

EXPOSÉS ET MISES AU POINT BIBLIOGRAPHIQUES

LES PROBLÈMES RELATIFS A LA ROTATION DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

Par ANDRÉ METZ.

Sommaire. — Les problèmes de rotation n'ont pas fait jusqu'ici, du point de vue relativiste, l'objet d'études d'ensemble détaillées; ils ont seulement été abordés ou traités partiellement dans des Mémoires ou des Notes (qui pouvaient présenter tous les défauts de l'improvisation) à propos d'expériences effectivement faites, ou de dispositifs proposés à titre de questions théoriques.

Le présent article vise à combler cette lacune.

Ces problèmes exigent, en Relativité, l'emploi des notions connues de *temps propre* et de *longueur propre* et, en outre, de la notion de *temps d'un solide le long d'une courbe décrite sur ce solide*, temps qui dépend de cette courbe et de la manière dont elle est décrite.

Le problème des deux mobiles circulant en sens inverse sur le pourtour d'un disque est d'abord traité de manière rigoureuse, à titre de premier exemple fixant les ordres de grandeur des effets à observer et les possibilités de résultats « cruciaux » entre la théorie de la Relativité et la Mécanique classique.

Les expériences effectuées jusqu'ici sont ensuite examinées en détail : d'abord la plus simple, celle de Sagnac, où deux rayons lumineux décrivant en sens inverse (dans l'air) un circuit polygonal entraîné par un disque mobile, se rejoignent et forment des interférences; puis l'expérience de Harress, où un circuit du même genre est décrit par la lumière dans des prismes réfringents; enfin, celles de Dufour et Prunier qui, partant du dispositif de Sagnac, en varient les conditions de plusieurs manières et notamment en introduisant des parcours dans des milieux réfringents fixes, ou en combinant des portions de trajet fixes avec des portions entraînées avec le disque.

Toutes ces expériences mettent en évidence des effets du « premier ordre » en $\frac{v}{c}$. Elles ont généralement été considérées d'abord par leurs auteurs comme des preuves de la théorie de l'éther. En réalité, elles sont interprétées aussi bien dans la Théorie de la Relativité, et sans aucune hypothèse auxiliaire (comme celle de l'« entraînement partiel de l'éther par la matière réfringente », suivant la formule de Fresnel). Les démonstrations données ci-dessous sont presque toutes originales; plusieurs d'entre elles sont inédites.

1. **L'extension aux mouvements de rotation de la « Relativité restreinte ».** — Les problèmes concernant les mouvements non rectilignes ne sont pas examinés dans la *Relativité restreinte* proprement dite : ils constituent une « généralisation » de cette théorie, qui nécessite des considérations particulières et forme transition avec la *Relativité généralisée*. C'est, en effet, après avoir établi que la géométrie d'un disque en rotation *n'est pas euclidienne* pour des observateurs entraînés avec le disque — c'est le « paradoxe d'Ehrenfest » — qu'Einstein a étendu ce résultat, en vertu du « principe d'équivalence », au cas des champs de gravitation [1].

Il convient d'insister sur la signification de ce « paradoxe » et sur le problème général du disque tournant, avant de pouvoir résoudre les questions posées à la sagacité des physiciens au sujet des corps en rotation par des expériences réelles ou fictives et par des discussions qui n'ont guère cessé depuis une trentaine d'années.

Ces questions ont, jusqu'ici, été traitées, au point de vue relativiste, assez rapidement, par des savants surtout préoccupés d'aller de l'avant et qui laissaient parfois dans l'ombre des points délicats. Le moment semble venu d'introduire le maximum de clarté et de rigueur dans un domaine jusqu'ici quelque peu négligé à cet égard.

Les formules de la Relativité restreinte ont été établies en supposant des mouvements de translation uniforme. Elles peuvent être étendues aux cas des mouvements variés (dont font partie les mouvements de rotation) à condition de diviser ces mouvements en éléments spatio-temporels correspondant à des distances infiniment petites et des temps infiniment courts, auxquels on applique les formules de Lorentz et en faisant ensuite des sommations des résultats obtenus.

Rappelons que l'on appelle *longueur propre* d'un élément linéaire faisant partie d'un solide la longueur telle qu'elle est mesurée par un observateur opérant avec des règles graduées immobiles par rapport à ce solide.

D'une façon analogue, on appelle *temps propre* d'un mobile le temps tel qu'il est mesuré par une horloge parfaite entraînée avec ce mobile. C'est l'intégrale des temps élémentaires correspondant aux mouvements successifs de ce mobile.

On sait que, dans le cas d'un mobile, l'« intervalle d'univers » ds est égal à $c dt$, t étant l'intervalle de temps correspondant dans un système de référence lié au mobile. Sur un parcours déterminé,

$$\int dt = \frac{1}{c} \int ds,$$

c'est-à-dire que le temps propre est égal à l'arc de « ligne d'univers » divisé par la vitesse de la lumière.

2. **Le problème général du disque en rotation** [2]. — Considérons un disque D en rotation par rapport à un système de Galilée S et soit v sa vitesse circconférentielle. Un observateur entraîné avec D dispose de règles graduées très courtes par rapport au diamètre du cercle : en mettant ces règles bout à bout le long du pourtour du disque, il le recouvre entièrement au moyen de l' règles de longueur unité. Si un observateur de S fait de cette figure une photographie instantanée (par rapport à S), il trouve, pour la longueur totale, la valeur $2\pi r$. Mais en faisant cette opération, il a attribué à chacune des petites règles la longueur « contractée » $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Donc

$$l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2\pi r \quad \text{et} \quad \frac{l'}{2r} \text{ est } > \pi.$$

On a admis implicitement, dans ce raisonnement, que le disque était plein et sans fissure à la vitesse considérée. Le résultat obtenu montre que si un disque de rayon constant passe de l'immobilité à la rotation dans un système de Galilée en restant sans fissure, *il faut que sa circonférence s'allonge* (mesurée en « longueur propre ») et si, au contraire, on assujettit chacun des éléments du pourtour du disque à garder, malgré le mouvement, la même longueur propre, *il faut que le disque craque*.

Cette dernière assertion est rendue plus évidente encore par les considérations suivantes : Soit une voie circulaire de grand rayon, sur laquelle se trouvent un grand nombre n de wagons de longueur unité, attachés ensemble, sauf le $n^{\text{ième}}$ qui n'est pas attaché au premier, de sorte qu'ils forment une chaîne circulaire ouverte. Supposons qu'au repos, le $n^{\text{ième}}$ touche le premier. Mettons le train en marche instantanément à la vitesse v sans changement de longueur propre ⁽¹⁾ : cela veut dire que le premier et le deuxième wagon se mettent en mouvement *simultanément* par rapport au premier wagon ayant la vitesse v ; que le troisième se met en mouvement *simultanément* avec le deuxième,

⁽¹⁾ Cela exige que tous les wagons soient automoteurs et soient mis en marche suivant un programme préétabli, car le mouvement ne peut se transmettre d'un wagon à un autre *instantanément* si l'on compte uniquement sur des véhicules (locomotive, ou voitures motrices) pour entraîner les autres. En outre, cela exige que tous les wagons soient munis d'un dispositif compensateur de longueur que l'on fait fonctionner suivant un programme préétabli, autrement les wagons ne pourraient garder leur longueur propre pendant la mise en marche (celle-ci ne pouvant se faire instantanément d'une extrémité à l'autre).

A noter que le wagon que nous appelons le « premier » (il est effectivement le premier mis en marche pour le système de référence de la voie) est, dans le sens de la marche, à l'arrière du train. En termes ferroviaires, c'est le wagon de queue (et non le wagon de tête) et tout se passe, pour la voie, comme si la rame était *refoulée*, avec compression des voitures réduisant la longueur totale du train.

Mais on doit insister sur le fait que c'est l'exécution du programme (horaire établi et exécuté à une fraction infinitésimale de seconde près) qui, aidée par la manœuvre des dispositifs compensateurs, produit ce résultat et non l'action des attelages, qui pourraient être supposés inexistantes.

par rapport à celui-ci ayant acquis la vitesse v , etc., jusqu'au $n^{\text{ième}}$.

On voit alors qu'il se produit un intervalle entre le $n^{\text{ième}}$ et le premier.

En effet, le phénomène, vu de la voie, produit la même impression que dans le cas d'un train en marche *instantanément* à une vitesse v sur une voie rectiligne et sans changer de longueur propre (l'instantanéité étant réalisée par rapport au train à la vitesse v) ⁽²⁾ pour le système de référence de la voie, le mouvement paraît se propager de l'arrière du train vers l'avant — en même temps que se produit la contraction lorentzienne sur chaque wagon — de sorte que le wagon de queue est déjà parti depuis un certain temps *au moment où* (par rapport à la voie) le wagon de tête se met en marche. A partir de là, la longueur du

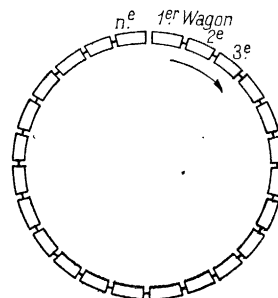


Fig. 1.

train, mesurée par rapport à la voie, reste constante si la vitesse v reste la même.

Cet intervalle est, mesuré par rapport à la voie,

$$n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right);$$

mesuré en unités entraînées avec le train, il est

$$n \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Pour revenir au cas du disque tournant, retenons le rapport de la circonférence au rayon qui, mesuré par des observateurs entraînés avec le disque, est

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{donc} \quad > 2\pi.$$

On en a parfois déduit que le rayon devrait se contracter. Il en serait ainsi, en effet, dans le cas d'une *roue* dont les rayons seraient élastiques ou

⁽²⁾ La constance de la longueur propre est obtenue par les mêmes artifices que dans la Note précédente. Le mouvement paraît se propager de l'arrière vers l'avant avec la vitesse $\frac{c^2}{v}$ pour les observateurs de la voie.

