



HAL
open science

Sur un analyseur de mobilités pour les ions gazeux. I

Paul Langevin

► **To cite this version:**

Paul Langevin. Sur un analyseur de mobilités pour les ions gazeux. I. Journal de Physique et le Radium, 1949, 10 (6), pp.177-188. 10.1051/jphysrad:01949001006017700 . jpa-00234167

HAL Id: jpa-00234167

<https://hal.science/jpa-00234167>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

SUR UN ANALYSEUR DE MOBILITÉS POUR LES IONS GAZEUX. I.

Par PAUL LANGEVIN.

Sommaire. — Paul Langevin, maintenu en résidence forcée à Troyes de 1940 à 1944 par les autorités d'occupation, y a poursuivi son travail scientifique. L'absence de tout laboratoire ne lui a permis de mener à bien que des recherches théoriques, comme celle « Sur les chocs entre neutrons rapides et noyaux de masse quelconque » (*Ann. de Physique*, 1942, **17**, 303-317) et des projets d'expériences qu'il espérait réaliser après la Libération.

C'est ainsi qu'il a conçu et discuté en 1942-43, un analyseur de mobilités pour les ions gazeux. L'appareil devait, en donnant le « spectre » des mobilités, permettre d'étudier la nature des ions et de suivre leur formation et leur évolution. La méthode proposée consiste à soumettre à un champ radial les ions participant, d'autre part, au mouvement de rotation du gaz entraîné par un manchon cylindrique métallique mince qui tourne entre deux armatures cylindriques fixes, l'axe du système étant vertical.

Les ions sont émis par une fente verticale du cylindre fixe intérieur; le manchon mobile comporte des fentes horizontales qui les laisse passer. Ils sont reçus par une électrode isolée en forme de languette verticale portée par l'armature extérieure fixe. La trajectoire des ions entraînés à la fois par le champ et le mouvement du fluide est calculée, la précision de l'appareil, qui pourrait dépasser 1 pour 100, est discutée, les diverses causes d'erreur étudiées, le manchon tournant étant d'abord considéré comme infiniment mince.

Dans deux Mémoires qui seront publiés à la suite de celui-ci, figurent (II) l'étude du champ électrostatique et du mouvement du gaz dans le cas où le manchon mobile est épais, et (III) l'étude générale du champ électrostatique d'une grille conductrice placée entre deux conducteurs plans parallèles.

Un travail expérimental est en cours afin de mettre en œuvre les principes de la méthode d'analyse des mobilités des ions gazeux proposée dans cet article.

La question de savoir si les ions produits dans les gaz par divers rayonnements ont, pour chaque signe, une mobilité unique ou se répartissent, au contraire, entre toute une gamme, plus ou moins continue, de mobilités, ne me paraît pas complètement résolue. Elle a cependant une grande importance en liaison avec les mécanismes de formation de l'agglomération moléculaire qui constitue l'ion et de passage d'une forme stable de cette agglomération à une autre. Existe-t-il dans un même gaz plusieurs de ces formes stables, comme on devra l'admettre si les mobilités sont effectivement multiples pour les ions d'un même signe ? Le passage d'une forme à l'autre est-il possible et quel est en moyenne le temps nécessaire ? Pour répondre à ces questions, il est nécessaire de disposer d'un appareil permettant de séparer des autres, dans un gaz conducteur, les ions de mobilités comprises dans un intervalle suffisamment étroit, soit pour en mesurer le nombre par

la charge qu'ils transportent, soit pour les isoler et suivre leur évolution ultérieure.

Le procédé le plus simple, pour effectuer cette séparation, est celui des courants gazeux où le mouvement des ions résulte de la composition d'un mouvement d'entraînement qui est celui du gaz et d'un mouvement relatif des ions par rapport au gaz sous l'action du champ électrique créé dans le volume occupé par ce dernier.

