FORMULE DE CORRECTION POUR LE COMPTAGE DES TRAJECTOIRES DANS LES ÉMULSIONS NUCLÉAIRES

Par A. HERPIN et C. MERCIER,

Centre d'Études nucléaires (Saclay),
Service de Physique mathématique.

Sommaire. — Des formules sont données dans tous les cas possibles pour passer d'un certain comptage de trajectoires dans une émulsion nucléaire à la densité réelle de réactions.

1. Position du problème. — Une réaction nucléaire donnant deux particules dont les trajectoires colinéaires ont les longueurs a et b se produit à l'intérieur d'une émulsion nucléaire d'épaisseur e . Cette émulsion est examinée à l'aide d'un microscope de champ circulaire de diamètre $2R$. Un procédé de comptage commode est de ne compter que les trajectoires ne coupant pas le cercle de rayon R . Le problème consiste à relier le nombre de trajectoires ainsi dénombrées au nombre de réactions se produisant dans un volume donné.

Toutes les trajectoires, si elles étaient complètes auraient pour longueur

$$L = a + b.$$

Du fait de l'existence des deux surfaces limitant l'émulsion, elles peuvent avoir une longueur inférieure à L . Soit $p_1(l) dl$ la probabilité pour que la projection d'une trajectoire sur le plan de l'émulsion soit comprise entre l et $l + dl$. S'il n'y avait pas d'effet de surface, cette probabilité serait

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} 2\pi \cdot 2 \sin \theta d\theta, \quad \text{avec} \quad \sin \theta = \frac{l}{L},$$

soit

$$p_1(l) = \frac{1}{L} \frac{l}{\sqrt{L^2 - l^2}}.$$

Les effets de surface, qui limitent la longueur réelle de la trajectoire, modifient cette probabilité que nous allons calculer au paragraphe 2.

Considérons toutes les trajectoires de longueur projetée l , $l + dl$. Elles sont réparties au hasard, c'est-à-dire que la densité des centres est la même que la densité de n'importe quel autre point de la trajectoire. Pour raisonner, nous parlerons de la densité des centres (ceci implique que nous considérons la plaque comme infinie dans deux dimensions). Soit $N(l) dl$ le nombre de trajectoires de projection l , $l + dl$ ayant leur centre à l'intérieur d'un cercle de rayon R . Parmi celles-ci $n(l, R) dl$ ne touchent pas le cercle. Nous désignerons par $p_2(l, R)$ la proba-

bilité pour qu'une trajectoire de longueur projetée l ayant son centre à l'intérieur du cercle touche ce cercle. Nous aurons

$$n(l, R) dl = (1 - p_2(l, R)) N(l) dl.$$

La densité $N(l)$ a pour expression

$$N(l) = \pi R^2 e p_1(l) \varphi,$$

φ étant le nombre de réactions par unité de volume. Le nombre de trajectoires mesurées par la méthode consistant à ne compter que les trajectoires entières est

$$n_A = \int_0^L n(l, R) dl,$$

soit

$$n_A = \varphi \pi R^2 e \int_0^L p_1(l) (1 - p_2(l, R)) dl$$

ou, en tenant compte de ce que $\int_0^L p_1(l) dl = 1$:

$$n_A = \varphi \pi R^2 e \left\{ 1 - \int_0^L p_1(l) p_2(l, R) dl \right\}, \quad (1)$$

$\varphi \pi R^2 e$ est le nombre de réactions se produisant dans le volume exploré. Nous définirons le facteur de correction C par

$$\varphi \pi R^2 e = C n_A. \quad (2)$$

2. Calcul de $p_1(l)$. — Plusieurs cas sont à considérer suivant les valeurs relatives de l'épaisseur de l'émulsion et de la longueur des trajectoires.

On peut envisager le problème en supposant que la trajectoire a la plus longue est toujours dirigée vers le haut ($\theta < \frac{\pi}{2}$) (fig. 1).

Pour les trajectoires a dirigées vers le bas, nous prendrons leurs symétriques par rapport au plan de cote $\frac{e}{2}$, ce qui revient à normaliser à 2π . Ceci facilite la discussion des différents cas.

1° *Premier cas* : $L < e$. — Soit une longueur l . Nous allons chercher toutes les manières possibles d'obtenir cette longueur en projection.

Fig. 1.

