



Sur la seconde quantification

Jean G. Valatin

► To cite this version:

Jean G. Valatin. Sur la seconde quantification. Journal de Physique et le Radium, 1951, 12 (2), pp.131-141. 10.1051/jphysrad:01951001202013100 . jpa-00234351

HAL Id: jpa-00234351

<https://hal.science/jpa-00234351>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LA SECONDE QUANTIFICATION

Par JEAN G. VALATIN.

Institut Henri Poincaré, Paris (1).

Sommaire. — La seconde quantification est exposée pour un système de particules obéissant au principe d'exclusion, en caractérisant les tenseurs antisymétriques représentant l'état du système à l'aide des quantités de l'algèbre extérieure de Grassmann. Cette représentation des états conduit à l'introduction naturelle des opérateurs de création et d'annihilation de la seconde quantification, et fournit une méthode facilitant les calculs portant sur les états du système. L'équivalence des opérateurs correspondants de la méthode de l'espace de configuration et de la seconde quantification se présente d'une façon simple en comparant les expressions (7), (8), (35), (38 b) et (40). On peut ainsi éviter l'examen laborieux des changements de signe. Les équations vectorielles correspondantes explicitent cette équivalence et illustrent les règles de calcul des opérateurs et des états.

Introduction. — L'état d'un système de particules peut être décrit dans le formalisme de la Mécanique ondulatoire par deux méthodes distinctes : celle de l'espace de configuration et celle de la seconde quantification. Dans le cas de particules obéissant au principe d'exclusion, la méthode de l'espace de configuration caractérise l'état du système par une fonction d'onde antisymétrique des variables des particules. Dans la seconde quantification le rôle principal est joué au lieu des variables des particules individuelles, par les états possibles d'une seule particule et l'état du système est caractérisé par les coefficients d'un tenseur antisymétrique de l'espace des états d'une seule particule.

En introduisant pour les tenseurs antisymétriques de cet espace la représentation de l'algèbre extérieure de Grassmann [1, 2] les opérateurs de création et d'annihilation de la seconde quantification apparaissent d'une façon naturelle et l'on obtient une méthode de calcul des états du système. L'équivalence mathématique des deux méthodes de description et des opérateurs correspondants se présente également sous une forme particulièrement simple.

C'est l'algèbre extérieure qui est à la base de la méthode de la seconde quantification dans le cas du principe d'exclusion, bien que cette méthode [3, 4] ait été inventée indépendamment. L'introduction des notions de l'algèbre extérieure apporte des simplifications et l'on n'a plus besoin de prouver d'une façon indirecte l'existence des opérateurs anti-commutants qui correspondent aux opérations les plus élémentaires du calcul.

Nous voulons exposer brièvement sous cette forme la méthode de la seconde quantification et sa relation à la méthode de l'espace de configuration. Nous nous bornons à une théorie dans laquelle

l'opérateur d'énergie d'une particule libre est de spectre positif et considérerons seulement dans une seconde Partie les modifications de la théorie dues aux états d'énergie négative de l'électron de Dirac.

Méthode de l'espace de configuration. Les espaces R et R^f . — Soit l'équation d'onde d'une seule particule

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x; t) = W(x) \psi(x; t), \quad (1)$$

x désigne toutes les variables de la particule, $W(x)$ est l'hamiltonien, le temps t figure comme paramètre dans l'équation. Les fonctions d'onde $\psi(x; t)$ peuvent être développées selon un système orthonormal complet de fonctions $\psi_r(x)$, sous la forme

$$\psi(x, t) = \sum_r c^r(t) \psi_r(x). \quad (1a)$$

Les fonctions $\psi_r(x)$ sont les éléments de base d'un espace fonctionnel. Toute fonction normée de l'espace est caractérisée selon (1a) par une suite de nombres c^r avec $\sum_r |c^r|^2 = 1$. Nous appellerons R l'espace de Hilbert des vecteurs c^r , espace des états d'une seule particule.

L'état d'un système de f particules peut être caractérisé par une fonction d'onde

$$\Phi = \Phi(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(f)}; t)$$

dépendant des variables $x^{(k)}$ des f particules et obéissant à l'équation d'onde

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(f)}; t) = \mathcal{H} \Phi(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(f)}; t). \quad (2)$$

Les produits $\psi_{r_1}(x^1) \psi_{r_2}(x^2) \dots \psi_{r_f}(x^f)$ de f fonctions $\psi_{r_k}(x^{(k)})$ constituent une base pour

(1) Actuellement Universitetets Institut for Teoretisk Fysik, Copenhague.

l'espace fonctionnel des fonctions $\Phi(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(f)}, t)$ et celles-ci peuvent être développées sous la forme

$$\Phi = \Phi(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(f)}; t) \\ = \sum_{r_1 r_2 \dots r_f} c^{r_1 r_2 \dots r_f}(t) \psi_{r_1}(x^{(1)}) \psi_{r_2}(x^{(2)}) \dots \psi_{r_f}(x^{(f)}). \quad (2a)$$

L'espace hilbertien des éléments ayant pour coordonnées $c^{r_1 r_2 \dots r_f}$ est l'espace R^f des tenseurs de degré f de l'espace R . Comme jusqu'ici nous n'avons introduit aucune restriction de symétrie concernant les fonctions Φ , l'indice r_k du coefficient $c^{r_1 r_2 \dots r_f}$ dans (2a) correspond à l'état $\psi_{r_k}(x^{(k)})$ du $k^{\text{ième}}$ électron.

L'hamiltonien $\mathcal{H}$ de l'équation d'onde (2) doit être symétrique par rapport aux variables des f particules, dans le cas où ces particules sont toutes identiques. On peut supposer qu'il a la forme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum_{k=1}^f W_k = \sum_{k=1}^f W(x^{(k)}); \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{i>k=1}^f V_{ik} = \sum_{i>k=1}^f V(x^{(i)}, x^{(k)}), \quad \left\{ \begin{aligned} V(x^{(i)}, x^{(k)}) &= V(x^{(k)}, x^{(i)}); \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$W(x^{(k)})$ est l'opérateur d'énergie de la $k^{\text{ième}}$ particule, éventuellement dans un champ extérieur, $V(x^{(i)}, x^{(k)})$ l'opérateur de l'énergie d'interaction entre les particules i et k . Les opérateurs de la forme (3) et (4) représentent deux types importants d'opérateurs de la théorie d'un système de particules. Dans ce qui suit, quand nous considérons ces opérateurs et leur relation avec les opérateurs de la seconde quantification, nous ne nous bornons naturellement pas au cas spécial des opérateurs d'énergie.

Avec la base $\psi_r(x)$, les éléments de matrice de l'opérateur $W(x)$ sont dans l'espace R ,

$$(r | W | s) = \int \psi_r^*(x) W(x) \psi_s(x) dx. \quad (3a)$$

Les éléments de matrice de $V(x, x')$ sont dans l'espace R^2 ,

$$(r \bar{r} | V | s \bar{s}) \\ = \iint \psi_r^*(x) \psi_{\bar{r}}^*(x') V(x, x') \psi_s(x) \psi_{\bar{s}}(x') dx dx'. \quad (4a)$$