Une différence importante existe entre le cas de la voie circulaire et celui de la voie rectiligne : dans ce dernier cas, les wagons partent *ensemble* pour un système de Galilée (le système en translation avec une vitesse v), tandis qu'il est impossible de trouver un tel système pour une voie circulaire.

plastiques, c'est-à-dire susceptibles d'extension et de contraction, tandis que la jante, au contraire, serait extrêmement rigide, possédant une cohésion parfaite et une aptitude à conserver ou à reprendre toujours et, malgré tout, la même *longueur propre*.

Mais, lors même que ces conditions seraient supposées réalisées, il faudrait considérer cette contraction séparément, *avant* de traiter le problème par les formules de la Relativité (de même si l'on voulait tenir compte d'une *extension* mécanique due, par exemple, à la force centrifuge).

En effet, ces formules stipulent que les éléments perpendiculaires au mouvement restent inaltérés.

Si le rayon est constant et si la cohésion de la matière du disque l'empêche de se fissurer, il y a, pour tous les éléments de cette matière, du fait de la rotation, une *contrainte* dont l'effet est une *extension de longueur propre* dans le sens perpendiculaire au rayon, dans la proportion $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, v étant la vitesse

de l'élément considéré.

3. Remarques générales au sujet des problèmes de rotation. — On peut tirer des considérations qui précèdent les remarques suivantes :

a. D'une façon générale, un solide ne peut conserver une parfaite rigidité dans des mouvements *variés*, selon la théorie de la Relativité. C'est pourquoi les problèmes qui font intervenir ces mouvements doivent comporter, dans leurs énoncés, des détails, notamment au sujet des cohésions, des rigidités imposées, des contractions ou extensions permises, détails qui n'étaient pas exigés dans la Mécanique rationnelle classique.

b. Les « extensions » et « contractions » des longueurs et des durées, qui sont toutes « relatives » et parfaitement réciproques tant qu'il est question de translations uniformes, prennent, dans certains cas de mouvements variés, une réalité indéniable, se traduisant notamment par des différences de longueurs ou des déréglages temporels lors de rencontres (qui sont des « coïncidences spatiotemporelles », donc des réalités indéniables dont doit tenir compte toute théorie).

On sait depuis longtemps que les mouvements variés peuvent être mis en évidence par des phénomènes physiques mesurables à l'intérieur même des systèmes en mouvement (par exemple, les effets de la « force centrifuge » pour les rotations), et la célèbre expérience du pendule de Foucault a montré que l'on pouvait ainsi mettre en évidence la rotation de la terre. La théorie de la Relativité affirme, en outre, que des *décalages spatiaux* et *temporels* peuvent être liés à des mouvements variés et, en particulier, à des rotations.

c. Une des plus grandes difficultés des solutions des problèmes de rotation est l'impossibilité de définir un temps univoque et cohérent, au moyen d'horloges liées au corps en rotation considéré [1].

Certes, chaque point de ce corps — disons : du « disque » — a son temps propre. D'autre part, tout mobile qui parcourt un trajet par rapport au disque a également son temps propre.

Mais on peut définir aussi (et c'est encore une notion différente) un *temps du disque, le long de ce trajet*. En effet, le mobile a , à chaque instant, une certaine position par rapport au disque; pendant un intervalle de temps élémentaire (défini par rapport au système de Galilée), il parcourt une distance infiniment petite et nous pouvons appliquer les formules de transformation de Lorentz à ce mouvement. On trouve ainsi un *temps élémentaire* du disque (en même temps qu'une distance sur ce disque et une vitesse par rapport au disque) ⁽³⁾ et en faisant une sommation, on peut définir le temps le long du trajet. Ce temps dépend, en général, non seulement du trajet parcouru, mais encore de la façon dont il est parcouru (nous en avons vu un exemple à propos des wagons sur la voie circulaire).

4. Méthodes de résolution des problèmes. — *Possibilités de différences entre la théorie classique et la Relativité.* — Un certain nombre de problèmes ont été posés concernant des disques tournants à la suite d'expériences effectivement faites, ou projetées, ou simplement envisagées. Toutes ces expériences avaient d'abord été considérées par leurs auteurs comme cruciales entre la Relativité et la théorie « classique » (théorie de l'éther, avec application de la Cinématique classique).

Toutes concernent des mouvements de mobiles ou des propagations d'ondes, qui ont lieu sur des disques animés de mouvements de rotation.

Les problèmes correspondants peuvent être traités par plusieurs méthodes :

1° Les raisonnements et les calculs ont lieu dans le système de référence de Galilée initial, celui du laboratoire.

Cette méthode a l'avantage d'utiliser toujours un temps univoque et cohérent; mais elle peut, dans certains cas, suivant les données du problème posé, se révéler inapplicable ou donner lieu à des complications telles qu'il devient préférable d'en employer une autre.

2° Les raisonnements et les calculs ont lieu en considérant des éléments du disque, que l'on prend successivement comme référence. On est alors conduit à introduire le « temps du disque le long d'un trajet », défini ci-dessus (§ 3, c).

Cette méthode, qui s'impose pour certains problèmes, est plus délicate en raison de la nécessité de

⁽³⁾ Certains auteurs ont introduit des « vitesses par rapport au disque » considérées dans des systèmes de référence (ou « vues par des observateurs ») qui ne participent pas au mouvement du disque. Ces « vitesses » s'obtiennent par addition ou soustraction (sans tenir compte de la formule de composition) des vitesses considérées : vitesse du mobile (ou de la propagation envisagée) par rapport au système de référence en question et vitesse du point du disque correspondant, toujours par rapport au même système de référence. C'est ainsi que l'on peut avoir, dans certains cas, une propagation de la lumière « anisotrope » et même une vitesse de la lumière plus grande que c .

Naturellement, il convient de bien préciser, lorsqu'on l'emploie, cette notion de vitesse à double référence, qui semble, au premier abord, jurer avec les notions et les résultats admis en Relativité. Nous n'avons pas eu à l'utiliser dans le présent travail.

manier des temps différents les uns des autres et dont certains peuvent être des résultats d'intégrations de caractère peu commun.

Ces deux méthodes sont les principales qui aient été employées jusqu'ici pour les problèmes en question. Bien entendu, rien n'empêche d'en employer d'autres et notamment de choisir d'autres systèmes de référence, ou de passer d'une méthode à une autre au cours du même problème.

Certains auteurs ont publié, à propos d'expériences célèbres, des raisonnements et des calculs tenant compte du temps du système du laboratoire et de coordonnées d'espace mesurées sur le corps en mouve-

ment, d'ailleurs sans tenir compte du radical $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ correspondant à la « contraction » [3], (3). C'est là proprement *raisonner dans la théorie de l'éther* et les résultats obtenus par cette « troisième méthode » ne peuvent être donnés comme conformes à la Relativité qu'avec les justifications nécessaires.

Quelle que soit la méthode employée, une différence entre les résultats prévus par la Relativité et par la théorie classique ne peut provenir que des *formules de transformation* d'un système de référence à un autre, formules utilisées pour les calculs partant de données (positions, temps, vitesses) évaluées dans un système et aboutissant à des éléments évalués par rapport à un autre système.

Aucune différence n'est donc possible si tout — données et résultats — se calcule dans le même système (nous verrons plus loin que c'est le cas pour certaines expériences).

Il faut d'ailleurs remarquer que si les propagations en cause sont des propagations de lumière dans le vide ou dans l'air, les applications des deux théories, tout en demandant des calculs qui peuvent être différents, sont forcément *équivalentes au premier ordre* (par rapport à la vitesse du disque). Si donc on ne peut pas pousser très loin la précision expérimentale (comme cela a été le cas jusqu'ici pour toutes les expériences concernant des rotations), elles aboutissent aux mêmes résultats observables.

Ceci est d'ailleurs général, quel que soit le corps considéré (qui n'est pas forcément un disque) et son mouvement (qui n'est pas forcément une rotation).

En effet, si d'après la théorie classique une onde lumineuse parvient, au temps origine, en un point M de ce corps et si nous choisissons des coordonnées telles que l'axe des x soit dans la direction de la vitesse v du point M, la vitesse de cette onde est un vecteur qui a pour grandeur c et pour projections c_x , c_y , c_z . Sa vitesse par rapport au corps considéré (toujours dans la théorie classique) a pour composantes $c_x - v$, c_y , c_z ; sa grandeur n'est plus c , mais celle de la « résultante » des deux vecteurs vitesse (de grandeurs c et v). Au bout du temps élémentaire dt , la même onde arrivera au point dont les coordonnées, par rapport au corps en mouvement, sont

$$dt(c_x - v), \quad dtc_y, \quad dtc_z.$$

D'après la Relativité, au bout du même temps dt du système galiléen du laboratoire, cette onde arri-

vera au point dont les coordonnées, par rapport au corps considéré, sont

$$dx' = dt \frac{c_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy' = dtc_y, \quad dz' = dtc_z;$$

le temps est noté de façon différente

$$dt' = dt \frac{1 - \frac{vc_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

et l'on a

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = c^2 dt'^2,$$

c'est-à-dire que la vitesse de la lumière a pour grandeur c par rapport au corps considéré (même grandeur que dans le système de Galilée).

Si nous comparons ces résultats à ceux de la théorie classique, nous voyons que, par rapport au corps en mouvement, la *vitesse de la lumière* et le *temps* ont des valeurs très différentes dans les deux théories. Mais le point où arrive la lumière est le même et est noté de la même façon au point de vue des coordonnées d'espace, si l'on néglige le terme du second ordre $\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$, qui correspond à la « contraction de Lorentz ».