Pour $0 < z < z_2$,

$$z_2 = b \sqrt{1 - \frac{l^2}{L^2}},$$

la trajectoire rencontre la surface A (fig. 2) :

$$l = a \sin \theta + z \operatorname{tg} \theta.$$

Pour $z_2 < z < e - z_1$:

$$z_1 = a \sqrt{1 - \frac{l^2}{L^2}},$$

aucune des deux trajectoires ne rencontre les surfaces de séparation.

$$l = L \sin \theta.$$

Fig. 2.

Pour $e - z_1 < z < e$, la trajectoire a rencontre la surface A :

$$l = b \sin \theta + z' \operatorname{tg} \theta, \quad z' = e - z.$$

La probabilité d'obtenir une longueur l à dl près est

$$\frac{1}{2\pi e} \int_0^e 2\pi \sin \theta \, dz \, d\theta = \frac{dl}{e} \int_0^e \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dl} \right)_z dz.$$

cette intégrale se décompose en trois, suivant la position de z :

$$\int_0^e dz = \int_0^{z_2} dz + \int_{z_2}^{e-z_1} dz + \int_{e-z_1}^e dz.$$

Dans la seconde intégrale, l'intégrand ne dépend pas de z , d'où sa valeur

$$\frac{dl}{e} (e - z_1 - z_2) \frac{l}{L \sqrt{L^2 - l^2}}.$$

Les deux autres intégrales sont de la même forme :

$$\begin{aligned} \int_0^{z_2} \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dl} \right)_z dz &= \int_{\theta'_2}^{\theta''_2} \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dl} \right)_z \left(\frac{dz}{d\theta} \right)_l d\theta \\ &= - \int_{\theta'_2}^{\theta''_2} \sin \theta \left(\frac{dz}{d\theta} \right)_0 d\theta = \sin \theta'_2 - \sin \theta''_2. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer θ'_2 et θ''_2 . Deux cas

Fig. 3.

se présentent suivant que l est supérieur ou inférieur à a .

$l < a$ (fig. 3) :

$$\sin \theta' = \frac{l}{a}, \quad \sin \theta'' = \frac{l}{L};$$

$l > a$:

$$\sin \theta' = 1, \quad \sin \theta'' = \frac{l}{L}.$$

On obtient ainsi trois expressions différentes suivant les valeurs de l (voir tableau final I, cas I).

2° *Deuxième cas* : $a < e < L$. — Il existe, au centre, une zone dans laquelle les deux trajectoires peuvent rencontrer simultanément les surfaces de séparation, au moins pour certaines valeurs de l .

Ceci est possible si

$$e - y_1 < z < y_2 \quad (\text{fig. 4}).$$

La condition pour qu'il en soit ainsi est que

$$l < l_0, \quad l_0 = L \sqrt{1 - \left(\frac{e}{L} \right)^2}.$$

Pour les valeurs de l supérieures à l_0 , on est ramené au cas précédent.

Pour $l < l_0$, il y a trois zones.

Zone AB : comme plus haut, on ramène l'intégration en z à

$$\sin \theta'_2 - \sin \theta''_2,$$

$\sin \theta'_2$ est égal, soit à $\frac{l}{a}$, si $l < a$, soit à 1, si $l > a$ et $\sin \theta''_2$ a pour expression

$$\sin \theta''_2 = \frac{l}{\sqrt{e^2 + l^2}}.$$

Zone BC : l'angle θ est indépendant de z ,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{l}{e},$$

la contribution à $p_1(l)dl$ est

$$A(l) dl = \sin \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial l} \right)_z \{y_1 + y_2 - e\} dl,$$

soit

$$A(l) dl = \frac{e L l dl}{(e^2 + l^2)^2} - \frac{e l dl}{(e^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Fig. 4.

La contribution de la zone CD est la même que celle de la zone AB (avec échange de a et b).

Suivant la position de l_0 par rapport à a et b , on obtient ainsi les trois formules du tableau I (cas II).

3° *Troisième cas* : $b < e < a$. — Dans ce cas, la zone AB (fig. 4) a disparu, pour $l < l_1 = \sqrt{a^2 - e^2}$. Dans ces conditions, dès que b touche, a touche aussi. La formule finale a une forme différente, suivant les valeurs respectives de l_1 et de l_0 ($l_1 < l_0$) (tableau I, cas III).