Fonctions d'onde antisymétriques. L'espace $\bigwedge^f R$. — La fonction d'onde d'un système

de f particules obéissant au principe d'exclusion est antisymétrique par rapport aux variables $x^{(k)}$ des f particules. En introduisant un ordre lexicographique

$$r_1 < r_2 < \dots < r_f \quad (5a)$$

des indices, les éléments de base de l'espace de ces fonctions d'onde antisymétriques peuvent être représentés par les déterminants de Slater

$$\Phi_{[r_1 \dots r_f]}(x^{(1)}, \dots, x^{(f)}) = \frac{1}{\sqrt{f!}} \begin{vmatrix} \psi_{r_1}(x^{(1)}) & \dots & \psi_{r_f}(x^{(1)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{r_1}(x^{(f)}) & \dots & \psi_{r_f}(x^{(f)}) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Le facteur de normalisation $\frac{1}{\sqrt{f!}}$ correspond aux $f!$ membres du déterminant. La fonction d'onde du système peut être développée selon ces déterminants de Slater sous la forme

$$\Phi(x^{(1)}, \dots, x^{(f)}; t) \\ = \sum_{r_1 < \dots < r_f} c^{[r_1 \dots r_f]}(t) \Phi_{[r_1 \dots r_f]}(x^{(1)}, \dots, x^{(f)}). \quad (6)$$

Les indices r_k ne correspondent plus à un électron déterminé, mais à l'ordre lexicographique (5a). Si la fonction d'onde antisymétrique (6) est donnée dans le développement (2a) des fonctions des variables de f particules, on a

$$c^{[r_1 \dots r_f]} = \varepsilon_P \sqrt{f!} c^{P(r_1 \dots r_f)}, \quad (6a)$$

où $P(r_1 \dots r_f)$ désigne une permutation quelconque des indices $r_1 \dots r_f$ et $\varepsilon_P = \pm 1$ suivant que la permutation est paire ou impaire.

L'espace hilbertien des coefficients $c^{[r_1 \dots r_f]}$ est l'espace $\bigwedge^f R$ des tenseurs antisymétriques de degré f de R . Pour un élément normé de cet espace on a

$$\sum_{r_1 < \dots < r_f} |c^{[r_1 \dots r_f]}|^2 = 1. \quad (6b)$$

On peut définir des déterminants de Slater (5) également avec un ordre des indices qui diffère de l'ordre (5a). Ces déterminants ne diffèrent des éléments de base (5), (5a) de l'espace des fonctions d'onde antisymétriques que par un facteur ± 1 . En désignant par $\Phi_{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_f]}$ le déterminant de Slater qu'on obtient de $\Phi_{[r_1 \dots r_{k-1} r_k r_{k+1} \dots r_f]}$ en remplaçant l'indice r_k par r , on a pour l'opérateur $\mathcal{H}$ de (3), compte tenu de (3a) :

$$(\Phi_{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_f]}, \mathcal{H} \Phi_{[r_1 \dots r_{k-1} r_k r_{k+1} \dots r_f]}) \\ = \int \dots \int \Phi_{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_f]}^* \mathcal{H} \Phi_{[r_1 \dots r_{k-1} r_k r_{k+1} \dots r_f]} dx^{(1)} \dots dx^{(f)} = (r | W | r_k), \quad (7)$$

résultant des $f!$ termes non nuls qu'on obtient en substituant les expressions (5) en (7). (7) donne à un facteur ± 1 près les éléments de matrice non nuls de l'opérateur $\mathfrak{V}$ dans l'espace des fonctions

d'onde antisymétriques $\Phi(x^{(1)}, \dots, x^{(f)})$ avec la base (5), (5 a).

De même, on a pour l'opérateur $\mathfrak{V}$ de (4) :

$$\begin{aligned} & (\Phi[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{k''-1} r_{k''+1} \dots r_f], \mathfrak{V} \Phi[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{k''-1} r_{k''+1} \dots r_f]) \\ &= \int \dots \int \Phi[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{k''-1} r_{k''+1} \dots r_f] \mathfrak{V} \Phi[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{k''-1} r_{k''+1} \dots r_f] dx^{(1)} \dots dx^{(f)} \\ &= (\bar{r}r | V | r_{k'} r_{k''}) - (\bar{r}r | V | r_{k''} r_{k'}). \end{aligned} \quad (8)$$

A chaque terme de $\Phi^*_{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{k''-1} r_{k''+1} \dots r_f]}$ correspondent selon (5) deux termes dans le développement de $\Phi_{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{k''-1} r_{k''+1} \dots r_f]}$ tels que leur produit contribue à (8) par une valeur différente de zéro. Au terme contenant le facteur $\psi_{r'}^*(x^{(i)}) \psi_{r''}^*(x^{(i)})$ correspondent ainsi les termes contenant les facteurs $\psi_{r_{k'}}(x^{(i)}) \psi_{r_{k''}}(x^{(i)})$ et $\psi_{r_{k'}}(x^{(i)}) \psi_{r_{k''}}(x^{(i)})$. Le premier a le même signe que le terme choisi de $\Phi^*_{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{k''-1} r_{k''+1} \dots r_f]}$ et le produit correspondant contribue avec le terme $V(x^{(i)}, x^{(i)})$ de $\mathfrak{V}$ selon (4 a) et (5) par $\frac{1}{f!} (\bar{r}r | V | r_{k'} r_{k''})$ à (8). Le second a le signe opposé, et la contribution à (8) est $-\frac{1}{f!} (\bar{r}r | V | r_{k''} r_{k'})$. Les $f!$ termes de $\Phi^*_{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{k''-1} r_{k''+1} \dots r_f]}$ fournissent la même contribution, ce qui conduit à (8). A un facteur ± 1 près (8) est égal à l'élément de matrice de l'opérateur $\mathfrak{V}$ dans la représentation (5), (5 a).

Seconde quantification. L'espace $\bigwedge R$. Introduction des opérateurs à la manière habituelle. — Avec l'ordre lexicographique (5 a) des états r de l'espace R , on peut écrire par un simple changement de notation les coordonnées $c^{[r_1 \dots r_f]}$ d'un élément de l'espace $\bigwedge^f R$ des tenseurs antisymétriques de degré f sous la forme

$$\begin{aligned} & g(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots) = c^{[r_1 \dots r_f]}, \\ & n_r = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{pour } r \begin{cases} = \\ \neq \end{cases} r_1, \dots, r_f. \end{aligned} \quad (9)$$

C'est la notation habituelle de ces coefficients dans les travaux sur la seconde quantification. Dans le cas des tenseurs antisymétriques cependant cette notation est extrêmement incommode et nous garderons partout la notation $c^{[r_1 \dots r_f]}$ des coefficients.

La méthode de la seconde quantification caractérise dès le début l'état d'un système de f particules obéissant au principe d'exclusion par les éléments de l'espace $\bigwedge^f R$ des tenseurs antisymétriques de R . Elle considère cependant à la fois les tenseurs antisymétriques de différents degrés, correspondant à des nombres f différents de particules; l'espace des états est l'espace $\bigwedge R$, somme

directe des espaces $\bigwedge^f R$ pour toutes les valeurs entières $f \geq 0$, y compris les espaces $\bigwedge^0 R = R$ et $\bigwedge^1 R$, espace de dimension 1 des tenseurs antisymétriques de degré 0.

Les opérateurs de cet espace sont habituellement introduits comme suit [3, 4]. Avec la notation (9), on définit des opérateurs α_r, α_r^* par les relations

$$\begin{aligned} & \alpha_r g(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots) \\ &= \begin{cases} g(n_1, n_2, \dots, n_r+1, \dots) & \text{si } n_r=0, \\ 0 & \text{si } n_r=1; \end{cases} \\ & \alpha_r^* g(n_1, n_2, \dots, n_r, \dots) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n_r=0, \\ g(n_1, n_2, \dots, n_r-1, \dots) & \text{si } n_r=1. \end{cases} \end{aligned} \quad (10 a)$$

Les opérateurs α_r, α_r^* augmentent, et diminuent respectivement d'une unité le degré f d'un élément de $\bigwedge^f R$, ou donnent zéro. L'opérateur $\alpha_r \alpha_r^* = n_r$ correspond à une multiplication par 1 ou 0 selon que la valeur de n_r est 1 ou 0.