Ce sont donc, au premier ordre, les *mêmes événements* qui sont notés dans la théorie de l'éther avec le temps t « universel » et la vitesse de la lumière modifiée (« composée » avec la vitesse du corps suivant la règle classique) et dans la théorie relativiste avec le temps t' du système de référence entraîné par ce corps et la vitesse de la lumière « invariante ».

Une sommation de résultats élémentaires de ce genre le long d'un trajet ne peut rien changer dans l'ensemble.

Finalement, les mêmes effets sont prévus sur le corps en mouvement, en ce qui concerne la lumière dans le vide ou dans l'air — toujours *au premier ordre* — par les deux théories, mais ils sont attribués par la théorie classique aux différences des vitesses de la lumière et par la théorie de la Relativité à la modification du temps lui-même.

Cette convergence des résultats des deux théories ne s'applique qu'à la vitesse c .

Elle n'est déjà plus valable pour les vitesses de la lumière dans les corps réfringents, qui sont nettement plus petites que c . La théorie classique doit alors faire appel à l'hypothèse de l'« entraînement partiel » de l'éther (5) pour expliquer les phénomènes observés dans ces corps. Moyennant cette hypothèse auxiliaire, la convergence est rétablie.

Il n'y aurait aucune convergence pour des vitesses de mobiles, ou des propagations, *différentes de la lumière*, et des expériences faites sur cette base

(5) Rappelons que cette hypothèse, émise par Fresnel à la suite d'expériences d'Arago, était déjà une introduction partielle de la Relativité, car elle consistait essentiellement à légaliser l'impossibilité constatée de mettre en évidence le « vent d'éther » par des expériences du premier ordre sur les corps réfringents.

On sait que les formules de Fresnel ont été vérifiées ensuite par d'autres expériences réalisées par Fizeau.

(3) Voir plus loin (chap. VIII) à propos de l'interprétation de l'expérience de Sagnac.

pourraient être cruciales si elles pouvaient être montées de façon à donner des résultats accessibles aux mesures de laboratoire.

5. Cas des mobiles circulant sur la circonférence du disque. — On peut considérer comme problème typique de ce genre celui qui a été posé par F. Prunier [4] : deux mobiles, partant d'un même point O' sont supposés circuler en sens inverse sur le pourtour d'un disque, à des vitesses égales par rapport à ce disque. Si celui-ci est immobile par rapport à un système de Galilée, les rencontres successives des mobiles ont toujours lieu en ce même point O' du disque (et au point de la circonférence diamétralement opposé).

Si le disque est animé d'un mouvement de rotation autour de son centre, les rencontres ont toujours lieu au même point O' du disque d'après la Cinématique classique. D'après la théorie de la Relativité, ils se rencontrent, après un tour chacun, en un point O'_1 différent de O' , puis, après deux tours, en un autre point O'_2 différent de O'_1 , etc.

P. Langevin a donné l'essentiel de la théorie relativiste de ce problème [5] et le calcul approximatif du retard d'un des mobiles sur l'autre.

Cette théorie peut être faite en se plaçant dans le

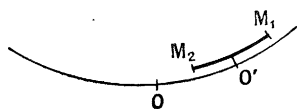


Fig. 2.

système de Galilée, c'est-à-dire en appliquant la « première méthode » (§ 4) [6]. A noter qu'il ne s'agit pas de propagation lumineuse et l'ordre de grandeur de la vitesse des mobiles n'est pas donné *a priori*. Il y a donc lieu d'être extrêmement prudent dans les « approximations » quelles qu'elles soient. La méthode employée permet ici un calcul tout à fait rigoureux.

Soit O le point de départ des mobiles dans ce système : O' coïncide, à l'origine des temps, avec O ; il se meut ensuite avec une vitesse u (vitesse circonférentielle du disque) par rapport au point O . Soit v' la vitesse du premier mobile M_1 par rapport au disque. Ce mobile a, par rapport au système de Galilée, la vitesse

$$v_1 = \frac{u + v'}{1 + \frac{uv'}{c^2}}.$$

Le second mobile M_2 a, par rapport au disque, la vitesse $-v'$ et, par rapport au système de Galilée, la vitesse

$$v_2 = \frac{u - v'}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Il y aura une nouvelle rencontre des mobiles lorsque la différence des parcours des deux mobiles sera l , ou $2l$, ou $3l$, etc. (l étant la longueur de la circonférence).

La différence l correspond à la première rencontre, au voisinage du point diamétralement opposé à O' . La différence $2l$ correspond au point O'_1 .

Cette rencontre aura lieu au temps t du système S , tel que

$$v_1 t - v_2 t = 2l,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{u + v'}{1 + \frac{uv'}{c^2}} - \frac{u - v'}{1 - \frac{uv}{c^2}} \right) t = 2l.$$

Après simplifications et résolution par rapport à t , on trouve

$$t = \frac{l}{v'} \frac{1 - \frac{u^2 v'^2}{c^4}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Le mobile M_1 a parcouru alors, au total, le chemin $v_1 t$ dans le système S ; le mobile M_2 a parcouru $v_2 t = 2l$. Leur point de rencontre O'_1 est donc à la distance de O (mesurée le long de la circonférence) $v_1 t$, ou $v_1 t - l$, ou $v_1 t - 2l$, etc. et sa distance au point O' (dont la distance au point O est ut) est

$$v_1 t - ut \quad \text{ou} \quad v_1 t - l - ut \quad \text{ou} \quad v_1 t - 2l - ut, \quad \dots$$

C'est évidemment la seconde qui donne la valeur absolue la plus faible.

Soit

$$d = O'O'_1 = v_1 t - l - ut.$$

Le calcul donne, après simplifications,

$$d = -l \frac{uv'}{c^2}.$$

Cette formule appelle les remarques suivantes :

Si u (vitesse circonférentielle du disque) peut être regardée comme *très petite* par rapport à c et si v' (vitesse des mobiles sur le disque) est également *très petite*, l'effet est du second ordre.

Il n'en est pas de même si, dans des expériences analogues, on remplace les mobiles par des effets de propagation dont la célérité est de l'ordre de la vitesse de la lumière.

Mais, comme on l'a vu, dans le cas de la lumière elle-même, les expériences ne sont pas cruciales ⁽⁵⁾.

D'autre part, il est très difficile de réaliser des mouvements très rapides avec des mobiles matériels proprement dits. On se trouve alors dans le dilemme suivant : ou bien (cas de la lumière) les expériences sont moins intéressantes, ou bien (cas des mobiles matériels) la vitesse v' est très petite vis-à-vis de c et l'effet est du second ordre, donc très difficilement observable.

M. Prunier a étudié différents projets visant à remplacer les mobiles par des propagations de courants électriques ou par des propagations d'ultrasons sur le pourtour d'un disque tournant à très grande vitesse. La mise au point de ces expériences suscite de grosses difficultés. Il serait grandement désirable que ces difficultés puissent être surmontées, pour que l'on puisse disposer du témoignage d'expériences proprement cinématiques et ne dépendant pas de la lumière.

⁽⁵⁾ Comme on ne peut pas faire parcourir à la lumière une circonférence, on remplace celle-ci par un trajet polygonal (c'est le cas des expériences décrites plus loin), mais les résultats sont les mêmes au point de vue des ordres de grandeur

6. **Le problème des disques avec engrenages.**
— Alexandre Dufour avait imaginé un dispositif qui devait, dans sa pensée, être équivalent à celui du disque avec deux mobiles circulant en sens inverse [7], [8], [9] :

Un disque horizontal D porte et entraîne avec lui un moteur qui fait tourner d'un mouvement uniforme, autour d'un axe horizontal (fixe par rapport à D), un pignon denté E. Celui-ci engrène avec deux couronnes dentées horizontales entre lesquelles il est placé et qui sont solidaires de deux disques D₁ et D₂ mobiles autour du même axe que le plateau D.

A. Dufour pensait réaliser ainsi l'égalité des vitesses, par rapport au plateau D, des éléments des pourtours des deux disques D₁ et D₂.

P. Langevin a montré qu'il n'en était rien d'après la Cinématique relativiste [10]. En effet, les disques étant supposés sans fissures à leurs vitesses respectives, il faut qu'ils subissent les extensions prévues plus haut : les éléments du pourtour du disque D₁

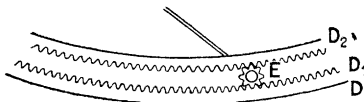


Fig. 3.

subissent donc, en longueur propre, une extension dans la proportion $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$; ceux du disque D₂ dans

la proportion $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$.

En raison de l'existence des engrenages, chaque fois que D₁ avance d'une dent sur le pignon E, D₂ recule d'une dent, c'est-à-dire d'une même fraction de circonférence. Au bout de n opérations de ce genre (n étant le nombre de dents de chaque couronne), les dents primitivement en contact avec le pignon reviennent donc au contact. Les rencontres successives de points tels que M₁ et M₂ marquées respectivement sur les couronnes D₁ et D₂ doivent donc toujours se faire au-dessus des mêmes points de D (?).

(?) Que deviennent les dimensions propres des éléments du pignon E ? Le pignon est une petite roue dentée qui, elle aussi, doit rester sans fissures pendant le mouvement. Or, ses éléments inférieurs ont, par rapport au système de Galilée, la vitesse v_1 ; ses éléments supérieurs, la vitesse v_2 . L'intégrité de cette petite roue dentée est évidemment sauvegardée si tout se passe normalement pour les observateurs du système de Galilée, c'est-à-dire si les éléments inférieurs sont,

en longueur propre, étendus dans la proportion $1 : \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$ et les éléments supérieurs, dans la proportion $1 : \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}$. Mais cette condition n'est pas indispensable et, en fait, elle ne peut se réaliser en raison de la rapidité avec laquelle ces éléments s'échangent entre eux. Tous les éléments du pignon prendront donc une extension moyenne.

