Sur le caractère ouvert de la mécanique ondulatoire

Paulette Destouches-Février

SUR LE CARACTÈRE OUVERT DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Par Paulette DESTOUCHES-FÉVRIER.

Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — Une théorie Th_1 est dite *plus complète* qu'une théorie Th_0 s'il existe une grandeur A de Th_1 ignorée de Th_0, la théorie Th_1 fournissant les mêmes prévisions que Th_0 dans le domaine d'adéquation de Th_0 à partir des même résultats de mesures initiales.

On montre qu'une mécanique ondulatoire, et plus généralement une théorie essentiellement indéterministe, est une théorie ouverte ou incomplète, en ce sens qu'on peut toujours supposer qu'elle laisse échapper des « grandeurs ignorées », grandeurs dont on peut tenir compte dans une théorie plus complète qui aura nécessairement même structure. Une théorie déterministe, au contraire, est complète, et l'on peut y définir des systèmes identiques, ce qui est impossible dans une théorie subjectiviste, où l'on peut seulement définir des *systèmes semblables*. Ainsi, on ne peut espérer remplacer une théorie essentiellement indéterministe par une théorie plus complète qui serait déterministe. On examine enfin divers essais difficilement acceptables de constrution d'une théorie déterministe pour la microphysique.

1. **Définition d'une théorie plus complète qu'une autre.** — Nous nous proposons d'examiner ici la thèse de certains auteurs, notamment Einstein [1], selon lesquels la Mécanique ondulatoire est une théorie incomplète, fournissant des phénomènes physiques une description partielle.

Nous partirons de cette condition minimale qu'une théorie physique, à partir du résultat de mesures initiales, doit permettre le calcul de prévisions concernant les résultats de mesures ultérieures, prévisions s'exprimant en général par des probabilités. Ceci nous permet de placer la discussion dans le cadre précis de la théorie générale des prévisions [2].

Si la Mécanique ondulatoire (en abrégé Th_{MO}) est incomplète, il doit être alors possible de construire une théorie Th plus complète. Cette théorie Th, comme Th_{MO}, doit permettre le calcul de prévisions. On peut donc utiliser dans Th le formalisme de la théorie générale des prévisions [3], [5]. Alors, chaque connaissance fournie par une mesure permise par les lois de Th_{MO} donne aussi une connaissance en Th, mais il y a au moins une grandeur A de Th (grandeur qui peut ne pas être effectivement mesurable) ignorée par Th_{MO}, sinon Th ne serait pas plus complète que Th_{MO}.

Ceci nous conduit à poser cette définition :

Définition. — Une théorie Th_1 sera dite *plus complète* qu'une théorie Th_0 s'il existe une grandeur A de Th_1 ignorée par Th_0, la théorie Th_1 fournissant les mêmes prévisions que Th_0 dans le domaine d'adéquation [4] de Th_0 à partir des mêmes résultats de mesures initiales.

Cela signifie qu'il existe dans Th_1 un opérateur $\mathbf{A}$ ayant les propriétés des opérateurs associés aux grandeurs physiques (1) et qu'il n'est pas possible de définir dans Th_0 un opérateur $\mathbf{A}_0$ ayant les mêmes propriétés que $\mathbf{A}$.

2. **Premier cas de théorie plus complète.** — Un premier cas de théorie Th_1 plus complète que Th_0 est celui où il y a au moins une grandeur complète (2) en Th_0 qui ne l'est pas en Th_1. Si Th_0 est Th_{MO} il y a au moins un cas de mesure qui détermine une fonction d'onde unique ψ en Th_{MO} (grandeur maximale ou grandeur complète) et qui, dans Th, ne détermine qu'un ensemble E_ψ d'éléments de prévision X. De cette façon, s'établit une correspondance qui permet de définir une relation d'équivalence dans l'ensemble des éléments de prévision de Th

$$X_1 \equiv X_2 \bmod Th_{MO} \quad =_d \quad X_1 \in E_\psi \leftrightarrow X_2 \in E_\psi,$$

c'est-à-dire que X_1 est équivalent à X_2 si tous deux appartiennent au même E_ψ; cette relation est réflexive, symétrique, transitive.