En définissant

$$\nu_r = \prod_{s=1}^r (1 - 2n_s), \quad (10 b)$$

où

$$(1 - 2n_s) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad \text{pour } n_s = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

les opérateurs de la théorie peuvent être exprimés à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation,

$$a_r = \nu_r \alpha_r, \quad a_r^* = \alpha_r^* \nu_r, \quad (11)$$

qui satisfont aux relations d'anticommutation

$$a_r a_s + a_s a_r = 0, \quad a_r^* a_s^* + a_s^* a_r^* = 0; \quad (11 a)$$

$$a_r a_s^* + a_s^* a_r = \delta_{rs}. \quad (11 b)$$

On démontre alors que dans le sous-espace $\bigwedge^f R$ de $\bigwedge R$ les opérateurs

$$\mathbf{W} = \sum_{rs} (r | W | s) a_r a_s^*, \quad (12)$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{r\bar{r} \\ s\bar{s}}} (r\bar{r} | V | s\bar{s}) a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^*, \quad (13)$$

formés à l'aide des éléments de matrice (3 a) et (4 a)

sont équivalents aux opérateurs (3), (4) de la méthode de l'espace de configuration. La vérification de cette équivalence est liée surtout à un examen des changements de signe des coefficients (9) à l'aide des fonctions de signe (10 b) de Wigner, mais par cette voie elle est assez laborieuse [3, 4].

En caractérisant les éléments de $\wedge R$ à l'aide de l'algèbre extérieure de Grassmann, les opérateurs a_r , a_r^* de (11) s'introduisent comme des opérations élémentaires du calcul. L'examen laborieux des changements de signe dans la vérification de l'équivalence des opérateurs des deux méthodes du formalisme quantique peut être évité, en comparant au lieu des éléments de matrice des opérateurs les produits scalaires (7), (8) dans les deux représentations.

Produit tensoriel, symétrique et antisymétrique (extérieur) des éléments de R . — Soient $a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$ les éléments de base de l'espace vectoriel R . Les coefficients c_i^r d'un élément e_i de R sont des nombres complexes et e_i peut s'écrire sous la forme

$$e_i = \sum_r c_i^r a_r. \quad (14)$$

On peut définir le produit $e_{i_1} e_{i_2}$ de deux éléments e_{i_1} , e_{i_2} de R :

$$e_{i_1} e_{i_2} = \left(\sum_r c_{i_1}^r a_r \right) \left(\sum_{r_2} c_{i_2}^{r_2} a_{r_2} \right) = \sum_{r_1 r_2} c_{i_1}^{r_1} c_{i_2}^{r_2} a_{r_1} a_{r_2}, \quad (15)$$

en définissant les produits $a_{r_1} a_{r_2}$ des éléments de base.

En considérant les produits $a_{r_1} a_{r_2}$ comme des éléments de base nouveaux, sans aucune relation entre ces produits, (15) définit le produit tensoriel des éléments e_{i_1} et e_{i_2} de R , celui-ci étant caractérisé dans la base $a_{r_1} a_{r_2}$ par les coefficients $c_{i_1}^{r_1} c_{i_2}^{r_2}$. Les éléments de base $a_{r_1} a_{r_2}$ engendrent l'espace R^2 des tenseurs deux fois contravariants de R . Les produits $a_{r_1} a_{r_2} \dots a_{r_f}$ de f facteurs engendrent l'espace R^f des tenseurs f fois contravariants.

Il y a deux espèces importantes de multiplication des éléments de R . La multiplication symétrique définie par les relations

$$a_{r_1} a_{r_2} + a_{r_2} a_{r_1} = 0 \quad (16)$$

et la multiplication antisymétrique définie par

$$a_{r_1} a_{r_2} - a_{r_2} a_{r_1} = 0. \quad (17)$$

Ces relations sont invariantes par rapport aux transformations du groupe linéaire de R . Pour $r_1 = r_2 = r$ la multiplication antisymétrique (17) donne

$$a_r a_r = a_r^2 = 0 \quad (17a)$$

pour toute valeur de r .

La multiplication symétrique (16) fournit les tenseurs symétriques de R . Elle joue un grand rôle dans la théorie des fonctions algébriques et la théorie des fonctionnelles. Dans la Mécanique quantique elle conduit à la théorie des particules obéissant à la statistique de Bose-Einstein.

La multiplication antisymétrique ou extérieure (17) fournit les tenseurs antisymétriques de R . Cette multiplication joue un rôle fondamental dans la géométrie de l'espace R . Elle fournit l'outil mathématique adapté à la description d'un système de particules obéissant au principe d'exclusion.

L'espace $\wedge R$. Algèbre extérieure. — Dans ce qui suit, nous nous bornons à la multiplication extérieure (17), et nous écrivons pour le produit extérieur de a_{r_1} et a_{r_2} simplement $a_{r_1} a_{r_2}$ en omettant le signe habituel $\wedge$ ou $\times$. Les éléments de base $a_{r_1} a_{r_2}$, $r_1 < r_2$ engendrent l'espace $\wedge^2 R$ des bivecteurs ou tenseurs antisymétriques deux fois contravariants de R . Le produit (15) de deux vecteurs devient en vertu de (17)

$$e_{i_1} e_{i_2} = \sum_{r_1 < r_2} \begin{vmatrix} c_{i_1}^{r_1} & c_{i_1}^{r_2} \\ c_{i_2}^{r_1} & c_{i_2}^{r_2} \end{vmatrix} a_{r_1} a_{r_2}. \quad (18a)$$

Les produits $a_{r_1} a_{r_2} \dots a_{r_f}$, $r_1 < \dots < r_f$ de f facteurs engendrent l'espace $\wedge^f R$ des tenseurs antisymétriques f fois contravariants de R , espace des f -vecteurs. Le produit extérieur de f vecteurs est appelé un f -vecteur décomposable et s'écrit sous la forme

$$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_f} = \sum_{r_1 < \dots < r_f} \begin{vmatrix} c_{i_1}^{r_1} & \dots & c_{i_1}^{r_f} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i_f}^{r_1} & \dots & c_{i_f}^{r_f} \end{vmatrix} a_{r_1} a_{r_2} \dots a_{r_f}. \quad (18)$$

La somme directe des espaces $\wedge^f R$,

$$\wedge R = \sum_{f=0}^{\infty} \wedge^f R,$$

est l'espace des tenseurs antisymétriques contravariants de différents degrés de R , y compris l'espace $\wedge^1 R = R$ et l'espace $\wedge^0 R$ à une seule dimension, constitué par les nombres complexes. Un élément de $\wedge R$ peut s'écrire sous la forme

$$c = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \dots < r_f} c^{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f}. \quad (19)$$

Le produit extérieur d'un f_1 -vecteur et d'un f_2 -vecteur est un $(f_1 + f_2)$ -vecteur. Un f -vecteur décomposable (18) définit un sous-espace à f dimensions de R , engendré par les éléments $e_{i_1}, \dots, e_{i_f}$ et le produit extérieur de (18) avec les vecteurs de ce

sous-espace est nul. Pour que le produit extérieur d'un f_1 -vecteur et d'un f_2 -vecteur décomposables soit différent de zéro, il faut et il suffit que les sous-espaces correspondants n'aient pas d'éléments communs. C'est l'origine de l'expression « produit extérieur ». Il s'ensuit que les éléments de $\bigwedge^f R_n$, où R_n est un sous-espace à n dimensions de R , sont avec $f > n$ identiquement nuls.

Le produit extérieur permet de définir sur $\bigwedge R$ une structure d'algèbre, l'algèbre extérieure de l'espace R .