Il en résultera que le pignon engrènera mal avec les dents de D₁ et de D₂ qui ont subi, de leur côté, les extensions respectives précitées. On se trouvera donc dans le cas d'engrenages défectueux (distances entre les dents du pignon trop courtes

D'autre part, les vitesses mesurées par des observateurs de D (aux environs du pignon E, par exemple) des points de D₁ et de D₂ sont différentes. Leur rapport

$$\frac{1 - \frac{uv_1}{c^2}}{1 - \frac{uv_2}{c^2}}$$

est, d'après P. Langevin,

On se trouve donc dans un cas nettement différent de celui des problèmes précédents.

Une difficulté signalée par F. Prunier [9] résulte du passage à la limite lorsque les disques augmentent de rayon sans changer les vitesses circonférentielles (*). Le rapport précédent (entre les vitesses mesurées par l'observateur en E) ne dépend que de u , de v_1 et de v_2 . Il demeure donc constant lorsque le rayon varie.

A la limite, la rotation devient une translation. Devra-t-on dire que cet observateur pourra ainsi mettre en évidence son mouvement de translation ? Ce serait une conséquence directement opposée au principe même de Relativité.

En réalité, ce que décèle l'observateur, ce n'est pas son mouvement, ce sont les extensions des dimensions propres de D₁ et D₂, ou plus exactement le fait que ces extensions sont différentes.

Supposons qu'avec les mêmes vitesses circonférentielles on remplace les disques avec engrenages par d'autres de plus en plus grandes, puis par des secteurs dentés de grands rayons, enfin par des engrenages rectilignes. Si l'on maintient les extensions précitées, la relation de Langevin subsiste et l'observateur en E continue à constater une différence entre la vitesse (mesurée par lui) des engrenages supérieur et inférieur. Mais ce n'est pas son mouvement qu'il met ainsi en évidence.

Cependant, ces extensions ne s'imposent nullement dans le cas des engrenages rectilignes (ni même dans le cas de secteurs dentés de grand rayon et d'angle très petit), puisqu'elles ont été introduites « pour que le disque entier reste sans fissure ». On peut donc ne pas les maintenir. Mais si on ne les maintient pas, il n'y a plus continuité dans un « passage à la limite » : on se trouve devant un problème différent : deux engrenages rectilignes D₁ et D₂, mûs par un pignon E. Les vitesses de D₁ et de D₂ sont égales et de signe contraire pour un observateur en E. Si celui-ci est, à son tour, en mouvement par rapport à un système S, les vitesses par rapport à S s'obtiennent par les formules générales qui, elles, ne comportent aucun système ni aucun observateur privilégié.

Cet exemple illustre l'importance que revêtent, dans les problèmes de solides tournants, les notions de contraintes et d'extensions des longueurs propres, dues à la cohésion de la matière.

7. Cas d'un trajet quelconque sur le disque.

ou trop longues pour les distances entre les dents des engrenages qu'il devrait mouvoir) et il pourra en résulter, si les défauts sont trop grands, un blocage complet du mécanisme. Mais, tant qu'il marchera, le principe de son fonctionnement énoncé plus haut doit, en raison de l'existence des dents, s'appliquer strictement : « Lorsque D₁ avance d'une dent sur E, D₂ recule d'une dent ».

(*) La solution de cette difficulté, est extraite de André METZ, C. R. Acad. Sc., 1951, 232, 1340.

— Nous avons vu que les calculs du paragraphe 5 ne s'appliquent rigoureusement que si les mobiles considérés (ou les propagations) circulent sur le pourtour du disque.

Dans le cas de trajets différents (c'est le cas pour la plupart des expériences réalisées jusqu'ici), ces calculs ne peuvent donner que des ordres de grandeur.

Un calcul plus précis peut se faire, dans ce cas, par la deuxième méthode indiquée plus haut (§ 4), c'est-à-dire par l'intermédiaire du *temps du disque le long du trajet parcouru*, temps défini de proche en proche sur ce trajet.

Soit $M'M_1$ un élément de ce trajet sur le disque. La vitesse du point M' du disque par rapport au système de Galilée est $v = \omega r$, r désignant la longueur CM' et ω la vitesse angulaire.

Soit dt le temps élémentaire de ce système de

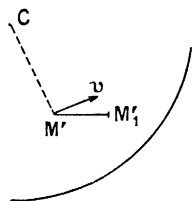


Fig. 4.

Galilée correspondant à ce trajet, et dt' le temps d'un autre système ayant la vitesse v par rapport au premier. La quatrième formule de Lorentz donne

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dx' étant la coordonnée mesurée parallèlement à la vitesse v , c'est-à-dire perpendiculairement à CM' : c'est donc la projection de $M'M_1$ sur la direction de la vitesse v .

$$\begin{aligned} dt' &= -\frac{v}{c^2} dx' + dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{v}{c^2} dx' + dt - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} dt + \dots \end{aligned}$$

d'où le décalage temporel élémentaire

$$dt' - dt = -\frac{v}{c^2} dx' - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} dt + \dots, \quad (1)$$

les termes non écrits étant en $\frac{v^4}{c^4}$, ou d'un ordre supérieur.

Le premier terme s'écrit $-\frac{\omega r dx'}{c^2}$.

Comme $r dx'$ est deux fois l'aire $d\alpha$ balayée par CM' , ce premier terme est égal à $-\frac{2\omega}{c^2} d\alpha$.

Le second terme n'est pas forcément négligeable par rapport au premier (*), car si nous appelons v' la

vitesse du mobile par rapport au disque

$$M'M_1 \equiv v' dt' \quad \text{et} \quad dx' = v' dt' \sin \angle CM'M_1.$$

Ce second terme est donc exactement de l'ordre du premier si v' est du même ordre que v . Toutefois, il est négligeable si le mobile est remplacé par une propagation lumineuse.

Sur l'ensemble d'un trajet parcouru sur le disque, le décalage temporel total est

$$t' - t = -\frac{2\omega\alpha}{c^2} - \frac{1}{2c^2} \oint v^2 dt. \quad (2)$$

Il y a lieu toutefois de remarquer que l'on ne compare pas — du moins dans les expériences réalisées jusqu'ici — le temps du disque avec le temps du système de Galilée, mais le temps t'_1 du disque le long du trajet décrit dans un certain sens, avec le temps t'_2 du disque le long du même trajet, décrit en sens inverse.

Si ces trajets sont décrits de façon symétrique, les seconds termes se détruisent, au moins en première approximation et l'on peut écrire (avec cette approximation)

$$t'_2 - t'_1 = 4\omega \frac{\alpha}{c^2}, \quad (3)$$

c'est-à-dire qu'au même temps t du système de Galilée correspondent des temps t' différents totalisés le long des trajets parcourus. En conséquence, si les vitesses sont les mêmes, les distances parcourues le long de ces trajets seront différentes et l'un des mobiles (ou des propagations) considérés sera en avant de l'autre.

On peut aussi avoir, dans certains cas, avantage à comparer les temps t'_1 et t'_2 du système de Galilée correspondant à des temps t' égaux; par exemple, si l'on veut connaître le décalage, dans le temps, de l'arrivée de deux mobiles (ou propagations) au bout de deux trajets égaux parcourus à la même vitesse. Les seconds termes disparaissent encore et l'on a

$$t_1 - t_2 = 4\omega \frac{\alpha}{c^2}. \quad (4)$$

Nous pouvons appliquer ces résultats au cas des mobiles circulant en sens inverse, avec des vitesses égales, sur la circonférence du disque. L'aire α est égale à πr^2 . En appelant u la vitesse circonférentielle,

$$\omega = \frac{u}{r}, \quad v = u = \text{const.}$$

Dans la formule (2),

$$\oint v^2 dt = u^2 \oint dt \quad \text{et} \quad \oint dt = \frac{2\pi r}{v'} \\ \text{(approximativement)}$$

(en réalité, c'est la valeur de $\oint dt'$, mais dt et dt' ne diffèrent que par des quantités d'ordre supérieur).

compte et ont écrit seulement le premier terme, disant qu'ils opéraient « au premier ordre en ω ». Cette manière de procéder n'est pas légitime, comme on le voit.

(*) Certains auteurs, dans des calculs analogues (cf. LAN-GEVIN, C. R. Acad. Sc., 1935, **200**, 50), n'en ont tenu aucun

Le premier terme de cette formule (2) est alors $-\frac{2\pi ru}{c^2}$

et le second $-\frac{\pi ru^2}{c^2 v}$: il est du même ordre que le premier si v' est du même ordre que u . Il est négligeable si v' est égal à c ou approche de cette valeur.

La formule (3) donne

$$t'_2 - t'_1 = \frac{4\pi ru}{c^2},$$

c'est-à-dire que l'un des mobiles aura parcouru, pendant le même temps t du système de Galilée, $\frac{4\pi ru}{c^2}$ de plus que l'autre. Au moment où le mobile n° 1 arrive au point O' , le second l'a dépassé de

$$O'O'_2 = v' \frac{4\pi ru}{c^2},$$

Les deux mobiles ont dû se croiser en O'_1 , à mi-distance. Donc

$$O'O'_1 = \frac{2\pi ru v'}{c^2}.$$

On retrouve ainsi le résultat du calcul rigoureux du paragraphe 5.

8. L'expérience de Sagnac. — L'expérience de Sagnac, qui date de 1913 [11], est la plus célèbre des expériences mettant en évidence la rotation par un effet optique. Rappelons-en le dispositif dans ses lignes essentielles.

