_2^2}$$

et

$$A = \frac{\lambda^2\omega^2(1-z)^2 + v_2^2(1+z)^2}{\lambda(1+z)}.$$

Dans le cas présent, $z = 0$ et, en appliquant notre deuxième hypothèse, on a :

$$A = \frac{\lambda^2\omega^2 + v_2^2}{\lambda} = \lambda\left(\omega^2 + \frac{v_2^2}{\lambda^2}\right) \# \lambda\omega^2,$$

d'où :

$$K_2 \# \frac{1}{6kT\omega^2}\int_0^\infty f_2^{(0)} v_2^4\,\mathrm{d}v_2 = \frac{\overline{v_2^2}}{24\pi kT\omega^2} = \frac{1}{8\pi m_2\omega^2}$$

et, de même,

$$K_1 \# \frac{1}{6kT\lambda\omega^2}\int_0^\infty f_2^{(0)} v_2^5\,\mathrm{d}v_2 = \frac{\overline{v_2^3}}{24\pi kT\lambda\omega^2}$$
$$= \frac{1}{3\pi m_2\lambda\omega^2}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons considéré dans ce calcul $\lambda$ comme indépendant de $v_2$.

D'après (15') et (19), on a pour les parties réelle et imaginaire, $L$ et $M$, de $\frac{c^2}{u^2}$ :

$$L = 1 - 4\pi\mu K_2 = 1 - \frac{4\pi n_2 e_2^2}{m_2\omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2},$$

$$M = 4\pi\mu\frac{K_1}{\omega} = \frac{32\pi n_2 e_2^2}{3 m_2\lambda\omega^3}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{8\Omega^2}{3\lambda\omega^3}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

où l'on a posé :

$$\Omega^2 = \frac{4\pi n_2 e_2^2}{m_2}.$$

Si $\omega$ est suffisamment grand devant $\Omega$, on voit immédiatement que $M \ll L$ et que les formules (20') s'appliquent; l'indice de réfraction est donné par :

$$n = \sqrt{L} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \tag{35}$$

et le coefficient d'absorption :

$$k' = \frac{M}{2\sqrt{L}} = \frac{\frac{4\Omega^2}{3\lambda\omega^3}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}}. \tag{36}$$

La fréquence limite est la valeur de $\omega$ qui annule $n$, soit évidemment : $\omega_c = \Omega$; on constate d'ailleurs que pour cette valeur le coefficient d'absorption devient infini. Pour une fréquence voisine de la fréquence limite, l'application des formules (20') n'est plus légitime et il faut utiliser les formules générales (20).

Remarquons encore que $\sqrt{T}$ figure au numérateur de $k'$, de sorte que ce coefficient est proportionnel à la racine carrée de la température absolue du gaz ionisé. Aux températures usuelles de l'ionosphère, ce terme est petit devant $\omega$, de sorte que l'application de (20') reste légitime.

Ce résultat a été obtenu grâce à l'hypothèse $\frac{v_2^2}{\lambda^2} \ll \omega^2$ que nous allons maintenant discuter. Celle-ci n'est pas rigoureusement valable puisque le rapport $\frac{v_2}{\lambda}$ dépend en général de $v_2$ et que la distribution des vitesses des électrons permet d'attribuer à $v_2$ des valeurs quelconques; il nous faut donc supposer que l'on peut, sans erreur appréciable, remplacer $\frac{v_2}{\lambda}$ par sa valeur moyenne, c'est-à-dire par la fréquence de collision $\nu = \frac{\overline{v_2}}{\lambda}$. Ceci étant admis, l'hypothèse que nous avons faite revient à supposer que la fréquence des collisions (entre électrons et ions ou molécules) est négligeable devant la fréquence des ondes, soit :

$$\nu \ll \omega. \tag{37}$$

Dans le cas de l'ionosphère, on peut justifier cette approximation pour les couches $F$ où la fréquence de chocs [2] varie entre 10 et $10^3$ (chocs/s) et pour la couche $E$ ($10^4$ à $10^5$). Par contre, elle n'est plus valable pour la couche $D$, où cette fréquence atteint $10^6$ à $10^8$ et n'est plus négligeable même pour des ondes courtes. Dans ce cas une étude rigoureuse des intégrales $K_1$ et $K_2$ devient nécessaire et l'on remarquera que leur valeur exacte dépend de la loi d'interaction entre électrons et molécules par l'intermédiaire de la grandeur $\lambda(v_2)$.