Un changement de base de R peut être caractérisé par la matrice (c'_i) d'une transformation inversible C de R qui fait correspondre aux éléments de base a_i de nouveaux éléments de base e_i selon des équations de la forme (14). Les éléments de base de $\bigwedge^2 R$ et de $\bigwedge^f R$ se transforment alors selon les équations (18a) et (18). Comme cas spécial, cela s'applique également aux transformations unitaires de R , caractérisant les changements de base dans le formalisme quantique.

Les espaces duals R^* et $\bigwedge R^*$. — L'ensemble des formes linéaires sur R définit l'espace vectoriel R^* , espace des vecteurs covariants de R , ou espace dual de R . Un vecteur e_i^* de R^* , vecteur covariant ou dual de R , peut à l'aide de la base $a_1^*, a_2^*, \dots, a_r^*, \dots$, duale de la base $a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$ de R , être écrit sous la forme

$$e_i^* = \sum_r c_r^i a_r^*. \quad (20)$$

En définissant la multiplication extérieure des éléments de base a_r^* par les relations

$$a_{r_1}^* a_{r_2}^* + a_{r_2}^* a_{r_1}^* = 0 \quad (21)$$

les nouveaux éléments de base $a_{r_1}^*, a_{r_2}^*, \dots, r_1 < r_2$ engendrent l'espace $\bigwedge^2 R^*$ des tenseurs antisymétriques deux fois covariants de R , les produits $a_{r_1}^* \dots a_{r_f}^* a_{r_1}^*, r_1 < \dots < r_f$ de f facteurs, l'espace $\bigwedge^f R^*$ des tenseurs antisymétriques f fois covariants. Un f -vecteur dual décomposable, produit extérieur de f vecteurs duals e_i^* , s'écrit sous la forme

$$e_{i_1}^* \dots e_{i_f}^* = \sum_{r_1 < \dots < r_f} \begin{vmatrix} c_{r_1}^{i_1} & \dots & c_{r_f}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{r_1}^{i_f} & \dots & c_{r_f}^{i_f} \end{vmatrix} a_{r_1}^* \dots a_{r_f}^*. \quad (22)$$

La somme directe $\bigwedge R^* = \sum_{f=0}^{\infty} \bigwedge^f R^*$, espace des tenseurs antisymétriques covariants de différents degrés de R , est le dual de l'espace vectoriel $\bigwedge R$.

Un élément de $\bigwedge R^*$ a la forme

$$c^* = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \dots < r_f} c_{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1}^* \dots a_{r_f}^*. \quad (23)$$

A un changement de base C de R correspond la transformation $\tilde{C}^{-1}$ de R^* , inverse de la transposée de C . Si C est une transformation unitaire, $C^* = C$, $\tilde{C}^{-1}$ est la complexe conjuguée de C , et les composantes c_r d'un élément de R^* se transforment comme les complexes conjugués $\bar{c}_r$ des composantes d'un élément de R . En vertu de cette relation, du point de vue des transformations unitaires, l'élément de R^* de coefficients $c_r = \bar{c}_r$ peut être considéré comme le dual du vecteur de coefficients c_r de R . Par la même correspondance on peut relier à chaque élément de $\bigwedge R$ un élément dual en $\bigwedge R^*$. Cette correspondance n'est invariante cependant que pour les transformations unitaires de R .

Remarquons encore que dans un espace R_n de dimension n finie il existe un isomorphisme entre les vecteurs duals et les $(n-1)$ -vecteurs de R_n , et plus généralement entre les f -vecteurs duals et les $(n-f)$ -vecteurs. Au sous-espace de R_n défini par un $(n-1)$ -vecteur, qui est toujours décomposable, appartient un vecteur complémentaire; multiplié extérieurement par celui-ci, le $(n-1)$ -vecteur donne l'élément $E_n = a_1 a_2 \dots a_n$, base de $\bigwedge^n R_n$. Un $(n-1)$ -vecteur peut donc être considéré comme un « trou » dans le tenseur complet E_n . L'élément isomorphe à ce « trou » est un vecteur dual de R_n . On peut voir déjà dans cette remarque, comment l'introduction des éléments duals d'un sous-espace de R peut remplacer dans la théorie du positron la notion peu physique d'un trou dans une infinité d'électrons d'énergie négative.

Produit scalaire. — Le produit scalaire d'un f -vecteur

$$v_f = \sum_{r_1 < \dots < r_f} v_{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f}$$

et d'un f -vecteur dual

$$u_f^* = \sum_{r_1 < \dots < r_f} u_{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1}^* \dots a_{r_f}^*$$

est défini par

$$\langle u_f^* | v_f \rangle = \sum_{r_1 < \dots < r_f} u_{[r_1 \dots r_f]} v_{[r_1 \dots r_f]}. \quad (24a)$$

Le produit scalaire d'un élément

$$v = \sum_{f=0}^{\infty} v_f$$

de $\wedge R$ et d'un élément

$$\mathbf{u}^* = \sum_{f=0}^{\infty} \mathbf{u}_f^*$$

de $\wedge R^*$ est

$$\langle \mathbf{u}^* | \mathbf{v} \rangle = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \dots < r_f} u_{[r_1 \dots r_f]} v^{[r_1 \dots r_f]}. \quad (24)$$

Les espaces R et $\wedge R$ sont en Mécanique quantique des espaces de Hilbert. Pour ceux-ci on définit le produit scalaire des éléments

$$\mathbf{u} = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \dots < r_f} u^{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f}$$

et

$$\mathbf{v} = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \dots < r_f} v^{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f}$$

par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \dots < r_f} u^{[r_1 \dots r_f]} v^{[r_1 \dots r_f]}. \quad (25)$$

Ce produit scalaire n'est invariant que par rapport aux transformations unitaires de R , et en faisant correspondre à chaque élément $\mathbf{u}$ de $\wedge R$ un élément dual $\mathbf{u}^*$ de $\wedge R^*$ par la relation

$$u_{[r_1 \dots r_f]} = u^{[r_1 \dots r_f]}, \quad (26)$$

le produit scalaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de (25) est identique au produit scalaire $\langle \mathbf{u}^* | \mathbf{v} \rangle$ défini par (24).

Pour des éléments normés de $\wedge R$, on a

$$(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{r_1 < \dots < r_f} |c^{[r_1 \dots r_f]}|^2 = 1. \quad (19 a)$$

Pour les éléments (19) de $\wedge R$ la somme (19 a) doit être convergente.

Opérateurs linéaires de $\wedge R$. — Introduisons maintenant les opérateurs linéaires de l'espace $\wedge R$. Nous employons les mêmes symboles pour les opérateurs et pour les éléments de l'espace $\wedge R$ que nous séparons par un trait |. Quand c'est nécessaire, nous pouvons toujours mettre un trait après un symbole pour désigner l'opérateur.

Ainsi, la multiplication extérieure déjà définie par un vecteur peut être considéré comme un opérateur linéaire de $\wedge R$, et nous écrivons

$$a_r | a_{r_1} \dots a_{r_f} = a_r a_{r_1} \dots a_{r_f} \quad (= 0, \text{ si } r = r_k). \quad (27)$$

L'opérateur a_r augmente donc le degré d'un tenseur d'une unité et donne zéro si l'on applique à un f -vecteur décomposable contenant comme facteur a_r . On reconnaît l'opérateur de création

de la seconde quantification qui apparaît ici d'une façon tout à fait naturelle. Si R est l'espace des états d'une seule particule, l'opérateur a_r crée une particule dans l'état r ou donne zéro si cet état est occupé.

D'autre part, on peut définir une espèce de division sans reste (2)

$$a_s^* | a_{r_1} \dots a_{r_f} = \begin{cases} (-1)^{k-1} a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} & \text{si } s = r_k, \\ 0 & \text{si } s \neq r_k, \end{cases} \quad (28)$$

qui diminue le rang d'un f -vecteur d'une unité et appliquée à un f -vecteur décomposable donne zéro si celui-ci ne contient pas a_s comme facteur. L'opérateur a_s^* est l'opérateur d'annihilation de la seconde quantification. On peut introduire cette opération sans faire apparaître explicitement le facteur $(-1)^{k-1}$ en le définissant pour $s = r_1$ et le cas $s = r_k$ peut être ramené à $s = r_1$ en amenant le facteur a_{r_k} à la première place à l'aide de la règle d'anticommuation du produit extérieur.