Dire dans ce cas que Th est plus complète que Th_{MO} revient donc à dire qu'il y a des opérateurs, non dégénérés en Th_{MO} (opérateurs associés aux grandeurs complètes), qui en Th sont dégénérés.

(1) On démontre en théorie générale des prévisions qu'il n'y a aucune hypothèse physique dans le fait d'associer un opérateur à une grandeur physique, c'est seulement un procédé mathématique commode. Ce n'est que dans la forme analytique de l'opérateur que le contenu physique s'introduit, mais ici nous n'avons pas à considérer cette forme. Pour les propriétés générales des opérateurs associés aux grandeurs, se reporter aux ouvrages [2], [3].

(2) Pour la définition d'une *grandeur complète*, de l'opération de composition & et de la dérivation, se reporter à J. L. Destouches. *J. Physique Rad.*, 7e série, 1936, **7**, p. 354-360 et aux ouvrages [2], [3], [5].

Dans Th on peut alors définir des grandeurs au sens élargi telles que l'on obtienne des grandeurs complètes, par exemple de la façon suivante : soit C une grandeur complète dans $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, incomplète dans Th; on peut définir B dans Th telle que $C\&B$ soit complète. En effet B sera bien définie par son opérateur **B** et celui-ci par ses éléments propres et valeurs propres. Fixons que :

1° Tout élément propre de C dans Th est élément propre de B;

2° Deux éléments du même $\mathrm{E}_{\psi_{C,a}}$ associé à chaque élément propre $\psi_{C,a}$ de C dans $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$ correspondent à des valeurs propres différentes de B (Si les $\mathrm{E}_{\psi_{C,a}}$ n'ont pas tous même puissance, alors à la valeur a de C n'est pas associée n'importe quelle valeur de B, mais seulement certaines compatibles avec a et seuls les $\mathrm{E}_{\psi_{C,a}}$ qui ont la plus grande puissance parmi tous les $\mathrm{E}_{\psi_{C,a}}$ correspondent à tout le spectre de B).

Ces deux conditions fixées, on peut achever arbitrairement la définition de B.

De cette façon, on a construit une théorie Th qui, pour les grandeurs prises en considération dans $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, fournit les mêmes prévisions que $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$ et qui fait intervenir des grandeurs ignorées par $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, qui donc est plus complète que $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$.

Un exemple de ce cas de théorie plus complète est celui où $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$ désigne la mécanique ondulatoire non relativiste sans spin et où Th désigne la mécanique ondulatoire avec spin. Les composantes du « spin » d'un corpuscule sont des grandeurs ignorées par la première théorie et dont la seconde tient compte, tout en fournissant les mêmes prévisions dans le domaine d'adéquation de la première. Dans ce cas, la grandeur B, dans le raisonnement précédent, sera formée par exemple d'une composante σ_z du spin et du carré σ^2 du spin, soit

$$B = \sigma_z \& \sigma^2.$$

3. **Second cas de théorie plus complète.** — L'autre cas sera celui où toute grandeur complète de Th_0 est encore une grandeur complète de Th_1, mais il y a au moins une grandeur A de Th_1 ignorée par Th_0. Ce cas est à diviser en deux sous-cas :

1° Il existe des grandeurs figurant dans Th_0, soit D, composables dans Th_1 avec A;

2° A n'est composable avec aucune grandeur de Th_0. Notons qu'il peut exister à la fois des grandeurs telles que B et des grandeurs telles que A.

Lorsque l'on est dans le cas envisagé maintenant, un ensemble fondamental des grandeurs complètes de Th_1 est plus riche qu'un ensemble semblable de Th_0. En effet, dans les deux sous-cas, à partir de A et d'autres grandeurs de Th_1, on peut former une grandeur complète ignorée de Th_0.