4° *Quatrième cas* : $e < b$. — Il existe des valeurs de l pour lesquelles les deux trajectoires touchent quelle que soit la valeur de z . Deux cas différents se présentent suivant les valeurs respectives de l_1 , $l_2 = \sqrt{b^2 - e^2}$, l_0 .

Remarquons que

$$l_2 < l_1 < l_0, \quad l_2 < b, \quad l_1 < a$$

(voir tableau I, cas IV).

TABEAU I.

Expressions de $p_1(l)$.

Cas I : $L < e$.

$$\begin{aligned} 0 < l < b \dots & \text{I}_a \\ b < l < a \dots & \text{I}_b \\ a < l < L \dots & \text{I}_c \end{aligned}$$

Cas II : $a < e < L$.

$l_0 > a.$	$b < l_0 < a.$
$0 < l < b \dots \text{II}_a$	$0 < l < b \dots \text{II}_a$
$b < l < a \dots \text{II}_b$	$b < l < l_0 \dots \text{II}_b$
$a < l < l_0 \dots \text{II}_c$	$l_0 < l < a \dots \text{I}_b$
$l_0 < l < L \dots \text{I}_c$	$a < l < L \dots \text{I}_c$

$l_0 < b.$
$0 < l < l_0 \dots \text{II}_a$
$l_0 < l < b \dots \text{I}_a$
$b < l < a \dots \text{I}_b$
$a < l < L \dots \text{I}_c$

Cas III : $b < e < a$.

$l_1 > b, \quad l_0 > a.$	$l_1 > b, \quad l_0 < a.$
$0 < l < b \dots \text{III}_a$	$0 < l < b \dots \text{III}_a$
$b < l < l_1 \dots \text{III}_b$	$b < l < l_1 \dots \text{III}_b$
$l_1 < l < a \dots \text{II}_b$	$l_1 < l < l_0 \dots \text{II}_b$
$a < l < l_0 \dots \text{II}_c$	$l_0 < l < a \dots \text{I}_b$
$l_0 < l < L \dots \text{I}_c$	$a < l < L \dots \text{I}_c$

$l_1 < b, \quad l_0 > a.$	$l_1 < b, \quad b < l_0 < a.$
$0 < l < l_1 \dots \text{III}_a$	$0 < l < l_1 \dots \text{III}_a$
$l_1 < l < b \dots \text{II}_a$	$l_1 < l < b \dots \text{II}_a$
$b < l < a \dots \text{II}_b$	$b < l < l_0 \dots \text{II}_b$
$a < l < l_0 \dots \text{II}_c$	$l_0 < l < a \dots \text{I}_b$
$l_0 < l < L \dots \text{I}_c$	$a < l < L \dots \text{I}_c$

Cas IV : $e < b$.

$l_1 > b, \quad l_0 > a.$	$l_1 < b, \quad l_0 > a.$
$0 < l < l_2 \dots \text{IV}$	$0 < l < l_2 \dots \text{IV}$
$l_2 < l < b \dots \text{III}_a$	$l_2 < l < l_1 \dots \text{III}_a$
$b < l < l_1 \dots \text{III}_b$	$l_1 < l < b \dots \text{II}_a$
$l_1 < l < a \dots \text{II}_b$	$b < l < a \dots \text{II}_b$
$a < l < l_0 \dots \text{II}_c$	$a < l < l_0 \dots \text{II}_c$
$l_0 < l < L \dots \text{I}_c$	$l_0 < l < L \dots \text{I}_c$

$$\text{I}_a : \frac{1}{L} \left\{ \frac{l}{L \sqrt{1 - \left(\frac{l}{L}\right)^2}} - \frac{l}{e} \left(1 - \frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) \right\}$$

$$\text{I}_b : \frac{1}{L} \left\{ \frac{l}{L \sqrt{1 - \left(\frac{l}{L}\right)^2}} + \frac{L}{e} - \frac{l}{e} \left(2 - \frac{b}{a}\right) \right\}$$

$$\text{I}_c : \frac{1}{L} \left\{ \frac{l}{L \sqrt{1 - \left(\frac{l}{L}\right)^2}} + 2 \frac{L}{e} - 3 \frac{l}{e} \right\}$$

$$\text{II}_a : \frac{e L l}{(e^2 + l^2)^2} - \frac{e l}{(e^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{l L}{e a b} - \frac{2 l}{e \sqrt{e^2 + l^2}}$$