Un faisceau lumineux issu d'une source S est envoyé sur une lame semi-réfléchissante L , de sorte qu'une partie du faisceau, réfléchi successivement par des miroirs, accomplit un trajet polygonal sur un disque, tandis que l'autre partie suit le même trajet en sens inverse. Les deux faisceaux se referment sur la lame L et coïncident géométriquement à partir de là, jusqu'à un appareil photographique P .

Lorsque le disque est immobile, les interférences entre les faisceaux qui arrivent en P forment des franges qui sont photographiées par l'appareil.

Si le disque est mis en mouvement, les franges se déplacent et la photographie permet de mesurer ce déplacement de façon précise.

A noter que, dans l'expérience originale, la source et l'appareil photographique étaient également liés au disque.

L'interprétation de cette expérience a d'abord été donnée par son auteur comme une « preuve de la réalité de l'éther lumineux » et une « démonstration de l'effet du vent relatif d'éther ».

Ce qu'elle a démontré réellement, c'est que « la lumière se propage dans l'espace avec une vitesse indépendante du mouvement d'ensemble de la source et du système optique ». En effet, le résultat observé est exactement celui que l'on peut calculer en se plaçant dans le système de référence du laboratoire (« première méthode ») et en tenant compte de l'allongement du trajet d'un des faisceaux lumineux par la rotation, ainsi que du raccourcissement de l'autre. Or, ce mode de calcul se justifie aussi bien dans la théorie de l'éther que dans la Relativité, pourvu que l'on admette qu'il n'y a *aucun entraînement* des ondes lumineuses par le mouvement de la source ou des

appareils optiques quels qu'ils soient (tout se passe dans le même système de référence et il n'y a aucune application de formules de transformation).

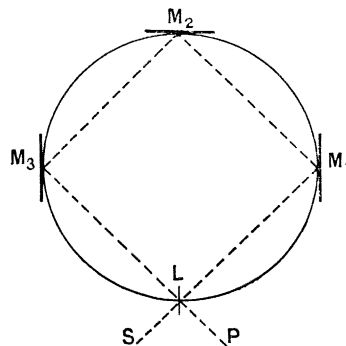


Fig. 5.

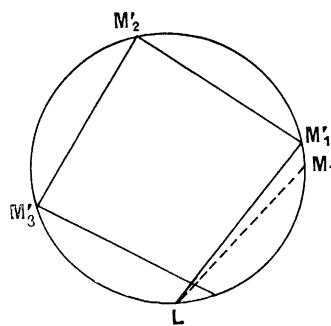


Fig. 6.

Max von Laue en a donné le détail [12], [13] en admettant que le circuit optique se compose d'un carré parfait inscrit dans le disque, $LM_1M_2M_3L$, L désignant la lame semi-transparente et M_1 , M_2 et M_3 les miroirs, et en calculant les longueurs des trajets LM_1 , M_1M_2 , M_2M_3 , M_3M' (tous égaux) lorsque l'appareil est en mouvement (fig. 5 et 6).

En fait, le circuit utilisé n'est pas forcément un carré (dans ses expériences, Sagnac utilisait un pentagone irrégulier). La démonstration ci-dessous s'applique à un polygone quelconque.

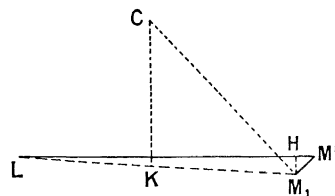


Fig. 7.

Soit LM_1 un élément de trajet rectiligne sur le disque, de longueur l . Pendant qu'il est parcouru par la lumière, c'est-à-dire pendant le temps $\frac{l}{c}$, le point M_1 vient en M_1' sur la circonférence de centre C et passant par M_1 , à une distance $M_1M_1' = r\omega \frac{l}{c}$, en désignant par r

la distance CM_1 et ω la vitesse angulaire. Le trajet de la lumière est allongé de $LM'_1 - LM_1$, soit

$$HM'_1 = M_1 M'_1 \cos \mu,$$

μ étant l'angle $M_1 M'_1 L$. Donc l'allongement s'écrit

$$r\omega \frac{l}{c} \cos \mu.$$

Si nous abaïssons de C la perpendiculaire CK sur LM_1 , nous remarquons que l'angle $M_1 CK = \mu$ ⁽¹⁰⁾. Donc

$$r \cos \mu = CK \quad \text{et} \quad rl \cos \mu = 2 \text{ aire } CLM_1.$$

L'allongement est alors $\frac{2\omega \text{ aire } CLM_1}{c}$.

Sur l'ensemble du circuit, il est donc $\frac{2\omega \alpha}{c}$, α désignant l'aire du polygone.

Le trajet parcouru en sens inverse est raccourci d'autant, donc la différence des deux trajets est $\frac{4\omega \alpha}{c}$,

ce qui correspond à un décalage temporel de $\frac{4\omega \alpha}{c^2}$ entre les ondes des deux faisceaux à leur arrivée sur la glace qui termine leurs parcours sur le disque.

On peut aussi, pour l'interprétation de cette expérience, procéder par la « deuxième méthode » et appliquer les calculs du paragraphe 7 (temps et coordonnées mesurées sur le disque).

La formule (4) donne, pour le retard d'un faisceau sur l'autre après un tour complet, la valeur $\frac{4\omega \alpha}{c^2}$.

Il s'agit de la comparaison des *temps* totalisés sur les trajets des faisceaux. Comme les ondes, d'après la théorie de la Relativité, ont toujours la même vitesse c par rapport aux éléments du disque successivement parcourus et que les trajets sur le disque sont égaux, ce retard est aussi celui des ondes de l'un des faisceaux sur celles de l'autre. On retrouve donc la formule du décalage temporel, mais, cette fois, par un raisonnement purement relativiste (et indépendant de la forme du circuit).

Bien entendu, ce n'est pas une différence temporelle que l'on observe, mais le retard d'un des faisceaux sur l'autre, révélé par une déviation des franges d'interférence. On a avantage à exprimer ce retard en nombre de longueurs d'onde. Ce nombre est

$$\frac{4\omega \alpha}{c^2} \frac{c}{\lambda} = \frac{4\omega \alpha}{c\lambda}.$$

En fait, il s'agit d'une fraction plus petite que 1.

L'expérience montre, qu'effectivement, on observe un déplacement des franges, de la valeur d'une fraction de frange correspondant à cette expression.

Enfin, une démonstration assez élégante a été donnée par P. Langevin [3] par le procédé appelé plus haut « troisième méthode » et consistant à utiliser le temps du système galiléen du laboratoire et les

⁽¹⁰⁾ C'est tout à fait rigoureux si L est sur la circonférence de centre C et passant par M_1 (car l'angle inscrit $LM'_1 M_1$ est égal à la moitié de l'angle au centre LCM_1). C'est très approché, de toute façon, car les droites LM_1 et LM'_1 sont presque confondues.

coordonnées d'espace d'un système « disque » calculées exactement comme dans la Mécanique classique. Si x, y, z, t sont les coordonnées dans le premier système et x', y', z', t' dans le second, on a

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, & z &= z', \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \end{aligned}$$

le temps t restant inchangé : $t = t'$.

La propagation de la lumière est caractérisée par

$$c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

c'est-à-dire (en négligeant les termes du second ordre en ω) :

$$c^2 dt^2 = 2\omega (x' dy' - y' dx') + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2.$$

Remarquons que

$$x' dy' - y' dx' = 2 d\alpha,$$

$d\alpha$ étant l'aire du triangle ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour base l'élément de rayon lumineux, mesuré par les observateurs liés à la plate-forme.

En outre,

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dl'^2,$$

dl' étant la mesure de cet élément.

L'équation de la propagation de la lumière s'écrit donc

$$c^2 dt^2 - 4\omega d\alpha dt = dl'^2$$

ou, au même ordre d'approximation,

$$c dt - 2\omega d\alpha = dl' \quad \text{ou} \quad dt = \frac{dl'}{c} + 2 \frac{\omega}{c^2} d\alpha.$$

D'où, pour un des rayons, par intégration

$$t = \frac{l'}{c} + \frac{2\omega \alpha}{c^2}.$$

Pour le rayon qui parcourt le même chemin en sens inverse, on doit changer le signe de ω . La différence des temps d'arrivée au bout d'un même chemin parcouru l' se traduit donc par une différence temporelle $\frac{4\omega \alpha}{c^2}$.

Cette démonstration, qui a été donnée par son auteur comme une application de la « Relativité généralisée » est, en réalité, entièrement conforme à la Mécanique classique. Cette manière de faire est justifiée par le fait que les deux cinématiques coïncident au premier ordre ⁽¹¹⁾.

⁽¹¹⁾ Voici ce que dit à ce sujet P. Langevin : « Les caractères de symétrie du phénomène de rotation et, en particulier, le fait que la rotation change de sens avec l'orientation de l'observateur suivant l'axe, exigent que la marche d'horloges portées par la plate-forme, ainsi que les dimensions de celle-ci et des règles qui lui sont liées, ne soient modifiées qu'au 2^e ordre en $\frac{\omega R}{c}$ par rapport à la marche d'horloges ou aux dimensions de règles de même construction liées à des observateurs sans rotation, ces modifications ne devant pas changer avec le signe de ω , ... »

« Il en résulte que, si l'on représente par x, y, z, t et x', y', z', t' les coordonnées d'espace-temps d'un même événement par rapport à des axes rectangulaires liés à la plate-forme et à

9. **L'expérience de Harress et les expériences de Dufour et Prunier.** — L'expérience de Harress [14], réalisée en 1912, donc un an avant celle de Sagnac, comporte à peu près le même dispositif, mais les trajets lumineux sur le disque se font dans des prismes réfringents. La vitesse de la lumière dans ces prismes est donc, non pas c , mais $\frac{c}{n}$, n étant l'indice de réfraction de la matière transparente. Quel que soit cet indice, le résultat est le même et le retard d'un des faisceaux sur l'autre est encore $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$ comme dans l'expérience de Sagnac.