Dans le cas où A est composable avec au moins une grandeur D de Th_0, on peut considérer une grandeur D_1 telle que A est composable avec D_1, mais il n'existe pas de grandeur F composable avec D_1 et ne dérivant pas de D_1, telle que A soit composable avec $D_1\&F$. La grandeur D_1 joue alors dans le passage de Th_0 à Th_1 un rôle analogue à celui de C dans le premier cas. A un résultat de mesure de D_1 correspond un ensemble $\mathbf{e}$ de fonctions d'ondes. (D_1 étant supposée incomplète, cet ensemble pourrait être réduit dans Th_0, et par suite dans Th, par mesure d'une grandeur F venant compléter D_1, mais $D_1\&F$ serait par hypothèse incomposable avec A). A cet ensemble $\mathbf{e}$ correspond dans Th un ensemble $\mathrm{E}_{\mathbf{e}}$ d'éléments de prévision. En mesurant $A\&D_1$, ou une grandeur $A\&B\&D_1$ complète dans Th si $A\&D_1$ est incomplète dans Th, on peut décomposer les éléments de $\mathrm{E}_{\mathbf{e}}$ en classes d'un seul élément, mais on peut définir une relation d'équivalence sur les éléments de prévision de Th comme dans le premier cas :

$$\mathrm{X}_1 \equiv \mathrm{X}_2 \bmod D_1 \quad =_{\mathrm{d}} \quad \mathrm{X}_1 \in \mathrm{E}_{\mathbf{e}} \leftrightarrow \mathrm{X}_2 \in \mathrm{E}_{\mathbf{e}}.$$

4. **Propriété fondamentale d'une théorie plus complète.** — Une théorie Th_1 ne peut remplacer une théorie Th_0 (en particulier ne peut remplacer $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$) que si elle fournit les mêmes prévisions (ou des prévisions très voisines) que celles de Th_0 dans son domaine d'adéquation. Il en résulte que *si deux grandeurs A, B sont non simultanément mesurables en droit dans* Th_0, *elles le sont encore dans toute théorie plus complète* Th. En effet, si cela n'avait pas lieu les prévisions seraient différentes en vertu d'un résultat de la théorie générale des prévisions [5] et l'une des deux théories serait inadéquate; or nous supposons Th_0 adéquate.

Dans $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, il y a x et p_x qui sont non simultanément mesurables, donc x et p_x le sont encore dans Th plus complète en vertu de ce qui précède; par suite, Th est essentiellement indéterministe [5], et le principe de décomposition spectrale y est valable [6]; Th est donc encore une théorie ondulatoire. On peut de nouveau lui appliquer le même processus et faire intervenir de nouvelles grandeurs cachées analogues à A. D'où :

Théorème. — 1° *Une mécanique ondulatoire est une théorie ouverte (ou incomplète) en ce sens qu'on peut la remplacer, avec mêmes prévisions, par une théorie plus complète faisant intervenir des grandeurs ignorées de la mécanique ondulatoire.*

2° *Cette théorie plus complète est, elle aussi, une mécanique ondulatoire et possède les mêmes propriétés fondamentales que la première : indéterminisme essentiel et caractère ouvert.*

Ceci montre, non seulement que la mécanique ondulatoire est ouverte, mais qu'il en sera de même de toute théorie plus complète qu'elle : une mécanique ondulatoire est une théorie essentiellement incomplétable.

5. **Considérations sur l'hamiltonien.** — Dans la théorie plus complète Th, on peut être conduit à remplacer l'hamiltonien $\mathbf{H}$ (correspondant exactement à celui de $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$) par un hamiltonien $\mathbf{H}'$ dans lequel interviendront les grandeurs ignorées par $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$ (cas où Th est la mécanique ondulatoire avec spin, $\mathbf{H}'$ étant l'hamiltonien qui tient compte des termes où figure le spin; un processus semblable se présente pour le spin isotopique).

Dans le premier cas de théorie plus complète (*cf.* § 2), l'hamiltonien $\mathbf{H}_1$ de Th, fournissant les mêmes prévisions que celles issues de $\mathbf{H}_0$ pour les grandeurs de $\mathrm{Th}_{\mathrm{MO}}$, n'est pas univoquement déterminé, car on peut faire évoluer arbitrairement les éléments d'un $E_{\psi(t)}$ pourvu qu'ils demeurent dans cet ensemble. On a