TABLEAU I (suite).

$$\text{II}_b : \frac{eLl}{(e^2 + l^2)^2} - \frac{el}{(e^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{e} + \frac{l}{ae} - \frac{2l}{e\sqrt{e^2 + l^2}}$$

$$\text{II}_c : \frac{eLl}{(e^2 + l^2)^2} - \frac{el}{(e^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{e} - \frac{2l}{e\sqrt{e^2 + l^2}}$$

$$\text{III}_a : \frac{bel}{(e^2 + l^2)^2} + \frac{l}{eb} - \frac{l}{e\sqrt{e^2 + l^2}}$$

$$\text{III}_b : \frac{bel}{(e^2 + l^2)^2} + \frac{1}{e} - \frac{l}{e\sqrt{e^2 + l^2}}$$

$$\text{IV} : \frac{el}{(e^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$l_0 = \sqrt{L^2 - e^2},$$

$$l_1 = \sqrt{a^2 - e^2},$$

$$l_2 = \sqrt{b^2 - e^2}.$$

Fig. 5.

Les figures 5 et 6 représentent les variations de p_1 en fonction de l dans deux cas extrêmes, lorsque l'épaisseur est supérieure à la longueur de la trajectoire, et lorsque l'épaisseur est inférieure à la plus petite des deux trajectoires (cas I et IV).

3. Calcul de $p_2(l, R)$. — On peut distinguer trois zones dans le cercle, suivant la distance du centre de la trajectoire au centre du cercle.

a. pour $0 < r < r_m = R - \frac{l}{2}$, la trajectoire ne touche jamais le cercle;

b. pour $r_m < r < r_M = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$, la trajectoire

Fig. 6.

ne touche le cercle que si sa direction est comprise dans un angle 2θ (fig. 7);

c. pour $r_m < r < R$, la trajectoire touche toujours le cercle. Soit S' la surface de cet anneau.

La probabilité de toucher le cercle est

$$p_2(l, R) = \frac{S'}{\pi R^2} + 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}.$$

Soit, tous calculs faits :

$$p_2(l, R) = \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{l}{2R} + \frac{l}{2R} \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2R}\right)^2} \right\}.$$

Fig. 7.

TABLEAU II.

$$\text{Cas I} : \gamma = I_1(\lambda) + 2I_5(\lambda) - I_5(\alpha\lambda) - I_5(\beta\lambda) - 3I_6(\lambda) + \frac{1}{\alpha}I_6(\alpha\lambda) + \frac{1}{\beta}I_6(\beta\lambda)$$

$$\text{Cas II} : \gamma = I_1(\lambda) - I_1(x_0) - I_2(x_0) - I_3(x_0) + I_4(x_0) + 2I_5(\lambda) - I_5(\alpha\lambda) - I_5(\beta\lambda) \\ - 3I_6(\lambda) + \frac{1}{\alpha}I_6(\alpha\lambda) + \frac{1}{\beta}I_6(\beta\lambda) + 3I_6(x_0)$$

$$\text{Cas III} : \gamma = I_1(\lambda) - I_1(x_0) - I_2(x_0) + \frac{1}{2}I_2(x_1) - I_3(x_0) + I_3(x_1) + I_4(x_0) - \alpha I_4(x_1) \\ + 2I_5(\lambda) - I_5(\alpha\lambda) - I_5(\beta\lambda) - 3I_6(\lambda) + \frac{1}{\alpha}I_6(\alpha\lambda) + \frac{1}{\beta}I_6(\beta\lambda) + 3I_6(x_0) - \frac{1}{\alpha}I_6(x_1)$$

$$\text{Cas IV} : \gamma = I_1(\lambda) - I_1(x_0) - I_2(x_0) + \frac{1}{2}I_2(x_1) + \frac{1}{2}I_2(x_2) - I_3(x_0) + I_3(x_1) + I_3(x_2) + I_4(x_0) \\ - \alpha I_4(x_1) - \beta I_4(x_2) + 2I_5(\lambda) - I_5(\alpha\lambda) - I_5(\beta\lambda) - 3I_6(\lambda) + \frac{1}{\alpha}I_6(\alpha\lambda) + \frac{1}{\beta}I_6(\beta\lambda) \\ + 3I_6(x_0) - \frac{1}{\alpha}I_6(x_1) - \frac{1}{\beta}I_6(x_2)$$