2° *Cas où $H_0 \neq 0$.* — Nous devons calculer les quantités $\varepsilon_{\mathrm{I}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ et nous utiliserons comme précédemment l'hypothèse (37). Nous avons d'abord :

$$z = \frac{\omega_H^2}{\omega^2 + \frac{v_2^2}{\lambda^2}} \# \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$$

et

$$A = \lambda\frac{\omega^2(1-z)^2 + \frac{v_2^2}{\lambda^2}(1+z)^2}{(1+z)} \# \frac{\lambda\omega^2(1-z)^2}{1+z}.$$

Les formules (33) et (34) donnent alors :

$$K_2 \# \frac{1}{6kT}\int_0^\infty \lambda\frac{1-z}{1+z}v_2^4 f_2^{(0)}\frac{dv_2}{\frac{\lambda\omega^2(1-z)^2}{1+z}}$$

$$= \frac{\overline{v_2^2}}{24\pi kT\omega^2(1-z)} = \frac{1}{8\pi m_2(\omega^2 - \omega_H^2)}, \tag{37}$$

$$K_1 \# \frac{1}{6kT}\int_0^\infty \frac{v_2^5}{\lambda}\frac{1+z}{\omega^2(1-z)^2}f_2^{(0)}\,dv_2$$

$$= \frac{1+z}{24\pi kT\lambda\omega^2(1-z)^2}\overline{v_2^3}$$

$$= \frac{\omega^2 + \omega_H^2}{(\omega^2 - \omega_H^2)^2}\frac{1}{3\pi m_2\lambda}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

On a de même :

$$K_1' \# \int_0^\infty \frac{\lambda^3 f_2^{(0)}}{\lambda^2\left(\omega^2 + \frac{v_2^2}{\lambda^2}\right)} \times \left(\frac{1+z}{6kT\lambda\omega^2(1-z)^2}\right)\left(\omega^2\frac{1-z}{1+z} - \frac{v_2^2}{\lambda^2}\right)v_2^4\,dv_2$$

$$\# \frac{1}{6kT\omega^2(1-z)}\int_0^\infty f_2^{(0)}v_2^4\,dv_2$$

$$= \frac{1}{8\pi m_2(\omega^2 - \omega_H^2)}, \tag{37'}$$

$$K_2' \# \int_0^\infty \frac{\lambda^2 f_2^{(0)}}{\lambda^2\left(\omega^2 + \frac{v_2^2}{\lambda^2}\right)}\frac{v_2^5}{(1+z)}\frac{(1+z)\,dv_2}{[6kT\lambda\omega^2(1-z)^2]}$$

$$\# \frac{1}{\omega^4(1-z)^2}\frac{\overline{v_2^3}}{24\pi kT\lambda}$$

$$= \frac{1}{3\pi m_2\lambda(\omega^2 - \omega_H^2)^2}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{38'}$$

Les quantités $\varepsilon_{\mathrm{I}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ se calculent facilement à partir des formules précédentes et de (15'). Nous appliquerons ces résultats aux cas particuliers déjà étudiés :

*a. Propagation longitudinale.* — Nous avons pour le rayon extraordinaire :

$$Y_{1l} = \varepsilon_{\mathrm{I}} + i\varepsilon_{\mathrm{II}} = 1 - 4\pi\mu\left(K_2 + \frac{\omega_H}{\omega}K'_1\right) - i4\pi\mu\left(\frac{K_1}{\omega} + 2\omega_H K'_2\right),$$

d'où, en introduisant $\Omega^2$ :

$$L_1 = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2}\left(1 + \frac{\omega_H}{\omega}\right) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega - \omega_H)}, \qquad (39_1)$$

$$M_1 = \frac{8\Omega^2}{3\lambda(\omega^2 - \omega_H^2)^2}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega^2 + \omega_H^2}{\omega} + 2\omega_H\right) = \frac{8\Omega^2}{3\lambda\omega(\omega - \omega_H)^2}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (40_1)$$