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{K}.\mathbf{H}_0,$$

où $\mathbf{H}_0$ laisse invarié chaque élément d'un $E_{\psi(t)}$, une fois fixée une ordination des éléments de chaque E_ψ, et où $\mathbf{K}$ transforme les éléments d'un $E_{\psi(t)}$ en euxmêmes; $\mathbf{K}$ définit un automorphisme dans les $E_{\psi(t)}$. En ne tenant compte que des grandeurs de Th_0, l'opérateur $\mathbf{K}$ demeure indéterminé. Mais si l'expérience permet de mettre en évidence une grandeur ignorée par Th_0, alors $\mathbf{H}_1$ va se trouver déterminé (au moins en partie) lorsque l'on tiendra compte de ces exigences expérimentales nouvelles. On essaiera alors d'élargir le domaine d'adéquation et l'opérateur $\mathbf{H}_1$ pourra se trouver remplacé par un opérateur $\mathbf{H}_2$ tel que

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 + \mathbf{L} = \mathbf{K}.\mathbf{H}_0 + \mathbf{L}.$$

La théorie plus complète Th peut être telle qu'il n'y ait pas d'hamiltonien en général, mais dans le domaine d'adéquation de Th_0 on pourra en définir un.

6. **Caractère ouvert et systèmes identiques.** — Cherchons à définir deux systèmes identiques. Considérons un ensemble de N systèmes physiques. Nous pouvons le décomposer en classes telles que deux systèmes de même classe admettent même hamiltonien (donc même structure). Nous pouvons aller plus loin et décomposer un ensemble de N' systèmes ayant même hamiltonien en classes de systèmes admettant, à partir de mesures complètes faites à t_0, t'_0, ..., $t_0^{(n)}$, des fonctions d'ondes identiques rapportées à des repères galiléens $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_n$. *Pour que deux systèmes soient identiques, il est nécessaire qu'on ne puisse pas décomposer en sous-classes une classe de systèmes définis comme identiques.* Appelons cette condition : *condition de prédicativité de l'identité.*

Par suite du caractère ouvert d'une mécanique ondulatoire, on peut imaginer des grandeurs ignorées, A, par exemple; alors, par rapport à la théorie Th contenant A, tous les systèmes d'une classe admettant même ψ peuvent être décomposés en sous-classes, deux systèmes appartenant à la même sous-classe s'ils ont même élément de prévision X de Th. Deux systèmes d'une même sous-classe seront alors appelés *systèmes semblables* [7]. Ils ne peuvent pas être considérés comme identiques, car le même processus peut être appliqué à la théorie Th en raison de son caractère ouvert. Il résulte alors de ce qui précède :

Théorème. — *Dans toute théorie ondulatoire (c'est-à-dire dans toute théorie subjectiviste), en vertu du caractère incomplet (ou ouvert), on ne peut définir de systèmes identiques, car on ne peut affirmer que des systèmes équivalents (c'est-à-dire de même classe) le demeureront dans une théorie plus complète.*

En effet, des systèmes identiques doivent satisfaire à la condition de prédicativité de l'identité; or, le caractère ouvert d'une théorie ondulatoire empêche d'affirmer toute prédicativité.

D'autre part, pour être prise en considération en physique théorique, la définition de l'identité de deux systèmes doit être telle qu'on possède un procédé expérimental pour la reconnaître, ce qui ne peut être réalisé qu'au moyen de mesures. Mais les résultats de mesures sont décrits par les fonctions d'ondes initiales (ou éléments initiaux). A celles-ci on peut appliquer le processus précédent de passage à une théorie plus complète, d'où ce résultat :

Théorème. — *En vertu du caractère ouvert (ou incomplet) d'une mécanique ondulatoire, il est impossible de donner une définition de deux systèmes identiques qui soit accessible à l'expérience et satisfasse à la condition de prédicativité. On peut seulement définir des « systèmes semblables » relativement à un formalisme de prévision, l'intervention de grandeurs ignorées permettant toujours de décomposer en sous-classes des systèmes semblables au sens précédent.*