Ce résultat se déduit facilement de la théorie de la Relativité par la « deuxième méthode » : en effet, d'après cette théorie, la vitesse de la lumière dans les prismes est $\frac{c}{n}$ par rapport à ceux-ci; les vitesses et les trajets des faisceaux étant égaux, la formule (4) s'applique, comme dans l'expérience de Sagnac, à l'arrivée des ondes au point L où les deux trajets se réunissent.

Comme c'est dans l'air qu'ont lieu les interférences (après la sortie des faisceaux des milieux réfringents), c'est encore par $\frac{c}{\lambda}$ qu'il faut multiplier le décalage temporel pour avoir le nombre de franges auquel il correspond.

Ce nombre, exprimé par la fraction $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c\lambda}$ est bien celui qui a été observé.

A. Dufour et F. Prunier [15] ont, de 1936 à 1941, exécuté plusieurs séries d'expériences au sujet de phénomènes lumineux sur un disque tournant du genre de celui de Sagnac, en variant les conditions de ces expériences et, notamment, en combinant des appareils fixes (source, prismes, miroirs, appareil photographique) avec d'autres, entraînés par le disque en mouvement. Le dispositif d'ensemble n'est alors illuminé qu'une fois par tour, par un éclair assez bref. Malgré cette brièveté, les expérimentateurs ont pu obtenir des franges très visibles, dont les déplacements sont fonction des mouvements de rotation du disque.

Ils ont d'abord repris l'expérience de Sagnac en remplaçant la source lumineuse entraînée par une source fixe, puis l'appareil photographique (également entraîné) par un appareil fixe. Les résultats n'ont montré aucune influence de l'état de repos ou de mouvement de la source, ni de cet appareil.

Ils ont également repris cette expérience en intercalant sur le trajet de la lumière des tubes remplis d'eau, fermés à chaque extrémité par des glaces normales aux faisceaux lumineux et ne participant pas à la rotation.

La théorie de cette dernière expérience se fait très facilement par la « première méthode » ⁽¹²⁾ [16]. En effet,

des axes sans rotation respectivement, les relations habituelles de la Cinématique ancienne subsistent au 1^{er} ordre entre ces deux systèmes de coordonnées.

⁽¹²⁾ Elle est beaucoup plus longue et délicate par la « seconde méthode », en raison de la nécessité de composer la vitesse de la lumière dans l'eau avec la vitesse (variable suivant le point considéré) de cette eau relativement au disque. Voir plus loin (Appendice).

si les parcours lumineux extérieurs aux tubes sont négligeables vis-à-vis de ceux qui sont effectués dans l'eau, le calcul de l'expérience de Sagnac (§ 8) s'applique, avec cette modification, que le temps mis par la lumière pour parcourir la longueur l n'est plus $\frac{l}{c}$,

mais $\frac{ln}{c}$, n étant l'indice de l'eau.

La différence de longueur des deux trajets est donc $\frac{4\omega\mathcal{A}n}{c}$.

Quel sera le décalage temporel entre les ondes des deux faisceaux, à leur arrivée sur la glace qui termine les parcours sur le disque ?

Si les surfaces terminales des tubes sont *parallèles* aux directions telles que $M_1M'_1$, c'est-à-dire normales aux rayons CM_1 , etc., les augmentations et diminutions de longueur des trajets ont lieu *proportionnellement* dans l'eau et dans l'air; donc, en vertu de la prépondérance des parcours dans l'eau, le décalage temporel sera

$$\frac{4\omega\mathcal{A}n}{c} : \frac{c}{n} = \frac{4\omega\mathcal{A}n^2}{c^2}.$$

Mais, dans l'expérience telle qu'elle a été effectivement faite, les tubes d'eau sont fermés par des vitres planes perpendiculaires aux directions des

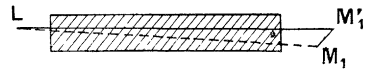


Fig. 8.

rayons lumineux. Il en résulte que les trajets dans l'eau sont forcément toujours les mêmes pour les faisceaux lumineux (dans un sens ou dans l'autre) que le disque tourne ou ne tourne pas (fig. 8). La différence des trajets porte alors uniquement sur des parcours dans l'air, bien que ceux-ci soient relativement petits (la différence en question est beaucoup plus petite). Le décalage temporel doit être alors

$$\frac{4\omega\mathcal{A}n}{c} : c = \frac{4\omega\mathcal{A}n}{c^2}.$$

C'est effectivement un déplacement de franges de cet ordre qui a été observé (et « d'autant plus voisin de cette valeur que le parcours lumineux extérieur aux tubes était plus petit »).

Enfin, ils ont réalisé un appareil du type de celui de Sagnac, où le circuit lumineux est composé de deux parties, dont une est fixe par rapport au laboratoire et l'autre solidaire du disque en rotation.

Le schéma du montage est représenté par les figures 9 et 10. La source de lumière S, la glace semi-transparente L et les miroirs K, J, D, E, F sont solidaires de la plate-forme, comme l'appareil photographique P. Les miroirs G, H, I sont fixes par rapport au laboratoire. Les deux faisceaux qui interfèrent suivent, l'un le trajet SLDEFGHIJKLP et l'autre SLKJIHGFEDLP. Le miroir H se trouve au-dessus du centre C du disque, le miroir G au-dessus de F et le miroir I au-dessus de J. Le raisonnement et le calcul du paragraphe 7 s'appliquent et le retard est encore $\frac{4\omega\mathcal{A}}{c^2}$, $\mathcal{A}$ étant l'aire CJKLDFC (dont il faut

retrancher l'aire du petit triangle DE, parcouru en sens inverse). On observe effectivement un déplacement des franges d'interférence correspondant à la fraction $\frac{1}{c\lambda} \frac{\omega \alpha}{c^2}$.

Les auteurs de cette expérience avaient pensé mettre en faute l'interprétation relativiste du résultat de Sagnac, en se basant sur un texte présentant cette interprétation et où le sommet des aires élémentaires (analogues aux aires CM'M₁ introduites dans le raisonnement du paragraphe 7), était donné comme

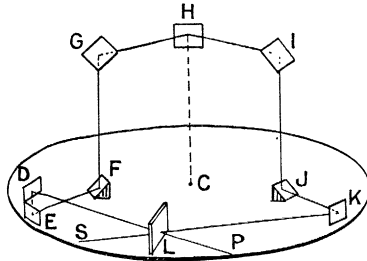


Fig. 9. — Appareil de Dufour et Prunier (perspective).

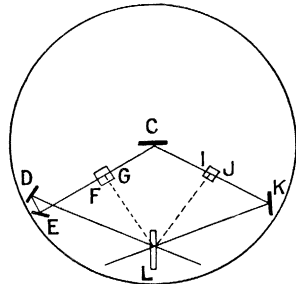


Fig. 10. — Appareil de Dufour et Prunier (plan).

« pouvant être choisi arbitrairement » [17]. En choisissant alors le point L, l'aire décrite par la « partie mobile » du circuit de la lumière se trouvait réduite à la somme des surfaces des triangles LJK et EFL, donc beaucoup plus petite que l'aire α précédente.

En réalité, les raisonnements tels que celui du paragraphe 7 et qui conduisent à la considération des « aires » décrites par les rayons lumineux (ou les mobiles considérés) supposent que le sommet C des aires élémentaires est le centre de la plate-forme mobile ⁽¹³⁾ et c'est seulement si l'aire est fermée que le résultat peut être généralisé (après coup) pour un sommet arbitraire.

Appliquant le raisonnement en question à l'ensemble

⁽¹³⁾ Par un mode de raisonnement et de calcul tout différent, M. O. Costa de Beauregard a montré (*C. R. Acad. Sc.*, 1940, **211**, 634 et *La théorie de la Relativité restreinte*, Paris, 1949, p. 50) qu'on pouvait choisir n'importe quel point du disque (et le point L, en particulier) comme « centre instantané de rotation » pour un calcul au 1^{er} ordre. Il faut alors adopter comme système de référence le système galiléen qui a, au moment considéré, la même vitesse que ce point du disque et tenir compte du décalage de la simultanéité entre ce système et celui du laboratoire, pour les trajets GHI (dans un sens) et IHG (dans l'autre). On retombe alors sur le résultat correct.

des trajets parcourus par la lumière sur le disque (LKJ et FDEL), on voit que le décalage temporel sur cet ensemble est bien $\frac{2\omega\alpha}{c^2}$ pour l'un des faisceaux par rapport au temps du système de Galilée [§7, form. (2), en négligeant le second terme puisqu'il s'agit de propagation lumineuse]. Les deux rayons parcourent ces trajets en sens inverse l'un de l'autre et, d'autre part, leurs trajets fixes sont les mêmes. Le décalage temporel entre les deux faisceaux est donc $\frac{4\omega\alpha}{c^2}$.

Les mêmes expérimentateurs ont refait la même expérience en plaçant des tubes d'eau sur le trajet fixe. Le résultat n'est pas changé, car le décalage temporel dû aux trajets mobiles est le même que dans l'expérience faite entièrement dans l'air et, d'autre part, les trajets fixes sont plus longs, mais ils sont toujours rigoureusement égaux pour les deux faisceaux.

Cette dernière expérience a été présentée d'abord comme un échec de la théorie de la Relativité, parce qu'elle montre que l'effet observé ne dépend que de la partie du circuit « entraînée » dans le mouvement du disque en la distinguant nettement par là de la partie « fixe ». En réalité, comme on vient de le voir, cet effet est exactement prévu par la théorie de la Relativité, qui n'admet de réciprocity complète qu'entre les systèmes de référence de Galilée, animés les uns par rapport aux autres de mouvements de translation uniforme.