Si $\omega$ est suffisamment grand devant la gyrofréquence, on voit facilement que $M_1 \ll L_1$, de sorte que l'indice de réfraction est donné par :

$$n_{1l} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega - \omega_H)}} \qquad (41)$$

et l'absorption par :

$$k'_1 = \frac{M_1}{2\sqrt{L_1}}.$$

On a de même pour le rayon ordinaire :

$$Y_{2l} = \varepsilon_{\mathrm{I}} - i\varepsilon_{\mathrm{II}} = 1 - 4\pi\mu\left(K_2 - \frac{\omega_H}{\omega}K'_1\right) - i4\pi\mu\left(\frac{K_1}{\omega} - 2\omega_H K'_2\right),$$

d'où :

$$L_2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega + \omega_H)}, \qquad (39_2)$$

$$M_2 = \frac{8\Omega^2}{3\lambda\omega(\omega + \omega_H)^2}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (40_2)$$

Si l'approximation (20′) est valable pour le rayon extraordinaire, elle le sera *a fortiori* pour le rayon ordinaire, d'où :

$$n_{2l} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega + \omega_H)}} \qquad (42)$$

et

$$k'_2 = \frac{M_2}{2\sqrt{L_2}}.$$

Les formules (41) et (42) correspondent bien aux formules habituelles donnant l'indice de réfraction des rayons extraordinaire et ordinaire pour la propagation longitudinale. En particulier, les fréquences limites sont :

$$\left.\begin{aligned} \omega_{1c} &= \frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\Omega^2 + \frac{\omega_H^2}{4}}, \\ \omega_{2c} &= -\frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\Omega^2 + \frac{\omega_H^2}{4}}, \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Les mêmes remarques que celles du 1° sont valables pour le coefficient d'absorption, la validité des formules (20′) et la présence d'un terme en $\sqrt{T}$ dans $k'$.

*b. Propagation transversale.* — Le rayon extraordinaire est donné par :

$$Y_{1t} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}^2 + \varepsilon_{\mathrm{II}}^2}{\varepsilon_{\mathrm{I}}}.$$

Nous calculerons seulement la partie réelle de cette expression, soit :

$$L = 1 - 4\pi\mu K_2 + \frac{(1 - 4\pi\mu K_2)\times 16\pi^2\mu^2\omega_H^2\left(4K_2'^2 - \frac{K_1'^2}{\omega^2}\right)}{(1 - 4\pi\mu K_2)^2 + 16\pi^2\mu^2\frac{K_1^2}{\omega^2}} + \text{termes en } \frac{K_1 K'_1 K'_2}{\omega^2|\varepsilon_{\mathrm{I}}|^2}.$$

Avec les hypothèses faites précédemment, on peut voir aisément que le 3e terme de l'expression précédente est négligeable, ainsi que les termes en $K_2'^2$ et $\frac{K_1^2}{\omega^2}$. En appliquant les formules (37) et (37′), il vient :

$$L = \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_H^2}{\omega^2}\frac{\Omega^4}{(\omega^2 - \omega_H^2 - \Omega^2)^2}\right) = 1 - \frac{\Omega^2(\omega^2 - \Omega^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2 - \Omega^2)}.$$

On peut aussi montrer que pour $\omega$ assez grand, $M \ll L$, de sorte que l'indice de réfraction du rayon extraordinaire est :

$$n_{1t} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2(\omega^2 - \Omega^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2 - \Omega^2)}}, \qquad (44)$$

ce qui correspond bien à l'expression habituelle.

Pour le rayon ordinaire, on a :

$$Y_{2t} = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{I}}},$$

de sorte que $L$ et $M$ s'écrivent dans ce cas :

$$L = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \qquad M = \frac{8\Omega^2(\omega^2 + \omega_H^2)}{3\lambda\omega(\omega^2 - \omega_H^2)^2}\left(\frac{2kT}{\pi m_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où l'on déduit immédiatement, pour $\omega$ assez grand, le coefficient d'absorption et l'indice $n_{2t}$ de l'onde ordinaire transversale :

$$n_{2t} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2}}. \qquad (45)$$

Remarquons que, dans ce cas particulier, notre approximation donne un résultat différent de la formule classique $\left(n_{2t} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}\right)$, la différence provenant du tenseur diélectrique où, d'après (15'), $\varepsilon'_{zz}$ est égal à $\varepsilon'_{xx}$ et $\varepsilon'_{yy}$, ce qui n'est pas le cas dans le tenseur de la théorie classique.