7. **Caractère complet ou fermé d'une théorie déterministe.** — Considérons une théorie déterministe Th_0. Est-elle ouverte dans le même sens que la mécanique ondulatoire ? Pour une telle théorie, le formalisme des prévisions peut être réduit à un schéma ponctuel dans un espace de phases : on peut définir dans ce cas une grandeur d'état G dont les résultats de mesures imprécis sont des ensembles de points d'un espace (Γ) dit *espace de phase.* Le point figuratif M du système à l'instant t dans (Γ) est appelé « *état* » du système à cet instant. Si l'état du système n'est pas connu exactement on peut établir qu'on est libre de supposer qu'il est

un point déterminé, mais inconnu de l'ensemble des états possibles, d'après les connaissances acquises. Ceci s'exprime encore en disant qu'un résultat de mesure imprécis de toute grandeur est *analysable* (3). Si l'on connaît l'état à t_0, soit M_0, celui-ci est déterminé à tout instant par une correspondance ponctuelle dans l'espace (Γ)

$$M(t) = \mathbf{U}(t, t_0) M_0.$$

Mais, dans ce cas, on peut aussi constituer un formalisme général et considérer une théorie plus complète Th, comme dans le cas de la mécanique ondulatoire. Alors il y a un ensemble E_ψ d'éléments de prévision X de Th associés à une valeur de la grandeur d'état G, à laquelle il correspond un élément de prévision ψ dans le formalisme équivalent à celui de la théorie déterministe Th_0. Deux cas sont alors possibles : ou bien il existe dans Th une grandeur A non simultanément mesurable avec G, ou bien dans Th il y a au moins une grandeur B ignorée par Th_0 telle que B et G soient simultanément mesurables et que $B\&G$ soit une grandeur complète.

Dans ce dernier cas une mesure précise de $B\&G$ fournit un élément de prévision X bien déterminé unique. Mais si Th est plus complète que Th_0, alors Th et Th_0 fournissent les mêmes prévisions à partir des mêmes connaissances et la connaissance de la valeur de G à t_0 suffit pour déterminer à tout instant t la valeur de cette grandeur G. Ainsi la valeur de G évolue indépendamment des valeurs des grandeurs ignorées. Il y a séparation : les prévisions pour les valeurs des grandeurs ignorées peuvent dépendre ou ne pas dépendre de G, et même Th peut être une théorie essentiellement indéterministe, mais *G évolue indépendamment des valeurs des grandeurs ignorées : G est une grandeur auto-prévisible dans* Th. Comme G peut être considérée séparément des grandeurs ignorées, la théorie Th_0 est en quelque sorte fermée. Si deux systèmes « identiques » relativement à Th_0 ne le sont plus relativement à Th, néanmoins s'ils comportent la même valeur pour G, ils évolueront de manière à fournir toujours la même valeur pour G.

Soit Th_0 une théorie déterministe et une théorie Th plus complète que Th_0. Deux éventualités sont à distinguer :

1° Th est une théorie déterministe ;

2° Th est une théorie essentiellement indéterministe.

Dans le premier cas Th possède une grandeur d'état G_1; alors nécessairement

$$G_1 = G \& A,$$

A étant une grandeur ignorée par Th_0. A la grandeur d'état G_1 correspond pour Th un espace de phases (Γ_1). Cet espace est alors le produit direct de l'espace (Γ) et d'un espace (R_A) qui n'est autre que l'espace des observations de A.

Le point M_1 figuratif de l'état du système est alors tel que sa projection sur (Γ) évolue d'une façon autonome, selon les lois de Th_0; par suite, la projection sur (R_A) évolue aussi d'une façon autonome. En somme, si l'on met en évidence une grandeur ignorée, la théorie ainsi complétée restant déterministe, il y a séparation et la partie du système caractérisée par G évolue toujours de même (toutefois, dans le domaine expérimental élargi et décrit par Th, la séparation peut cesser d'avoir lieu, mais elle existe dans le domaine d'adéquation de Th_0). Deux systèmes identiques S_0 et S'_0 de Th_0, qui évoluent de même, apparaissent dans Th comme deux parties séparables identiques de systèmes S et S_1 (S et S_1 peuvent naturellement ne pas être identiques; dans ce cas, leurs parties complémentaires S_A et S'_A ne sont pas identiques).