L'opération (28) correspond [1, 2] à la multiplication intérieure de Grassmann et de Bourbaki par le vecteur dual a_s^* . Ceci justifie l'emploi du même symbole pour cet opérateur et les éléments de R^* . La relation de l'opérateur a_s^* avec les vecteurs duals devient claire en appliquant a_s^* aux éléments de R ($f = 1$); on a selon (28)

$$a_s^* | a_r = \begin{cases} 1 & \text{si } s = r, \\ 0 & \text{si } s \neq r. \end{cases} \quad (28 a)$$

L'opérateur $a_{r_1} a_{r_2} \dots a_{r_k}$ est défini à l'aide de (27) par l'application successive de ses facteurs et correspond à la multiplication extérieure par un k -vecteur décomposable. L'opérateur $a_{r_k}^* \dots a_{r_1}^*$ est défini par l'application successive de (28) et représente une espèce de division sans reste par un k -vecteur décomposable.

La règle d'anticommuation (17) du produit extérieur a comme conséquence les mêmes règles (11a) pour les opérateurs. D'autre part, en appliquant successivement (27) et (28), on a pour $r \neq s$:

$$\left. \begin{aligned} a_r a_s^* | a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} \\ = \begin{cases} a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} & \text{si } s = r_k, \\ 0 & \text{si } s \neq r_k \text{ ou } r = r_k; \end{cases} & r \neq r_k; \\ a_s^* a_r | a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} \\ = \begin{cases} -a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} & \text{si } s = r_k, \\ 0 & \text{si } s \neq r_k \text{ ou } r = r_k; \end{cases} & r \neq r_k; \end{aligned} \right\} \quad (29 a)$$

(2) C'est M. Marcel Riesz qui m'a fait observer qu'il est suggestif du point de vue algébrique de considérer l'opération a_s^* comme une espèce de division sans reste. Je le remercie chaleureusement de l'occasion qu'il m'a offerte de discuter avec lui certains aspects de ce travail.

et pour $r = s$:

$$\left. \begin{aligned} & a_{r'} a_{r'}^* | a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} \\ & = \begin{cases} a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} & \text{si } r = r_k, \\ 0 & \text{si } r \neq r_k, \end{cases} \\ & a_{r'}^* a_{r'} | a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} \\ & = \begin{cases} 0 & \text{si } r = r_k, \\ a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} & \text{si } r \neq r_k. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (29 b)$$

Pour la somme de ces opérateurs, on obtient les relations (11 b)

$$a_r a_s^* + a_s^* a_r = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq s, \\ 1 & \text{si } r = s. \end{cases}$$

L'opérateur $n_r = a_r a_r^*$ de (29 b) a les valeurs propres 1, 0 et il est le projecteur du sous-espace de $\bigwedge R$ dont les éléments contiennent le facteur a_r . Dans le langage de la Mécanique quantique c'est le sous-espace des états du système dans lesquels l'état r est occupé par un électron. L'opérateur $1 - n_r = a_r^* a_r$ de (29 b) est le projecteur du sous-espace complémentaire de $\bigwedge R$. Pour l'opérateur

$$\mathbf{N} = \sum_i a_i a_i^* = \sum_i n_i, \quad (30)$$

on a selon (29 b)

$$\mathbf{N} | a_{r_1} \dots a_{r_f} = f | a_{r_1} \dots a_{r_f}. \quad (30 a)$$

$\mathbf{N}$ est un opérateur ayant les valeurs propres $f = 0, 1, 2, \dots$ qui caractérisent le degré d'un f -vecteur. Il représente en Mécanique quantique l'opérateur du nombre de particules.

$$\begin{aligned} & a_{q_1} a_{q_2} a_{s_2}^* a_{s_1}^* | a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_{k''-1}} a_{r_{k''}} a_{r_{k''+1}} \dots a_{r_f} \\ & = \begin{cases} a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_k} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_{k''-1}} a_{q_2} a_{r_{k''}} a_{r_{k''+1}} \dots a_{r_f} & \text{si } \begin{cases} s_1 = r_{k'}; q_1 \\ s_2 = r_{k''}; q_2 \end{cases} \neq r_k \quad \text{pour } k \neq k', k'' \quad (k' \leq k''), \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

Si $q_2 \neq s_1$,

$$a_{q_1} a_{q_2} a_{s_2}^* a_{s_1}^* = a_{q_1} a_{s_1}^* a_{q_2} a_{s_2}^*,$$

et (32) résulte par l'application successive de (29 a, b). Si $q_2 = s_1$, on peut appliquer le même raisonnement

$$\begin{aligned} & a_{q_1} a_{q_2} \dots a_{q_i} a_{s_i}^* \dots a_{s_2}^* a_{s_1}^* | a_{r_1} \dots a_{r_f} \\ & = \begin{cases} a_{r_1} \dots a_{r_{k_1-1}} a_{q_1} a_{r_{k_1+1}} \dots a_{r_{k_2-2}} a_{q_2} a_{r_{k_2+1}} \dots a_{r_{k_i-1}} a_{q_i} a_{r_{k_i+1}} \dots a_{r_f} & \text{si } \begin{cases} s_1 = r_{k_1}; q_1 \\ s_2 = r_{k_2}; q_2 \\ \dots \dots \dots \\ s_i = r_{k_i}; q_i \end{cases} \neq r_k \quad \text{pour } r_k \neq r_{k_\alpha} \\ 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, i). \\ \text{autrement.} & \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

On n'a $r_{k_1} < r_{k_2} < \dots < r_{k_i}$ que si $s_1 < s_2 < \dots < s_i$, autrement on doit écrire $a_{q_1}, \dots, a_{q_i}$ en (33) dans un ordre différent. Si $a_{r_1} \dots a_{r_f}$ contient les i facteurs $a_{s_1}, \dots, a_{s_i}$, l'opérateur $a_{q_1} \dots a_{q_i} a_{s_i}^* \dots a_{s_1}^*$ les remplace par $a_{q_1}, \dots, a_{q_i}$. S'il ne les contient pas, le résultat est zéro.

Opérateurs réductibles aux sous-espaces $\bigwedge^f R$.

— Tout opérateur linéaire de $\bigwedge^f R$ peut être exprimé à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation a_q, a_s^* comme une somme de produits de facteurs a_q, a_s^* multipliés par des nombres complexes. Les opérateurs qui ne changent pas le degré f des tenseurs et qui sont ainsi réductibles aux sous-espaces $\bigwedge^f R$, commutent avec l'opérateur $\mathbf{N}$ de (30). Chaque terme de ceux-ci contient un nombre égal de facteurs a_q et a_s^* . A l'aide des relations d'anticommutation (11 a, b) on peut ramener ces opérateurs à la forme

$$\mathbf{A} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\substack{q_1, q_2, \dots, q_i \\ s_1, s_2, \dots, s_i}} A_{s_1 s_2 \dots s_i}^{q_1 q_2 \dots q_i} a_{q_1} a_{q_2} \dots a_{q_i} a_{s_1}^* \dots a_{s_i}^*, \quad (34)$$

dans laquelle les opérateurs de création a_q sont dans chaque terme à la gauche des opérateurs d'annihilation a_s^* . Les termes avec un nombre i de facteurs a_s^* donnent selon (28) identiquement zéro dans le sous-espace $\sum_{f=0}^{i-1} \bigwedge^f R$ de $\bigwedge R$ des tenseurs du degré $f < i$.