10. Conclusions. — Nous avons examiné les principaux problèmes qui ont été posés en ce qui concerne les disques en rotation et particulièrement ceux qui correspondent à des expériences effectivement faites.

Celles-ci n'ont concerné, du moins jusqu'ici, que des phénomènes lumineux se passant, soit dans l'air, soit dans des corps réfringents, et comme les effets observés étaient du « premier ordre » au point de vue de la vitesse du disque, leur interprétation était également possible dans la théorie de la Relativité et dans la théorie classique de l'éther. Cette assertion, établie d'abord de façon générale, a été confirmée par l'examen détaillé des expériences, malgré la complication de certains dispositifs et les difficultés des raisonnements qui en résultent.

A ce sujet, il faut remarquer que la théorie de la Relativité — comme d'ailleurs la théorie de l'éther — n'est pas attachée à un procédé particulier de raisonnement ou de calcul. Dans les discussions qui ont eu lieu depuis le début du siècle, il semble que les physiciens « relativistes » aient cherché à relever des défis consistant à donner des interprétations « einsteiniennes » de certaines expériences — faites ou supposées — du point de vue de certains « observateurs », dont l'emplacement et le mouvement étaient souvent donnés *a priori* de façon précise. Il en est parfois résulté des rédactions hâtives où se sont glissées des assertions partiellement inexactes, qui ont amené des malentendus prolongés.

Comme toute théorie de physique mathématique, la Relativité permet de résoudre les problèmes de son domaine, chacun par un procédé adéquat. En particulier, un système de référence bien choisi permet

souvent de présenter les raisonnements et les calculs de façon particulièrement simple et claire (et parfois de façon rigoureuse), alors qu'un autre choix, au départ, conduirait à des difficultés peut-être inextricables. Si l'on a besoin ensuite de calculs dans un autre système, les formules de transformation de Lorentz permettent de passer des éléments déjà obtenus dans le premier, aux éléments dans ce nouveau système, sans qu'il soit besoin de recourir de nouveau aux principes généraux et de recommencer les raisonnements.

Dans l'ensemble, on peut dire que la théorie de la Relativité permet, dans ce domaine comme ailleurs, la plus grande simplicité dans la résolution des problèmes et l'interprétation des expériences, sans intervention d'hypothèses auxiliaires.

APPENDICE.

L'expérience de Harress par la première méthode et l'expérience de Dufour et Prunier par la seconde méthode. — Il est intéressant de comparer la théorie de l'expérience de Sagnac avec prismes réfringents interposés (réalisée par Dufour et Prunier) avec celle de l'expérience de Harress. Dans la première, les prismes étaient fixes par rapport au laboratoire, dans la seconde, ils étaient entraînés avec le disque dans son mouvement de rotation.

La théorie de l'expérience avec prismes fixes a été faite plus haut (§ 9) par la « première méthode » : les calculs y sont très simplifiés, en raison de la constance de la vitesse de la lumière sur les trajets des deux faisceaux.

Pour une raison analogue, la théorie de l'expérience de Harress (§ 9) a été très simplifiée par la « seconde méthode ».

En vue d'une comparaison plus poussée entre ces deux expériences, on peut se proposer de faire la théorie de l'expérience de Harress par la première méthode et celle de l'expérience de Dufour et Prunier avec prismes fixes interposés sur le trajet mobile, par la seconde méthode.

Nous supposons que, dans chacune de ces expériences, la presque totalité des parcours a lieu dans les milieux réfringents.

L'expérience de Harress par la première méthode. — Pour obtenir le décalage temporel entre les ondes ayant parcouru le circuit dans un sens et dans l'autre, il faut calculer séparément les temps mis par les ondes pour accomplir ces parcours et les retrancher l'un de l'autre. Les vitesses étant variables en chaque point du trajet, il est indispensable de considérer d'abord un élément infiniment petit du trajet et de faire une sommation.

Soit $MM_1 = dl$ cet élément mesuré sur le disque. Pendant que la lumière le parcourt, le point M_1 vient en M'_1 tel que

$$MM_1 = dl/v \frac{n'_1}{c},$$

v étant la vitesse du point du disque considéré par rapport au laboratoire et $\frac{c}{n'_1}$ la vitesse de la lumière dans le corps réfringent, par rapport au laboratoire.

Nous supposons d'abord qu'il s'agit du faisceau qui parcourt le circuit dans le sens de la rotation du disque, ou « premier faisceau ». Le trajet élémentaire est alors *allongé*, du fait de cette rotation, de la longueur

$$HM'_1 = M_1 M'_1 \cos \mu = dl/v \frac{n'_1}{c} \cos \mu,$$

μ étant l'angle que fait MM'_1 avec la direction de la vitesse de M_1 (normale au rayon CM_1).

L'élément de longueur parcouru par la lumière sur le disque et qui a pour longueur mesurée sur le disque dl , a donc pour longueur par rapport au système du laboratoire

$$dl + v \frac{n'_1}{c} \cos \mu dl$$

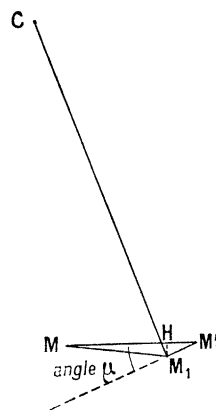


Fig. 11.

(en négligeant la contraction lorentzienne, qui est du second ordre en v).

Le trajet est parcouru, en chaque point, avec la vitesse $\frac{c}{n'_1}$. Le temps mis à le parcourir est donc

$$\frac{n'_1}{c} dl + v \cos \mu \frac{n'^2_1}{c^2} dl.$$

Le temps total sur le circuit est

$$\oint \frac{n'_1}{c} dl + \oint v \cos \mu \frac{n'^2_1}{c^2} dl.$$

Pour le second faisceau, le trajet élémentaire du même circuit est raccourci par la rotation et si $\frac{c}{n'_2}$ est la vitesse de la lumière sur ce faisceau, le temps total est

$$\oint \frac{n'_2}{c} dl - \oint v \cos \mu \frac{n'^2_2}{c^2} dl,$$

les sommations étant faites sur les *mêmes* éléments dl .

Le retard des ondes d'un des faisceaux sur l'autre est donc :

$$\oint \frac{n'_1 - n'_2}{c} dl + \oint \frac{n'^2_1 + n'^2_2}{c^2} v \cos \mu dl.$$

On peut remarquer que la première intégrale représente la différence des temps mis par les ondes pour parcourir le circuit tel qu'il est lorsque le disque ne tourne pas, et la seconde le décalage temporel résultant de la rotation.

tant de l'allongement d'un faisceau par la rotation, augmenté de celui qui résulte du raccourcissement de l'autre ⁽¹⁴⁾.

Il y a là deux facteurs qui jouent en sens opposé : en effet, si le premier facteur existait seul, les ondes du premier faisceau (dans le sens de la rotation du disque) prendraient de l'avance sur celles du second faisceau. Mais, en vertu du second facteur (allongement et raccourcissement), elles sont retardées.

La formule de Fresnel donne, au premier ordre, la vitesse de la lumière $\frac{c}{n'_1}$ en fonction de la vitesse dans le corps réfringent au repos $\frac{c}{n}$ et de la vitesse de ce corps dans la direction suivie par la lumière, qui est ici $v \cos \mu$

$$\frac{c}{n'_1} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu$$

ou

$$\frac{n'_1}{c} = \frac{n}{c + vn \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu}$$

De même,

$$\frac{c}{n'_2} = \frac{c}{n} - v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu$$

ou

$$\frac{n'_2}{c} = \frac{n}{c - vn \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu}$$

Alors,

$$\frac{n'_1 - n'_2}{c} = \frac{-2vn^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu}{c^2 - v^2 n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos^2 \mu}$$

ou, en négligeant les termes en v^2 devant c^2 ,

$$\frac{n'_1 - n'_2}{c} = \frac{-2v(n^2 - 1) \cos \mu}{c^2 - \dots}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} \frac{n'^2_1}{c^2} + \frac{n'^2_2}{c^2} &= \frac{n^2}{c^2 + 2vcn \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu + \dots} \\ &+ \frac{n^2}{c^2 - 2vcn \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu + \dots} \\ &= \frac{2n^2 c^2}{c^4 - \dots} = \frac{2n^2}{c^2 - \dots} \end{aligned}$$

⁽¹⁴⁾ Ces deux décalages étant de même sens doivent, en effet, s'additionner.

Notons que l'allongement étant $\int v \frac{n'_1}{c} \cos \mu \, dl$, le retard qui en résulte s'obtient en divisant par $\frac{c}{n'_1}$ (et non par c), car cet allongement a lieu sur chacun des éléments du trajet, qui sont en presque totalité parcourus dans le corps réfringent, entraîné avec le disque. (Le cas est donc très différent de celui de l'expérience avec prismes fixes.)

Si l'on remplace alors les termes en n'_1 et n'_2 par leurs valeurs ainsi calculées, le retard d'un des faisceaux sur l'autre s'écrit

$$\oint \frac{-2v(n^2 - 1) \cos \mu}{c^2} \, dl + \oint \frac{2n^2}{c^2} v \cos \mu \, dl.$$

Les termes en n^2 s'annulent, ce qui montre que les « facteurs » précédemment discernés (facteur d'avance et facteur de retard) se détruisent pour la plus grande part.

Il reste

$$\oint \frac{2v \cos \mu \, dl}{c^2}.$$

Or,

$$v \, dl \cos \mu = \omega r \, dl \cos \mu$$

en appelant r la distance CM_1 .