Ainsi pour une théorie déterministe que l'on complète au moyen de grandeurs ignorées et qui demeure déterministe, ceci revient à ajouter des paramètres nouveaux séparables de ceux considérés primitivement. Des systèmes identiques demeurent identiques en étant considérés comme parties de systèmes plus complets. C'est en cela que consiste le caractère complet d'une théorie déterministe par rapport aux grandeurs ignorées.

Dans le second cas, Th est une théorie ondulatoire. La grandeur G apparaît alors dans Th comme une grandeur auto-prévisible, mais le système S_0 n'apparaît pas comme une partie d'un système S étudié dans Th, c'est toujours S_0 qui est étudié; il y a cette fois au moins une grandeur A ignorée de Th_0 non simultanément mesurable avec G; si l'on mesure G, cette grandeur évolue d'une façon autonome comme dans Th_0, mais si l'on mesure une grandeur telle que A, on ne peut plus sans contradiction supposer que G a une valeur déterminée mais inconnue, cela en vertu des propriétés des théories essentiellement indéterministes. Dans ce cas, lors du passage de Th_0 à Th, le caractère complet de la théorie déterministe est perdu. Lorsque l'on mesure G, vis-à-vis de la grandeur G et de celles qui en dérivent, les caractères déterministes subsistent; ils s'effacent si l'on mesure une grandeur incomposable avec G; cette fois, on passe au caractère ouvert des théories ondulatoires.

8. **Propriétés des grandeurs auto-prévisibles.** — Considérons dans une théorie Th essentiellement subjectiviste une grandeur auto-prévisible A_1 (on montre qu'à chaque grandeur A on peut associer une grandeur A_1 auto-prévisible et qui, à une époque t_0, ait même valeur que A; il en existe donc dans toute théorie Th, en particulier il en existe qui sont en même temps complètes). Pour une telle grandeur A_1, on établit aisément que :

(3) P. Destouches-Février, *Structure des théories physiques*, p. 95.

THÉORÈME. — *A toute grandeur auto-prévisible A_1 d'une théorie essentiellement indéterministe* Th, *on peut associer une théorie partielle* Th_0 *telle que* Th *soit une théorie plus complète que* Th_0 *et telle que* Th_0 *soit une théorie déterministe dont la grandeur d'état est cette grandeur auto-prévisible* A_1.

En particulier, ceci explique pourquoi on peut construire des théories partielles des mécaniques ondulatoires qui soient des théories déterministes (mais il est impossible de construire une théorie déterministe équivalente à une mécanique ondulatoire).

9. **Déterminisme et théorie microphysique.** — Lorsque des auteurs soulèvent la question du caractère incomplet d'une mécanique ondulatoire, c'est dans l'espoir de pouvoir remplacer celle-ci par une théorie déterministe. De ce qui précède, on arrive à :

THÉORÈME. — *En cherchant à compléter une théorie ondulatoire par des grandeurs ignorées, on ne peut pas rétablir le déterminisme.*

Examinons cependant de plus près le cas d'une théorie déterministe qu'on chercherait à substituer à une mécanique ondulatoire. On poserait d'abord que « tous les renseignements fournis par la connaissance de la fonction d'onde sont nécessaires mais non suffisants pour déterminer entièrement le devenir d'un système parmi les systèmes semblables représentés par ψ » ([4]).

Mais on sait, d'après les résultats de von Neumann [8], ainsi que ceux de J. Solomon [9], que cette connaissance ne peut pas être complétée par des paramètres cachés. D'après ce qui précède, elle ne peut pas non plus être complétée par l'intervention de grandeurs ignorées, puisqu'en les faisant intervenir on obtient une théorie de même structure que celle dont on est parti. Pourrait-on cependant, au moyen d'un autre procédé, obtenir une théorie microphysique déterministe ? Examinons les caractères que présenterait une telle théorie, soit Th_D. Etant déterministe, elle posséderait une grandeur d'état G et la valeur de l'état serait représentée par un point d'un espace de phase (Γ). Trois cas sont à envisager :

1° G est une grandeur de la mécanique ondulatoire Th_{MO}.