$$I_1 = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x p_2(x) \frac{x dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}} = \frac{2}{\pi\lambda} \left\{ \frac{2}{3}(1 + \lambda^2) E(\lambda, \varphi) \right. \\ \left. - \frac{2}{3}(1 - \lambda^2) F(\lambda, \varphi) - \sqrt{\lambda^2 - x^2} \arcsin x - \frac{1}{3} x \sqrt{1 - x^2} \sqrt{\lambda^2 - x^2} \right\} \\ \sin \varphi = \frac{x}{\lambda}$$

$$I_2 = \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^x p_2(x) \frac{x dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}}} = \frac{4}{\varepsilon\pi} \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{1 + \varepsilon^2} \left[\varepsilon^2 F(k, \varphi) + (1 - \varepsilon^2) E(k, \varphi) - \varepsilon^2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - (1 - \varepsilon^2) E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \right] \right. \\ \left. + \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \left[\arcsin x + \frac{1}{3} x \sqrt{1 - x^2} \right] \right\} \\ k^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}, \quad \cos \varphi = x$$

$$I_3 = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x p_2(x) \frac{x dx}{\left(1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\varepsilon}{\pi} \left\{ 2 \sqrt{\varepsilon^2 + 1} \left[E(k, \varphi) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \varphi) + F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \right] - \frac{\arcsin x}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}} - \frac{x \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}} \right\} \\ k^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}, \quad \cos \varphi = x$$

$$I_4 = \frac{\lambda}{\varepsilon^3} \int_0^x p_2(x) \frac{x dx}{\left(1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)^2} = \frac{\lambda}{\pi} \left\{ 2 \sqrt{1 + \varepsilon^2} \arctg \frac{x}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{1 - x^2}} - \varepsilon \frac{\arcsin x}{\varepsilon^2 + x^2} - 2\varepsilon \arctg \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \varepsilon x \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\varepsilon^2 + x^2} \right\}$$

$$I_5 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x p_2(x) dx = \frac{2}{\pi\varepsilon} \left\{ x \arcsin x + \frac{1}{3} \sqrt{1 - x^2} (2 + x^2) - \frac{2}{3} \right\}$$

$$I_6 = \frac{1}{\varepsilon\lambda} \int_0^x p_2(x) x dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon\lambda} \left\{ (4x^2 - 1) \arcsin x + x \sqrt{1 - x^2} (1 + 2x^2) \right\}$$

4. Calcul du facteur de correction. — Nous avons calculé, dans tous les cas possibles les intégrales

$$\gamma(L, 2R, e, a, b) = \int_0^L p_1(l) p_2(l, R) dl,$$

d'où le facteur de correction

$$\mathcal{C} = \frac{1}{1 - \gamma}.$$

TABLEAU II'.

Cas d'une seule trajectoire.

Cas I : $L < e$.

$$\gamma = I_1(\lambda) + I_5(\lambda) - 2I_6(\lambda)$$

Cas II : $L > e$.

$$\gamma = I_1(\lambda) - I_1(x_0) - \frac{1}{2}I_2(x_0) + I_6(\lambda) - 2I_6(\lambda) + 2I_6(x_0)$$

En utilisant les variables réduites suivantes :

$$\lambda = \frac{L}{2R}, \quad \varepsilon = \frac{c}{2R}, \quad \alpha = \frac{a}{L},$$

$$\beta = \frac{b}{L}, \quad x_i = \frac{l_i}{2R},$$

on obtient pour y une seule expression pour chacun des cas I, II, III, IV, comme on pouvait s'y attendre. Elles sont reproduites sur le tableau II.

Les fonctions $E(k, \varphi)$ et $F(k, \varphi)$ sont les intégrales elliptiques de seconde et de première espèce. On peut trouver leurs valeurs numériques dans L. POTIN, *Formules et tables numériques*. Le tableau II' correspond au cas où une seule trajectoire serait visible.

Ce travail a été entrepris à la demande de M. Labeyrie, de la Division des Constructions électriques du C.E.A.

(Manuscrit reçu le 9 juillet 1953.)