Sous la forme où elle a été appliquée jusqu'ici, soit pour les petits, soit pour les gros ions, cette méthode n'est guère utilisable que pour l'air parce qu'elle exige l'emploi de volumes considérables de gaz pour entretenir le courant gazeux.

Dans l'appareil étudié ici, je me suis proposé, au contraire, d'utiliser comme mouvement du gaz un régime permanent de circulation à l'intérieur d'un récipient clos, dans des conditions où, la turbulence étant évitée, la distribution de la vitesse avec

laquelle le gaz est entraîné puisse être exactement connue, ainsi que, par suite, les trajectoires d'ions de mobilité donnée sous l'action d'un champ électrique de distribution également connue. La forme cylindrique du mouvement permanent de circulation m'a semblé être la plus commode.

Principe de l'appareil. — Un cylindre fixe ABA'B' porte, suivant une de ses génératrices BB' une fente fine F; la région I voisine de la fente à l'intérieur du cylindre est ionisée par un procédé quelconque (rayons α , rayons X, etc.). A l'extérieur du cylindre existe un champ électrique radial qui fait sortir par la fente F les ions d'un certain signe qui y sont amenés par diffusion et refoule à l'intérieur du cylindre ceux du signe opposé —. Un second cylindre fixe CDC'D' coaxial au premier et qui constitue d'ailleurs l'enveloppe de tout l'appareil, porte suivant une de ses génératrices placée dans un azimuth différent de celui de la fente F et que, pour la commodité de la figure, on a représenté dans la figure 1 à 180°, une électrode

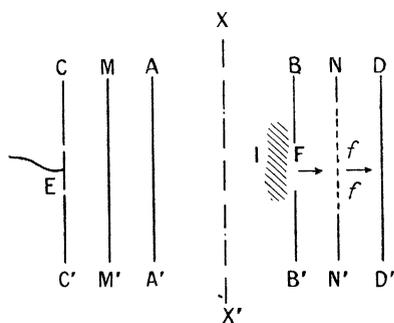


Fig. 1.

étroite E destinée à mesurer le courant d'ions qui lui parviendra, ou une autre fente destinée à laisser sortir ces mêmes ions si l'on veut étudier leur comportement ultérieur.

Entre les deux cylindres fixes se trouve un manchon cylindrique MNM'N' coaxial auquel on imprime autour de l'axe commun XX' un mouvement de rotation uniforme. Ce mouvement crée dans le gaz un régime permanent de circulation qui reste laminaire tant que la rotation est suffisamment lente et dans lequel la vitesse du gaz, nulle au contact des cylindres fixes, est égale à la vitesse de la surface du manchon au contact de celle-ci.

Le manchon porte, à la hauteur de F et de E des fentes fines ff , allongées dans le sens horizontal (XX' étant supposé vertical) pour permettre le passage d'une partie des ions qui lui arrivent de la fente F. Ces ions trouvent, entre le manchon et le cylindre extérieur, un champ électrique radial de même sens que celui qui les a

amenés au manchon et continuent, par conséquent, à se déplacer vers le cylindre extérieur.

Des différences de potentiel convenables établies entre les trois cylindres servent à créer ces champs.

Le mouvement relatif des ions par rapport au gaz étant ainsi radial, il résulte de la circulation créée par le mouvement du manchon, que ces ions sont entraînés dans le sens de la rotation, et cela d'autant plus que leur mobilité est plus faible. La lame verticale étroite d'ions qui sort de la fente F reste fine malgré l'entraînement du gaz si les ions ont tous la même mobilité, mais se trouve, au contraire, étalée, dispersée s'il y a des formes stables de mobilités différentes et l'arrivée des ions sur la surface interne du cylindre extérieur se fait alors suivant un véritable spectre de mobilités que l'électrode ou la fente E permettent d'explorer.