2° G est la composée d'une grandeur complète C de Th_{MO} et d'une grandeur ignorée par Th_{MO}, soit

$$G = C \,\&\, A.$$

Alors, en considérant une théorie Th_1 plus complète que Th_{MO} et contenant A on est ramené au premier cas. Dans ces deux cas, il existe au moins une grandeur B incomposable avec G (cas 1°) ou avec C (cas 2°). Sinon Th_{MO} serait déterministe en droit, contrairement à l'hypothèse. D'après une propriété des théories essentiellement indéterministes ([5]), dans ce cas il est impossible, sans introduire des contradictions, de supposer que le résultat imprécis d'une mesure pour une grandeur peut être considéré comme identique à ce même résultat complété de la supposition que cette grandeur a une valeur déterminée mais inconnue. C'est ce qu'on exprime en disant que les résultats de mesures sont *inanalysables*. Par conséquent, dans ces deux cas, on ne peut supposer que G a une valeur déterminée, mais inconnue.

3° Le troisième cas est celui où G est sans rapport avec les grandeurs mesurées. Alors cet état G peut être qualifié de métaphysique. Ceci vient encore exclure certaines hypothèses concernant la substitution d'une théorie déterministe à la mécanique ondulatoire. Si donc on cherche une théorie microphysique déterministe, son lien avec la mécanique ondulatoire doit être plus subtil.

On pourrait envisager une connexion de ce genre :

1° A une fonction d'ondes ψ correspond un certain ensemble E_ψ de points de (Γ). Ainsi, à une fonction d'ondes, c'est-à-dire à un résultat précis d'une grandeur complète, correspond un ensemble de valeurs possibles pour l'« état » du système. La théorie étant déterministe, il existe une transformation ponctuelle dans l'espace (Γ) qui transforme l'état initial M_0 du système en l'état M_t à l'instant t, soit

$$M_t = \mathbf{U}(t,\ t_0) M_0.$$

2° Lors d'une mesure à une époque t_1, l'« état » est « troublé », c'est-à-dire que le passage de $M_{t_1-\varepsilon}$ à $M_{t_1+\varepsilon}$ l'intervalle de temps 2ε correspondant à la mesure), n'est pas défini par une transformation ponctuelle, mais est indéterminé selon les lois quantiques : $\mathbf{U}(t,\ t_0)$ n'est définie que pour l'intervalle de temps (t_0, $t_{1-\varepsilon}$) séparant deux mesures consécutives. Après la seconde mesure, $\mathbf{U}$ décrit de nouveau l'évolution de l'état du système et l'on aura

$$M_t = \mathbf{U}(t,\ t_1) M_1,$$

M_1 étant la position du point figuratif de l'état (supposé déterminé, mais inconnu) à la fin de la mesure faite à t_1. De cette façon, on rétablit le déterminisme sauf pendant les époques de mesures, où le fait d'effectuer la mesure perturbe l'état d'une façon imprévisible, de manière que les exigences quantiques soient respectées. Mais on remarquera alors que *dans une telle théorie une mesure provoquerait une interaction entre système et appareil, d'un type tout différent de celui de l'interaction entre les diverses parties d'un système physique,* puisque pour les interactions entre parties d'un système il y a déterminisme et lors d'une mesure il y a indéterminisme.

([4]) *Voir* [7], p. 446.

([5]) P. DESTOUCHES-FÉVRIER. *Thèse*, Paris, 1945.

Autrement dit, on ne satisfait pas à cette exigence, remplie dans les théories classiques et dans les théories quantiques, selon laquelle une mesure consiste à coupler un appareil qui est un système physique avec le système physique observé, si bien que pour un autre observateur l'ensemble appareil-système apparaisse comme un système physique. Même en prétendant que le « trouble » est instantané et se produit quand on établit le couplage ou quand on le supprime, on ne pourrait pas satisfaire à cette condition dans l'hypothèse que nous envisageons.