L'effet des termes de (31) se déduit facilement des relations (27), (28). Le terme avec $i = 0$ correspond à la multiplication par une constante. L'opérateur $a_q a_s^*$ des termes avec $i = 1$ a selon (29 a, b) comme effet de remplacer le facteur a_s par le facteur a_q dans $a_{r_1} \dots a_{r_f}$ et de le multiplier par 0 s'il ne contient pas le facteur a_s .

Pour $i = 2$, on a d'une façon analogue

pour

$$a_{q_1} a_{q_2} a_{s_2}^* a_{s_1}^* = - a_{q_1} a_{s_2}^* a_{q_2} a_{s_1}^*$$

et faire disparaître le signe — en interchangeant dans le résultat a_{q_1}, a_{q_2} . De même,

Opérateurs du type $\mathbf{W} = \sum_{rs} (r | \mathbf{W} | s) a_r a_s^*$.

— Abstraction faite de la multiplication par une constante, les opérateurs les plus simples de $\bigwedge R$ qui conservent le degré f des tenseurs sont de la

forme (12)

$$\mathbf{W} = \sum_{rs} (r|W|s) a_r a_s^*.$$

Selon (29 a, b), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{W} | a_{r_1} \dots a_{r_f} \\ = \sum_{r_1} \sum_{k=1}^f (r|W|r_k) a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f}. \end{aligned} \quad (34)$$

Le produit scalaire de (34) et du dual de $a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f}$ est

$$\begin{aligned} \langle a_{r_f}^* \dots a_{r_{k+1}}^* a_r^* a_{r_{k-1}}^* \dots a_{r_1}^* | \mathbf{W} | a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} \rangle \\ = (r|W|r_k). \end{aligned} \quad (35)$$

Pour $f = 1$, (35) s'écrit

$$\langle a_r^* | \mathbf{W} | a_{r_k} \rangle = (r|W|r_k). \quad (35 a)$$

Le f -vecteur décomposable $a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f}$ peut différer par une puissance de -1 de l'élément de base de $\bigwedge^f R$ pour lequel l'ordre des facteurs suit l'ordre lexicographique (5 a). A ce facteur ± 1 près, (35) donne l'élément de matrice de $\mathbf{W}$ dans la base choisie de $\bigwedge R$. Les éléments de matrice de $\mathbf{W}$ entre des éléments de base de degré différent sont nuls.

Opérateurs du type

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{r\bar{r} \\ s\bar{s}}} (r\bar{r}|V|s\bar{s}) a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^*.$$

$$\mathbf{V} | a_{r_1} \dots a_{r_f} = \sum_{r < \bar{r}} \sum_{k^1 > k^2 = 1}^f \langle r\bar{r}|V|r_{k^1} r_{k^2} \rangle a_{r_1} \dots a_{r_{k^1-1}} a_{r_{k^1}} a_{r_{k^2+1}} \dots a_{r_{k^2-1}} a_{r_{k^2}} a_{r_{k^2+1}} \dots a_{r_f}. \quad (36)$$

Le produit scalaire de (39) et du dual de $a_{r_1} \dots a_{r_{k^1-1}} a_r a_{r_{k^1+1}} \dots a_{r_{k^2-1}} a_{\bar{r}} a_{r_{k^2+1}} \dots a_{r_f}$ est

$$\langle a_{r_f}^* \dots a_{r_{k^2+1}}^* a_{\bar{r}}^* a_{r_{k^2-1}}^* \dots a_{r_{k^1+1}}^* a_r^* a_{r_{k^1-1}}^* \dots a_{r_1}^* | \mathbf{V} | a_{r_1} \dots a_{r_{k^1-1}} a_{r_{k^1}} a_{r_{k^1+1}} \dots a_{r_{k^2-1}} a_{r_{k^2}} a_{r_{k^2+1}} \dots a_{r_f} \rangle = \langle r\bar{r}|V|r_{k^1} r_{k^2} \rangle. \quad (40)$$

A un facteur ± 1 près, (40) donne les éléments de matrice différents de zéro de l'opérateur $\mathbf{V}$ dans la base choisie de $\bigwedge R$. Pour $f = 2$, on a

$$\langle a_{\bar{r}}^* a_r^* | \mathbf{V} | a_{r_{k^1}} a_{r_{k^2}} \rangle = \langle r\bar{r}|V|r_{k^1} r_{k^2} \rangle. \quad (40 a)$$

Comme $r < \bar{r}$, $r_{r_{k^1}} < r_{k^2}$, les $\langle r\bar{r}|V|r_{k^1} r_{k^2} \rangle$ sont les éléments de matrice de l'opérateur $\mathbf{V}$ dans l'espace $\bigwedge^2 R$ des 2-vecteurs.

La correspondance entre les opérateurs de la méthode de l'espace de configuration et de la seconde quantification. — L'état d'un système de particules obéissant au principe d'exclusion est caractérisé par un élément de l'espace $\bigwedge R$ et peut être écrit sous la forme (19). Les opérateurs de

Considérons maintenant l'opérateur (13),

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{r\bar{r} \\ s\bar{s}}} (r\bar{r}|V|s\bar{s}) a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^*.$$

Remarquons d'abord que le même facteur $a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^*$ figure dans cette forme de l'opérateur quatre fois. On a en effet,

$$\begin{aligned} a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^* &= a_{\bar{r}} a_r a_s^* a_{\bar{s}}^* \\ &= -a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^* = -a_{\bar{r}} a_r a_s^* a_{\bar{s}}^*. \end{aligned} \quad (36)$$

Avec

$$\begin{aligned} \langle r\bar{r}|V|s\bar{s} \rangle &= \frac{1}{2} \{ (r\bar{r}|V|s\bar{s}) + (\bar{r}r|V|\bar{s}s) \\ &\quad - (r\bar{r}|V|\bar{s}s) - (\bar{r}r|V|s\bar{s}) \}, \end{aligned} \quad (37 a)$$

on peut écrire l'opérateur $\mathbf{V}$ sous une forme dans laquelle les facteurs $a_r, a_{\bar{r}}, a_s^*, a_{\bar{s}}^*$ ne figurent qu'une seule fois

$$\mathbf{V} = \sum_{\substack{r < \bar{r} \\ s < \bar{s}}} \langle r\bar{r}|V|s\bar{s} \rangle a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^*. \quad (37)$$

Si l'on a

$$(r\bar{r}|V|s\bar{s}) = (\bar{r}r|V|\bar{s}s), \quad (38 a)$$

(37 a) s'écrit

$$\langle r\bar{r}|V|s\bar{s} \rangle = (\bar{r}r|V|s\bar{s}) - (\bar{r}r|V|\bar{s}s). \quad (38 b)$$

Selon (32), on a

cet espace sont les opérateurs introduits dans la méthode de la seconde quantification.

En comparant les expressions (35) et (7), ainsi que les expressions (40), (38 b) et (8), qui diffèrent par la même puissance de -1 des éléments de matrice correspondants, on voit immédiatement l'équivalence dans le sous-espace $\bigwedge^f R$ des opérateurs

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W} &= \sum_{rs} (r|W|s) a_r a_s^*, \\ (r|W|s) &= \int \psi_r^*(x) W(x) \psi_s(x) dx, \\ \mathbf{V} &= \sum_{k=1}^f W_k = \sum_{k=1}^f W(x^{(k)}), \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

de la seconde quantification et de la méthode de l'espace de configuration, ainsi que l'équivalence des opérateurs

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{r\bar{r} \\ s\bar{s}}} (r\bar{r} | V | s\bar{s}) a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^*, \\ (r\bar{r} | V | s\bar{s}) &= \iint \psi_r^*(x) \psi_{\bar{r}}^*(x') V(x, x') \psi_s(x) \psi_{\bar{s}}(x') dx dx', \\ \mathfrak{V} &= \sum_{i>k=1}^f \Gamma_{ik} = \sum_{i>k=1}^f \Gamma(x^{(i)}, x^{(k)}), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

des deux méthodes. Il est facile d'étendre la correspondance aux opérateurs plus généraux de la forme (31).