La mobilité des ions qui arrivent à E est fonction de l'écart angulaire θ entre les azimuths de E et de F, ainsi que des différences de potentiel établies entre les cylindres et de la vitesse angulaire de rotation ω imposée au manchon. On peut donc explorer le spectre en faisant varier l'un quelconque de ces trois éléments. Nous verrons que la meilleure solution serait de faire varier la vitesse angulaire en laissant fixes l'azimuth θ et les différences de potentiel.

La finesse de cette exploration, ce qu'on peut appeler le pouvoir séparateur de l'appareil, dépend avant tout de la sensibilité du procédé de mesure employé pour le courant qui arrive à E. Plus cette sensibilité est grande et plus la fente F ainsi que la languette électrode E peuvent être fines. On peut, comme nous le verrons, faire en sorte que la diffusion ou la répulsion mutuelle des ions ne produise pas un étalement supérieur à la largeur de E. Une analyse plus précise des autres causes d'erreur nous montrera qu'il est parfaitement possible d'obtenir un pouvoir séparateur de l'ordre du centième, c'est-à-dire de faire en sorte que les ions recueillis simultanément par l'électrode E, ou passant simultanément par la fente qui remplace celle-ci, aient des mobilités ne différant pas de leur valeur moyenne de plus du centième de celle-ci.

Calcul des trajectoires. — Les deux composantes de la vitesse de l'ion étant horizontales, sa trajectoire sera contenue tout entière dans la section droite des cylindres menée par le point F où il sort de la fente (*fig. 2*). Si l'on suppose dans la figure 2 comme on l'a fait dans la figure 1 que l'azimuth de l'électrode E est à 180° de celui de la fente F, ce qui n'a rien d'essentiel, la trajectoire sera la courbe FPQE, si le manchon tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette trajectoire traversera le manchon en Q toutes les fois que ce point tombera à l'intérieur d'une des fentes f . Celles-ci sont supposées assez fines pour que leur présence

ne trouble pas appréciablement le mouvement d'entraînement du gaz tel que le produirait le manchon plein. Nous évaluerons plus loin l'ordre de grandeur de l'erreur correspondante. Le manchon sera supposé ici infiniment mince et on le rendra, pratiquement, aussi mince que possible. Là aussi l'erreur commise est d'un ordre de grandeur facile à évaluer.

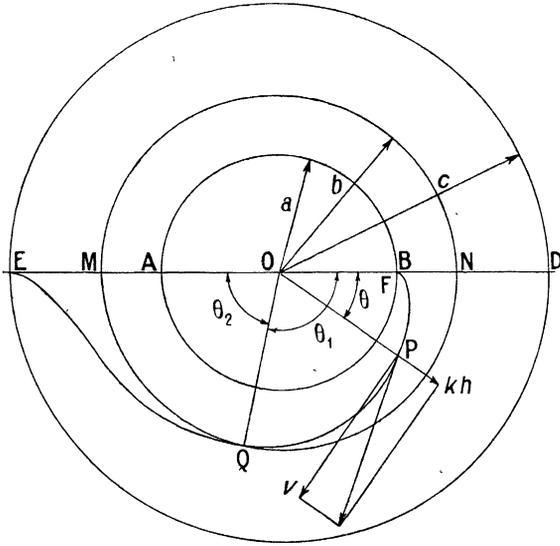


Fig. 2.

Le gaz étant immobile en F au contact du cylindre fixe, la trajectoire part tangentiellement à OF pour s'incurver ensuite dans le sens de la rotation. Soit P un point quelconque de coordonnées polaires r et θ par rapport au centre O et à l'axe OF.

Si le régime permanent du mouvement du gaz est bien laminaire, la vitesse d'entraînement v au point P est tangentielle, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon OP; si, d'autre part, le champ électrique en P, h est radial, l'équation différentielle de la trajectoire s'écrit

$$\frac{r \, d\theta}{dr} = \frac{v}{kh}, \tag{1}$$

k étant la mobilité de l'ion considéré et kh la vitesse qu'il prend par rapport au gaz sous l'action du champ h .