Si l'on désigne par $d\mathcal{A}$ l'aire élémentaire CMM_1 ,

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r \, dl \cos \mu.$$

Le retard d'un des faisceaux sur l'autre pour l'ensemble du circuit est donc

$$\oint \frac{4\omega \, d\mathcal{A}}{c^2} = \frac{4\omega \mathcal{A}}{c^2}.$$

L'expérience de Dufour et Prunier (avec prismes fixes sur le trajet mobile) par la seconde méthode (éléments calculés par rapport au disque) [18], [19]. — Le retard des ondes d'un des faisceaux sur l'autre résulte de l'addition :

1° de la différence entre le temps mis par les ondes du premier faisceau pour parcourir le circuit dans le sens de la rotation du disque et le temps mis par les ondes du second faisceau pour parcourir le circuit en sens inverse;

2° du décalage des temps locaux le long des trajets parcourus, qui est $\frac{4\omega \mathcal{A}}{c^2}$.

Si nous admettons que la presque totalité des parcours est exécutée dans le milieu réfringent et que la petite fraction qui a lieu dans l'air n'est pas modifiée du fait de la rotation du disque, le temps mis par les ondes du premier faisceau est $\oint \frac{n'_1}{c} \, dl$, $\frac{c}{n'_1}$ étant la vitesse de la lumière dans le corps réfringent par rapport au disque, au point considéré.

Le temps mis par les ondes du second faisceau est, de même $\oint \frac{n'_2}{c} \, dl$.

n'_1 et n'_2 peuvent être calculés, au premier ordre, par les formules de Fresnel, en partant du fait que la vitesse de la lumière dans le corps réfringent serait $\frac{c}{n}$ par rapport au disque, si ce corps était entraîné avec le disque.

Si l'on appelle v la vitesse du point M considéré du disque, par rapport au laboratoire, la vitesse de la matière réfringente par rapport au disque est égale à v et de sens contraire. Si l'on désigne par μ l'angle que fait, avec la direction de cette vitesse, le parcours dl ,

la composante de cette vitesse sur le trajet de la lumière au point M est $-v \cos \mu$.

Donc

$$\frac{c}{n_1} = \frac{c}{n} - v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu.$$

Dans l'autre sens,

$$\frac{c}{n_2} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu.$$

On peut écrire

$$\frac{n'_1}{c} = \frac{n}{c - vn \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu}$$

et

$$\frac{n'_2}{c} = \frac{n}{c + vn \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu}.$$

D'où

$$\frac{n'_1 - n'_2}{c} = \frac{2vn^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos \mu}{c^2 - \dots}$$

en négligeant v^2 devant c^2 .

La différence $\oint \frac{n'_1 - n'_2}{c} dl$ devient alors

$$\oint \frac{2v(n^2 - 1) \cos \mu}{c^2} dl$$

ou, en remplaçant v par ωr ,

$$\oint \frac{2(n^2 - 1)}{c^2} \omega r \cos \mu dl,$$

comme $r \cos \mu dl = 2 d\alpha$, l'intégrale devient

$$\oint 4\omega \frac{n^2 - 1}{c^2} d\alpha = 4\omega \frac{n^2 - 1}{c^2} \alpha.$$

Si l'on ajoute le décalage temporel (des temps mesurés le long des trajets), $\frac{4\omega\alpha}{c^2}$, le retard total est

$$4\omega \frac{n^2}{c^2} \alpha.$$

Ce résultat n'est valable, comme on l'a vu plus haut (§ 9), que si la proportion des parcours dans l'air et dans le milieu réfringent n'est pas modifiée du fait de la rotation du disque. Cette condition pourrait être réalisée si les faces terminales des prismes ou tubes renfermant ce milieu étaient parallèles aux directions telles que $M_1M'_1$, etc., c'est-à-dire perpendiculaires à CM_1 , etc.

En fait, elle n'a pas été réalisée dans les expériences effectivement exécutées jusqu'ici.

Les tubes remplis d'eau placés sur chaque élément rectiligne du trajet lumineux étaient, dans ces expériences, fermés par des surfaces normales à la direction de cet élément (fig. 8). Il en résulte que la partie de ce parcours effectuée à l'intérieur du tube reste constante si le disque est immobile ou est mis en

mouvement. L'allongement $lv \frac{n}{c} \cos M'_1$ que subit chaque élément rectiligne de longueur l du premier faisceau par la rotation du disque, a lieu uniquement dans l'air.

Or, pour les mesures faites sur le disque, cet élément garde, au total, sa longueur l . Il y a donc une fraction de cette longueur — dans la proportion de $\frac{vn}{c} \cos M'_1$ à 1 — où, en raison de la rotation du disque, la propagation dans le corps réfringent est remplacée par une propagation dans l'air.

Le temps mis par la lumière pour accomplir le parcours LM_1 n'est donc plus $\int \frac{n'_1}{c} dl$, mais

$$\int \frac{n'_1}{c} dl \left(1 - v \frac{n}{c} \cos M'_1 \right) + \frac{l}{c} \frac{n}{c} v \cos M'_1,$$

la sommation étant effectuée sur le parcours LM'_1 .

Pour le même parcours exécuté par la lumière en sens inverse (second faisceau), il y a, au contraire, augmentation relative du parcours dans l'eau ⁽¹⁵⁾ — pour les mesures prises sur le disque — et le temps mis pour accomplir le parcours M'_1L n'est plus $\int \frac{n'_2}{c} dl$, mais

$$\int \frac{n'_2}{c} dl \left(1 + v \frac{n}{c} \cos M'_1 \right) - \frac{l}{c} \frac{n}{c} v \cos M'_1.$$

La différence est donc

$$\int \frac{n'_1 - n'_2}{c} dl - \int \frac{n'_1 + n'_2}{c} \frac{n}{c} v \cos M'_1 dl + 2l \frac{n}{c^2} v \cos M'_1,$$

les sommations étant toujours effectuées sur le parcours LM'_1 .

La première intégrale est, d'après le calcul fait plus haut, égale à $4\omega \frac{n^2 - 1}{c^2}$ aire CLM'_1 .

Si l'on tient compte que

$$\frac{n'_1 + n'_2}{c} = \frac{2nc}{c^2 + \dots} = \frac{2n}{c^2},$$

en faisant les mêmes approximations que précédemment, la seconde intégrale devient

$$2 \frac{n^2}{c^2} lv \cos M'_1.$$

⁽¹⁵⁾ Ainsi, bien que l'on ait considéré les parcours dans l'air comme négligeables, au total, vis-à-vis des parcours dans l'eau, on a été conduit à tenir compte des variations de ces parcours, dues à la rotation du disque, variations dont les conséquences se trouvent être de l'ordre de grandeur des effets observés.

Si l'on ne néglige pas les parcours lumineux dans l'air, on trouve, par les mêmes raisonnements, que le retard des ondes est

$$4\omega \alpha \frac{n^2}{c^2} - 4\omega \alpha \frac{1}{c^2}.$$

en désignant par α , l'aire balayée par le rayon CM du disque et correspondant à des parcours dans l'eau, et α_a l'aire correspondant à des parcours dans l'air.

Or,

$$lv \cos M'_1 = 2 \omega \text{ aire CLM}_1.$$

La différence des temps sur le parcours LM'_1 s'écrit donc

$$\begin{aligned} 4 \omega \frac{n^2 - 1}{c^2} \text{ aire CLM}_1 - 4 \omega \frac{n^2}{c^2} \text{ aire CLM}_1 \\ + 4 \omega \frac{n}{c^2} \text{ aire CLM}_1 = 4 \omega \frac{n - 1}{c^2} \text{ aire CLM}_1. \end{aligned}$$

Pour l'ensemble du circuit, la différence des temps

est $4 \omega \frac{n - 1}{c^2} \alpha$. Et si l'on ajoute le décalage des temps eux-mêmes, qui est $\frac{4 \omega \alpha}{c^2}$, on voit que le retard total des ondes du premier faisceau sur celles du second, à leur arrivée sur la glace semi-transparente après un circuit complet, est $\frac{4 \omega n \alpha}{c^2}$.

Manuscrit reçu le 11 décembre 1952.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] EINSTEIN A. — *La théorie de la Relativité restreinte et généralisée*, trad. Rouvière, Paris, 1921, p. 70.
- [2] METZ A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1924, **178**, 2054.
- [3] LANGEVIN P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1921, **173**, 831, et 1937, **205**, 304.
- [4] PRUNIER F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 46; *Revue scientifique*, 1948, **86**, 729.
- [5] LANGEVIN P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 48 et 894.
- [6] METZ A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 1185.
- [7] DUFOUR A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 894.
- [8] COSTA DE BEAUREGARD O. — *Revue scientifique*, 1948, **86**, 424.
- [9] PRUNIER F. — *Revue scientifique*, 1948, **86**, 729.
- [10] LANGEVIN P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **200**, 1162.
- [11] SAGNAC G. — *C. R. Acad. Sc.*, 1913, **157**, 708 et 1410; *J. Physique Rad.*, 1914, **4**, 177.
- [12] LAUE M. VON. — *Die Relativitätstheorie*, 1919, p. 74 et 125.
- [13] BECQUEREL J. — *Le principe de Relativité et la théorie de la gravitation*, Paris, 1922, p. 77.
- [14] HARRESS F. — *Die Geschwindigkeit des Lichts in bewegten Körpern*, Iéna, 1912.
- [15] DUFOUR A. et PRUNIER F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1937, **204**, 1025 et 1939, **208**, 988; *J. Physique Rad.*, 1942, **3**, 153; *Archives des Sciences physiques et naturelles*, Genève, 1946, **28**, fasc. 5.
- [16] METZ A. et PRUNIER F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 185.
- [17] LANGEVIN P. — *C. R. Acad. Sc.*, 1937, **205**, 51.
- [18] METZ A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 597.
- [19] METZ A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 705.