Les équations $\mathbf{u} = \mathbf{W} | \mathbf{c}$. — Le rôle des opérateurs de la seconde quantification et l'équivalence des opérateurs des deux méthodes peuvent être encore rendus plus clairs en explicitant les équations vectorielles correspondantes. Ces équations fournissent en même temps un exemple de calcul simple portant sur les états du système.

La notation $c^{[r_1 \dots r_f]}$ des coefficients des tenseurs antisymétriques au lieu de la notation (9) a d'une part l'avantage d'être plus simple parce que parmi les indices ne figurent que les états occupés. D'autre part, en gardant cette notation, on peut inclure un signe $(-)$ dans les coefficients par la convention

$$c^{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_f]} = -c^{[r_1 \dots r_k r_{k-1} \dots r_f]} \quad (43)$$

et définir ainsi $c^{[r_1 \dots r_f]}$ pour toute permutation des indices $r_1, \dots, r_f$. Par cette convention, on peut écrire sous une forme simple des équations dont la notation deviendrait extrêmement compliquée si l'on voulait garder les coefficients (9) et indiquer explicitement les puissances de (-1) qui interviennent dans ces équations. (43) correspond à la notation des coefficients des tenseurs antisymétriques dans l'espace R^f ce qui peut être avantageux

même en se bornant au sous-espace $\bigwedge^f R$ de R^f . On peut écrire également

$$\begin{aligned} c^{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f} \\ = c^{[r_1 \dots r_k r_{k+1} \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_k} a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f}, \quad (44a) \\ \mathbf{c}_f = \sum_{r_1 < \dots < r_f} c^{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f} \\ = \frac{1}{f!} \sum_{r_1, \dots, r_f} c^{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f}. \quad (44b) \end{aligned}$$

La possibilité de remplacer un signe $(-)$ par une modification de l'ordre des facteurs d'un produit extérieur nous a permis d'éviter un long examen des changements de signe dans la vérification de l'équivalence des opérateurs (41), (42). Selon (44a) on fait usage de la même possibilité en introduisant la notation (43).

Pour un élément $\mathbf{c}_0$ de $\bigwedge^0 R$, on a

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{W} | \mathbf{c}_0 = 0. \quad (45)$$

Pour un vecteur de $\bigwedge^1 R = R$,

$$\mathbf{c}_1 = \sum_{r_1} c^{r_1} a_{r_1}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \sum_{r_1} u^{r_1} a_{r_1} = \mathbf{W} | \mathbf{c}_1 \\ &= \sum_{r_1 s} (r_1 | W | s) a_{r_1} a_s^* | \sum_r c^r a_r \\ &= \sum_{r_1} \left\{ \sum_r (r_1 | W | r) c^r \right\} a_{r_1}, \quad (46a) \end{aligned}$$

$$u^{r_1} = \sum_r (r_1 | W | r) c^r. \quad (46b)$$

Comme on le voit déjà par (35a), $\mathbf{W}$ est dans l'espace $\bigwedge^1 R = R$ un opérateur ayant les éléments de matrice $(r_1 | W | r)$.

Pour un élément de $\bigwedge^2 R$ on a, en faisant usage de (44),

$$\mathbf{c}_2 = \sum_{r_1 < r_2} c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \sum_{r_1 < r_2} u^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2} = \mathbf{W} | \mathbf{c}_2 \\ &= \sum_{r_1 r_2} (r_1 | W | s) a_{r_1} a_s^* | \frac{1}{2!} \sum_{r_1 r_2} c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2} \\ &= \sum_{r_1} \frac{1}{2!} \sum_{r_1 r_2} [(r_1 | W | r_1) c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2} + (r_1 | W | r_2) c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_r] \\ &= \frac{1}{2!} \sum_{r_1 r_2} \left\{ \sum_r (r_1 | W | r) c^{[r_1 r_2]} + (r_2 | W | r) c^{[r_1 r_2]} \right\} a_{r_1} a_{r_2} \\ &= \sum_{r_1 < r_2} \left\{ \sum_r (r_1 | W | r) c^{[r_1 r_2]} + (r_2 | W | r) c^{[r_1 r_2]} \right\} a_{r_1} a_{r_2}, \quad (47a) \\ u^{[r_1 r_2]} &= \sum_r (r_1 | W | r) c^{[r_1 r_2]} + (r_2 | W | r) c^{[r_1 r_2]}. \quad (47b) \end{aligned}$$

Pour un élément (44) de $\bigwedge^f R$, on calcule de la

même façon

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_f &= \sum_{r_1 < \dots < r_f} u^{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f} = \mathbf{V} | \mathbf{c}_f = \frac{1}{f!} \sum_r \sum_{r_1 \dots r_f} \sum_{k=1}^f (r | W | r_k) c^{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f}, \\ &= \frac{1}{f!} \sum_{r_1 \dots r_f} \left\{ \sum_{k=1}^f \sum_r (r_k | W | r) c^{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_f]} \right\} a_{r_1} \dots a_{r_{k-1}} a_r a_{r_{k+1}} \dots a_{r_f}, \\ &= \sum_{r_1 < \dots < r_f} \left\{ \sum_{k=1}^f \sum_r (r_k | W | r) c^{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_f]} \right\} a_{r_1} \dots a_{r_f}, \end{aligned} \quad (48 a)$$

$$u^{[r_1 \dots r_f]} = \sum_{k=1}^f \sum_r (r_k | W | r) c^{[r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_f]}, \quad (48 b)$$

Les équations $\mathbf{v} = \mathbf{V} | \mathbf{c}$. — Avec l'opérateur $\mathbf{V}$ de (37), on a pour $f = 0$, $f = 1$:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{V} | \mathbf{c}_0 = 0, \quad (49)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} | \mathbf{c}_1 = 0. \quad (50)$$

$$= \sum_{r_1 < r_2} \left\{ \sum_{r < \bar{r}} \langle r_1 r_2 | V | r \bar{r} \rangle c^{[r \bar{r}]} \right\} a_{r_1} a_{r_2}, \quad (51 a)$$

$$v^{[r_1 r_2]} = \sum_{r < \bar{r}} \langle r_1 r_2 | V | r \bar{r} \rangle c^{[r \bar{r}]}. \quad (51 b)$$

Pour un élément $\mathbf{c}_2$ de $\bigwedge^2 R$, on calcule

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \sum_{r_1 < r_2} v^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2} = \mathbf{V} | \mathbf{c}_2 \\ &= \sum_{\substack{r < \bar{r} \\ s < \bar{s}}} \langle r \bar{r} | V | s \bar{s} \rangle a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^* \sum_{r_1 < r_2} c^{[r_1 r_2]} a_{r_1} a_{r_2} \\ &= \sum_{r < \bar{r}} \sum_{r_1 < r_2} \langle r \bar{r} | V | r_1 r_2 \rangle c^{[r_1 r_2]} a_r a_{\bar{r}} \end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{r_1 < r_2 \\ r_1}} f(r_1 r_2 r_3) \\ &= \sum_{r_1 < r_2 < r_3} \{ f(r_1 r_2 r_3) + f(r_1 r_3 r_2) + f(r_2 r_3 r_1) \}, \end{aligned}$$