Cherchons d'abord la distribution de la vitesse d'entraînement v dans le régime permanent laminaire où la viscosité du gaz joue le rôle essentiel. Si ρ représente la densité du gaz, μ son coefficient de viscosité et p la pression, variable avec r en vertu des effets centrifuges, les équations du régime permanent laminaire prennent une forme particulièrement simple où les effets de viscosité et d'inertie se séparent

$$\mu \Delta v = 0, \quad \rho \frac{v^2}{r} = \frac{dp}{dr}, \tag{2}$$

Δ étant l'opérateur laplacien qui s'écrit ici où v ne dépend que de r

$$\Delta v = \frac{d^2 v}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v^2}{r} = 0. \tag{3}$$

On peut facilement retrouver cette équation en écrivant la condition de régime permanent pour une couche cylindrique de hauteur égale à l'unité comprise entre les cylindres de rayons r et $r + dr$. Il faut écrire que le moment total de quantité de mouvement transmis à cette couche à travers ses faces cylindriques est nul en régime permanent. Seules interviennent les actions tangentielles de viscosité dont l'expression par unité de surface est, par extension aux coordonnées curvilignes (r, θ) de l'expression $\mu \frac{dv}{dr}$ valable en coordonnées rectilignes

$$\mu \frac{Dv}{Dr},$$

le symbole D étant celui de la dérivée covariante :

$$\mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right).$$

Le moment de la quantité de mouvement transmis par cet effort tangentiel à la couche cylindrique à travers sa face interne de rayon r est

$$M = -2\pi\mu r^2 \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)$$

et la condition de régime permanent devient

$$\frac{dM}{dr} = 0$$

ou

$$\frac{d}{dr} r^2 \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = 0. \tag{4}$$

ce qui est bien équivalent à (3).

L'intégration de (3), facilitée par la forme (4), montre que l'intégrale générale est de la forme

$$v = Ar - \frac{B}{r}, \tag{5}$$

où A et B sont des constantes.

Appliquons ce résultat à la région (fig. 2) comprise entre $r = a$ et $r = b$; si ω désigne la vitesse angulaire de rotation imposée au manchon, les conditions aux limites pour cette région sont

$$v = 0 \quad \text{pour } r = a \quad \text{et} \quad v = \omega b \quad \text{pour } r = b.$$

Ces conditions déterminent A et B dans la solution générale (5) et l'on obtient pour r compris entre a et b

$$v = \frac{\omega b^2}{b^2 - a^2} \left(r - \frac{a^2}{r} \right). \tag{6}$$

De même, à l'extérieur du manchon, pour r

compris entre b et c

$$v = \frac{\omega b^2}{c^2 - b^2} \left(\frac{c^2}{r} - r \right). \quad (7)$$

Si le manchon tournant a une épaisseur finie, avec un rayon extérieur b' , cette formule (7) reste exacte pour r compris entre b' et c à condition d'y remplacer b par b' .

D'autre part, si U_1 représente la différence de potentiel établie entre le cylindre intérieur et le manchon, le champ radial entre $r = a$ et $r = b$ est donné par la formule bien connue du condensateur cylindrique

$$h = \frac{U_1}{rL \frac{b}{a}}. \quad (8)$$

L , logarithme népérien.

De même, si U_2 est la différence de potentiel maintenue entre le manchon et le cylindre extérieur, le champ est donné entre $r = b$ et $r = c$ par la formule

$$h = \frac{U_2}{rL \frac{c}{b}}, \quad (9)$$

avec substitution de b' à b si l'on veut tenir compte de l'épaisseur finie du manchon.

Remarquons que, si l'on fait en sorte que

$$\frac{U_1}{L \frac{b}{a}} = \frac{U_2}{L \frac{c}{b}} = C, \quad (10)$$

l'intensité du champ h ne subit aucune discontinuité à la traversée du manchon et, ce qui est particulièrement important, le manchon peut présenter des ouvertures quelconques sans qu'il en résulte aucune déformation des lignes de force radiales et que le champ cesse d'être représenté dans tout l'intervalle entre les deux cylindres fixés par l'expression $\frac{C}{r}$.