La suppostion qu'une grandeur G a une valeur déterminée mais inconnue entraîne contradiction si l'on a fixé la valeur d'une grandeur incomposable avec G. Alors la grandeur d'état de la théorie considérée n'a pas de lien direct avec les grandeurs mesurables, c'est une *grandeur inaccessible*. On doit se poser la question : quelles prévisions peut-on faire à partir de l' « état » M_t ? On voit bien qu'on peut prévoir exactement l'« état » ultérieur tant qu'on ne fait pas de mesure. Si l'on fait une mesure à une époque t_1, on ne peut plus prévoir l'état pour $t > t_1$; mais les prévisions doivent concerner les résultats de mesures effectives. Or ces prévisions ne peuvent être plus fortes que celles de la mécanique ondulatoire, sinon il y a contradiction ou inadéquation.

Pour plus de précision, les conditions auxquelles devrait satisfaire une théorie microphysique déterministe sont résumées ci-dessous :

1° Il existe un « état » déterminé mais inconnu du système considéré, d'où un espace des états (Γ) ou espace de phase, avec une transformation ponctuelle $\mathbf{U}$ (t, t_0) réglant son évolution. Cet état est inaccessible à l'expérience.

2° Lors d'une mesure, il n'y a plus transformation ponctuelle des états entre $t_1 - \Delta t$ et $t + \Delta t$, si t_1 est l'époque d'une mesure et $2\,\Delta t$ sa durée; on dit que l'état est « troublé » par la mesure.

Mais il faut bien remarquer que cet état n'est pas troublé d'une façon quelconque; en effet :

Si la transformation ponctuelle entre $t_1 - \Delta t$ et $t_1 + \Delta t$ est supposée déterminée mais inconnue, tout revient, soit à rendre analysable un résultat de mesure imprécis, ce qui est en contradiction avec les lois quantiques, soit à faire une théorie purement métaphysique c'est-à-dire sans lien avec l'expérience.

Alors, ou bien le système $(S + \mathcal{A})$, système-observé-appareil-de-mesure n'obéit pas à des lois ponctuelles d'évolution dans son espace de phase, ou bien la loi de l'interaction de S avec $\mathcal{A}$ n'est pas la même que celle de l'interaction des parties de S. Ceci est en contradiction avec le fait qu'un appareil est un système physique, ayant des caractères spéciaux dans l'intention de l'observateur, mais obéissant aux mêmes lois que les systèmes observés. Si l'on pose les mêmes lois d'interaction pour les systèmes et les appareils, alors, ou bien on renonce aux transformations ponctuelles, donc au déterminisme, ou bien on est en contradiction avec les lois quantiques. Une autre possibilité consiste à renoncer à la notion de système physique S pour ne parler que d'un système-dans-un-appareil $(S + \mathcal{A})$; alors $(S + \mathcal{A})$ peut être décrit par des lois déterministes, mais les interactions entre S et $\mathcal{A}$ s'expriment par des lois différentes de celles qui régissent les interactions entre les parties d'un système observable S.

En résumé, une théorie avec déterminisme en dehors des époques de mesure (hypothèse invérifiable expérimentalement, donc métaphysique) impose des lois spéciales d'interaction pour les appareils.

Manuscrit reçu le 5 mai 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] EINSTEIN A., PODOLSKY B. et ROSEN N. — *Phys. Rev.*, 2e série, 1935, **47**, 777.

[2] DESTOUCHES J. L. — *Corpuscules et systèmes de corpuscules*, Gauthier-Villars, Paris, 1941.

[3] DESTOUCHES-FÉVRIER P. — Recherches sur la structure des théories physiques. *Thèse*, Paris, 1945.

[4] DESTOUCHES-FÉVRIER P. — Sur l'impossibilité d'un retour au déterminisme en microphysique. *C. R. Acad. Sc.*, 1945, **220**, p. 587.

[5] DESTOUCHES-FÉVRIER P. — *La structure des théories physiques*, Presses universitaires, Paris, 1951.

[6] DESTOUCHES-FÉVRIER P. — Signification profonde du principe de décomposition spectrale. *C. R. Acad. Sc.*, 1945, **222**, p. 866.

[7] ULLMO J. — La mécanique quantique et la causalité. *Rev. philos.*, oct.-déc. 1949, p. 257.

[8] J. von NEUMANN. — *Gottingen Nachrichten*, 1929 et *Mathematische Gumdlagen der Quantenmechanik*, Springer Berlin, 1932.

[9] SOLOMON J. — *J. Physique Rad.*, 1933, **4**, 34.