on a pour un élément $\mathbf{c}_3$ de $\bigwedge^3 R$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \sum_{r_1 < r_2 < r_3} v^{[r_1 r_2 r_3]} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} = \mathbf{V} | \mathbf{c}_3 = \sum_{\substack{r < \bar{r} \\ s < \bar{s}}} \langle r \bar{r} | V | s \bar{s} \rangle a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^* \sum_{r_1 < r_2 < r_3} c^{[r_1 r_2 r_3]} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} \\ &= \sum_{r < \bar{r}} \sum_{r_1 < r_2 < r_3} [\langle r \bar{r} | V | r_1 r_2 \rangle c^{[r_1 r_2 r_3]} a_r a_{\bar{r}} a_{r_3} + \langle r \bar{r} | V | r_1 r_3 \rangle c^{[r_1 r_2 r_3]} a_r a_{\bar{r}} a_{r_2} + \langle r \bar{r} | V | r_2 r_3 \rangle c^{[r_1 r_2 r_3]} a_r a_{\bar{r}} a_{r_1}] \\ &= \sum_{r < \bar{r}} \sum_{\substack{r_1 < r_2 \\ r_3}} \langle r \bar{r} | V | r_1 r_2 \rangle c^{[r_1 r_2 r_3]} a_r a_{\bar{r}} a_{r_3} = \sum_{\substack{r_1 < r_2 \\ r_3}} \left\{ \sum_{r < \bar{r}} \langle r_1 r_2 | V | r \bar{r} \rangle c^{[r \bar{r} r_3]} \right\} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} \\ &= \sum_{r_1 < r_2 < r_3} \left\{ \sum_{r < \bar{r}} \langle r_1 r_2 | V | r \bar{r} \rangle c^{[r \bar{r} r_3]} + \langle r_1 r_3 | V | r \bar{r} \rangle c^{[r \bar{r} r_2]} + \langle r_2 r_3 | V | r \bar{r} \rangle c^{[r \bar{r} r_1]} \right\} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}, \end{aligned} \quad (52 a)$$

$$v^{[r_1 r_2 r_3]} = \sum_{r < \bar{r}} \langle r_1 r_2 | V | r \bar{r} \rangle c^{[r \bar{r} r_3]} + \langle r_1 r_3 | V | r \bar{r} \rangle c^{[r \bar{r} r_2]} + \langle r_2 r_3 | V | r \bar{r} \rangle c^{[r \bar{r} r_1]}. \quad (52 b)$$

Plus généralement, pour un élément de $\bigwedge^f R$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f &= \sum_{r_1 < \dots < r_f} v^{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f} = \mathbf{V} | \mathbf{c}_f = \sum_{\substack{r < \bar{r} \\ s < \bar{s}}} \langle r \bar{r} | V | s \bar{s} \rangle a_r a_{\bar{r}} a_s^* a_{\bar{s}}^* \sum_{r_1 < \dots < r_f} c^{[r_1 \dots r_f]} a_{r_1} \dots a_{r_f} \\ &= \sum_{r_1 < \dots < r_f} \left\{ \sum_{k^u > k^t = 1}^f \sum_{r < \bar{r}} \langle r_{k^t} r_{k^u} | V | r \bar{r} \rangle c^{[r_1 \dots r_{k^t-1} r_{k^t+1} \dots r_{k^u-1} r_{k^u+1} \dots r_f]} \right\} a_{r_1} \dots a_{r_f}, \end{aligned} \quad (53 a)$$

$$v^{[r_1 \dots r_f]} = \sum_{k^u > k^t = 1}^f \sum_{r < \bar{r}} \langle r_{k^t} r_{k^u} | V | r \bar{r} \rangle c^{[r_1 \dots r_{k^t-1} r_{k^t+1} \dots r_{k^u-1} r_{k^u+1} \dots r_f]}. \quad (53 b)$$

La correspondance $\mathbf{W} \sim \sum_k W_k$, $\mathbf{V} \sim \sum_{i>k} V_{ik}$. —

Les coefficients (43) d'un élément c_f de $\bigwedge^f R$ sont au facteur de normalisation $\frac{1}{\sqrt{f!}}$ près les coefficients de ce tenseur antisymétrique dans l'espace $R^f = R \times R \times \dots \times R$ de tous les tenseurs de degré f de R . Les relations (46 b), (47 b), (48 b) montrent alors explicitement que dans le sous-espace $\bigwedge^f R$ de R^f l'opérateur $\mathbf{W}$ est identique à l'opérateur $\sum_k W_k$ de R^f , où W_k s'obtient par la composition de $(f-1)$ -opérateurs unité et de l'opérateur W , dont les éléments de matrice sont $(r|W|s)$, du $k^{\text{ième}}$ espace vectoriel dans le produit tensoriel. Les équations (51 b), (52 b), (53 b) montrent explicitement que dans le sous-espace $\bigwedge^f R$ de R^f l'opérateur $\mathbf{V}$ est identique à l'opérateur $\sum_{i>k=1}^f V_{ik}$ de R^f , où V_{ik} s'obtient par la composition de $(f-2)$ -opérateurs unité et de l'opérateur V , avec les éléments de matrice $(rr'|V|ss')$, agissant dans l'espace $R_i \times R_k$, produit du $i^{\text{ième}}$ et du $k^{\text{ième}}$ facteur R du produit tensoriel R^f .

On voit ainsi directement l'identité dans $\bigwedge^f R$ des opérateurs $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$ de la seconde quantification avec les opérateurs $\sum_{k=1}^f W_k$, $\sum_{i>k=1}^f V_{ik}$ de l'espace R^f de la Mécanique matricielle. L'équivalence des opérateurs (41), (42) de la seconde quantification et de la Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration s'en déduit en passant de la Méca-

nique ondulatoire à la Mécanique matricielle par l'intermédiaire d'un système orthonormal de fonctions d'onde et des éléments de matrice donnés par (41), (42).

Les opérateurs $\Psi(x)$, $\Psi^*(x)$. — A l'aide du système orthonormal complet $\psi_r(x)$, on peut former les opérateurs

$$\Psi(x) = \sum_r \psi_r(x) a_r^*, \quad \Psi^*(x) = \sum_r \psi_r^*(x) a_r, \quad (54)$$

et écrire les opérateurs (41), (42) sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W} &= \int \Psi^*(x) W(x) \Psi(x) dx, \\ \mathbf{V} &= \frac{1}{2} \int \Psi^*(x) \Psi^*(x') V(x, x') \Psi(x') \Psi(x) dx dx'. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Des relations d'anticommutation (11 a, b) des opérateurs a_r , a_s^* et de l'orthonormalité des fonctions $\psi_r(x)$ on déduit les relations

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x) \Psi^*(x') + \Psi^*(x') \Psi(x) &= \delta(x - x'), \\ \Psi(x) \Psi(x') + \Psi(x') \Psi(x) &= 0, \\ \Psi^*(x) \Psi^*(x') + \Psi^*(x') \Psi^*(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Dans la méthode de la seconde quantification, on peut partir d'une façon formelle de ces relations. Cependant le sens des opérateurs $\Psi(x)$, $\Psi^*(x)$ ne devient clair que dans l'espace $\bigwedge R$ des tenseurs antisymétriques représentant les états du système de particules, et il est plus naturel de les introduire *a posteriori*. Cette remarque est valable à plus forte raison dans la théorie du positron, où le passage de la théorie d'une seule particule à la théorie du système de particules demande des modifications à cause des solutions d'énergie négative du problème de l'électron de Dirac.

Manuscrit reçu le 16 juillet 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] GRASSMANN H. — *Ausdehnungslehre*, Berlin, 1862. [3] JORDAN P. — *Z. Physik*, 1927, **44**, 473. — JORDAN P. et WIGNER E. — *Z. Physik*, 1928, **47**, 631.
[2] BOURBAKI N. — *Algèbre multilinéaire*, Paris, 1948. [4] FOCK V. — *Z. Physik*, 1932, **75**, 622.