Ceci cesse d'être vrai si le manchon a une épaisseur finie. Nous verrons comment on peut évaluer l'importance de l'erreur qui en résulte par rapport aux formules simples que nous établissons en ce moment et comment cette erreur peut être maintenue dans les limites admises.

L'application des formules (6) et (8) à l'équation différentielle (1) permet de calculer, par une intégration simple, l'angle θ_1 dont l'ion est dévié en azimuth (*fig. 2*) entre le cylindre intérieur fixe et le manchon

$$\theta_1 = \frac{\omega b^2}{kU_1} \left[\frac{1}{2} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} L \frac{b}{a} \right] L \frac{b}{a}. \quad (11)$$

On aura de même

$$\theta_2 = \frac{\omega b^2}{kU_2} \left[\frac{c^2}{c^2 - b^2} L \frac{c}{b} - \frac{1}{2} \right] L \frac{c}{b}. \quad (12)$$

Si l'on suppose réalisée la condition (10) et si l'on réalise par construction la relation simple

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \alpha, \quad (13)$$

qui exprime que le rayon du manchon est la moyenne géométrique des rayons des cylindres fixes, on obtient, pour la déviation totale θ la formule remarquablement simple

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{2\omega b^2}{kU} (L\alpha^2), \quad (14)$$

où $U = U_1 + U_2 = 2U_1$ est la différence de potentiel totale maintenue entre les cylindres fixes et partagée en deux parties égales par le manchon en vertu de (10) et (13).

Pour une première réalisation de l'appareil, j'ai admis les valeurs suivantes :

$$b = 8 \text{ cm}, \quad c = 10 \text{ cm}, \quad \alpha = \frac{c}{b} = 1,25, \quad L\alpha = 0,2231.$$

La vitesse angulaire de rotation ω que l'on peut adopter pour le manchon est limitée supérieurement par la condition que le régime laminaire soit stable. Cette condition s'exprime en écrivant que le nombre de Reynolds, qui sera ici, pour la région comprise entre le manchon et le cylindre extérieur

$$R = \frac{\rho}{\mu} \omega b (c - b), \quad (15)$$

ne dépasse pas une limite supérieure de l'ordre de 2000. Pour l'air sous la pression atmosphérique, $\frac{\rho}{\mu}$ a la valeur 6,5 d'où, avec les valeurs adoptées pour b et c

$$R = 100\omega.$$

Une vitesse angulaire de 3 t : s pour laquelle ω est égal à 6π semble donc admissible.

Pour les ions ordinaires dans l'air, k est de l'ordre de 500 en unités C. G. S. ; si nous utilisons une différence de potentiel totale U égale à 0,1 unité C. G. S. ou 30 V, la formule (14) donne

$$\theta = 2,4 \text{ radians},$$

ce qui fait un peu moins que la demi-circonférence admise sur la figure 2 et correspond à un déplacement, du fait de la rotation, du point d'arrivée des ions sur la face interne du cylindre extérieur fixe

$$\theta c = 24 \text{ cm}.$$

Une largeur de 2 mm donnée à la languette électrode E correspond bien à une finesse d'exploration du spectre de l'ordre du centième. La fente-source F, placée sur le cylindre intérieur de rayon environ moitié moindre, devra, au même ordre de précision, avoir une largeur d'environ 1 mm.