3° *Cas des ondes courtes.* — On obtient immédiatement les formules valables pour les ondes courtes en développant les formules (41), (42), (44) et (45) par rapport à $\frac{\omega_H}{\omega}$ et en négligeant les termes en $\frac{\omega_H^2}{\omega^2}$, d'où l'on tire les formules connues :

$$n'_{1t} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{\omega_H}{\omega}\right)}, \tag{41'}$$

$$n'_{2t} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{\omega_H}{\omega}\right)}, \tag{42'}$$

$$n'_{1t} = n'_{2t} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}. \tag{44'}$$

**Conclusion.** — L'étude précédente nous a permis de déterminer les modes de propagation des ondes électromagnétiques dans une ionosphère homogène définie par les relations (15'). Nous avons établi une formule générale (18') qui est l'expression correcte, (à l'approximation au 1er ordre de l'équation de Boltzmann [1]), de la formule d'Appleton et de Hartree [3] et qui permet d'analyser rigoureusement la structure des ondes électromagnétiques transmises à partir des grandeurs $K$ qui définissent le milieu.

Les formules classiques ont bien été retrouvées et en même temps nous avons pu préciser la nature des approximations, à savoir que la fréquence des chocs est négligeable devant la fréquence des ondes; plus précisément nous avons vu que cette approximation n'était elle-même valable qu'à condition de négliger la distribution des vitesses pour le rapport $\frac{v_2^2}{\lambda^2}$. Il est légitime de supposer qu'un calcul rigoureux modifierait sensiblement les résultats quantitatifs sans en altérer l'interprétation qualitative globale, surtout pour les ondes courtes. Nous avons, par contre, remarqué que ces approximations perdaient tout leur sens dans la couche D de l'ionosphère, même pour des ondes courtes, ce qui offre un champ d'applications intéressant. Notons encore qu'un calcul rigoureux des expressions $K$ ferait intervenir implicitement la loi d'interaction entre électrons et molécules (ou atomes ionisés) par l'intermédiaire de $\lambda(v_2)$; enfin les formules précédentes sont évidemment applicables à des milieux ionisés différents où les conditions présentes dans l'ionosphère ne sont pas réalisées.

Les conclusions précédentes ne sont valables que pour une ionosphère homogène, ou localement dans une ionosphère non homogène : les conditions de réflexion et de réfraction dans ce dernier cas seront précisées dans un travail en cours.

Nous remarquerons, d'autre part, que les équations (15') ne sont valables que pour des gaz faiblement ionisés (de sorte que l'on peut négliger l'effet des chocs entre électrons par rapport à celui des chocs électrons-molécules). De plus, nous avons supposé que, pour des champs électriques faibles, la distribution des vitesses électroniques était maxwellienne avec une « température électronique » égale à la température du gaz. En réalité, ceci n'est probablement pas valable pour les couches ionosphériques $E$ et $F$, car il convient de tenir compte de l'action des chocs inélastiques et des phénomènes d'ionisation et de recombinaison; il en résulte que l'énergie moyenne des électrons peut être très supérieure à l'énergie moyenne des molécules ou atomes et la répartition n'être pas maxwellienne, bien que le champ **E** de l'onde radioélectrique soit négligeable; on peut même avoir une répartition maxwellienne mais avec une « température électronique » nettement supérieure à la température ambiante. Tous ces phénomènes peuvent intervenir pour modifier sensiblement les résultats du présent travail et nécessitent une étude approfondie de la structure fine de l'ionosphère.

Manuscrit reçu le 1er juillet 1953.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] JANCEL R. et KAHAN T. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **236**, 788, 1478 et 2045; *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 533.

[2] MIMNO. — *Rev. Mod. Physics*, 1937, **9**, 1.
JOUAUST R. — L'Ionosphère, Paris, 1946.
WAGNER. — Lehre von den Schwingungen und Wellen, 1947.
RAWER K. — Die Ionosphäre, Hollande, 1953.

[3] APPLETON E. V. — *J. Inst. Electr. Eng.*, 1932, **71**, 642.
HARTREE D. R. — *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1931, **27**, 143.