Force centrifuge et force de Coriolis. — L'équation différentielle de la trajectoire (1) a été obtenue en admettant, pour le mouvement de l'ion par rapport au gaz, la loi de mobilité en kh . Cette loi suppose que la seule force qui intervient, pour déplacer l'ion dans le gaz est la force he exercée par le champ électrique h sur la charge e de l'ion. Ceci n'est exact, en toute rigueur, que si le gaz est immobile ou en translation uniforme. Le mouvement représenté par les formules (6) ou (7) est différent. Il est facile de voir que, dans la région extérieure au manchon où la formule (7) est applicable, par exemple, le mouvement instantané d'un élément de volume du gaz situé à la distance r de l'axe, se compose :

1° d'une rotation autour de l'axe XX' de vitesse angulaire

$$\omega' = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} = - \frac{\omega b^2}{c^2 - b^2};$$

2° d'une translation, dans la direction tangentielle, de vitesse égale à

$$\frac{\omega b^2 c^2}{(c^2 - b^2)r};$$

3° d'une déformation pure sans changement de volume consistant en une contraction suivant une direction située dans le plan de la figure 2 et à 45° du rayon et en une dilatation égale dans la direction du plan de la figure 2 perpendiculaire à la précédente. Chacune de ces deux déformations égales et opposées produit par unité de temps une variation relative des dimensions linéaires de l'élément de volume égale à

$$\frac{\omega b^2 c^2}{2r^2(b^2 - c^2)},$$

c'est-à-dire de l'ordre de ω .

La rotation ω' donne lieu à une force centrifuge et à une force de Coriolis qui se superposent à la force électrique he pour déterminer le mouvement de l'ion par rapport au gaz.

Il est facile de montrer que, pour les ions ordinaires au moins, les deux premières forces sont complètement négligeables par rapport à la force électrique.

La force centrifuge est $m\omega'^2 r$ si m est la masse de l'ion; son rapport à la force électrique qui varie en raison inverse de r est maximum en même temps que r , c'est-à-dire pour la valeur c du rayon. On obtient ainsi pour le maximum de ce rapport, en utilisant la valeur (15) de ω'

$$\frac{2m\omega^2 b^4 c^2}{(c^2 - b^2)^2 U e} L \alpha. \quad (16)$$

L'agglomération qui constitue les ions ordinaires, dans l'air en particulier, comprend au maximum une vingtaine d'atomes, ce qui représente une masse m de l'ordre de $10^{-21}g$, l'ion est toujours monovalent,

de sorte que e a la valeur d'environ $5 \cdot 10^{-10}$ unité électrostatique C. G. S. En introduisant dans le rapport (16) les valeurs numériques précédemment admises pour les autres quantités, on obtient une valeur de l'ordre de 10^{-6} .

La force de Coriolis donne lieu à un résultat analogue : pour un mouvement relatif radial de vitesse kh , elle est tangentielle et a pour valeur $2m\omega'kh$. Le rapport à la force électrique he est

$$\frac{2m\omega'k}{e} = \frac{2mk\omega b^2}{(c^2 - b^2)e}. \quad (17)$$

En utilisant les valeurs numériques précédemment indiquées, on obtient pour ce rapport une valeur de l'ordre de 10^{-7} . L'influence de la rotation sur le mouvement relatif est, par conséquent, négligeable.

La translation d'ensemble ne donne lieu à aucune action tendant à déplacer l'ion par rapport au gaz. Il en est certainement de même d'une déformation pure autour du point occupé par l'ion. L'équation (1) est donc largement suffisante pour représenter les faits au degré de précision qui nous intéresse ici.

Voyons maintenant quel est l'effet de la force centrifuge sur le gaz lui-même. La seconde des équations (2)

$$\varphi \frac{v^2}{r} = \frac{dp}{dr},$$

signifie que la pression dans le gaz en régime permanent de circulation doit aller en augmentant du centre à la périphérie. Pour évaluer les différences qui en résultent, désignons par ρ_0 et p_0 la densité et la pression du gaz au contact du cylindre fixe intérieur, pour r égal à a . On a, en vertu de la loi de compressibilité

$$\varphi = \frac{\rho_0}{p_0} p,$$

d'où

$$L \frac{p}{p_0} = \frac{\rho_0}{p_0} \int_a^r \frac{v^2}{r} dr.$$

En utilisant la formule (6) qui donne la vitesse v pour la région comprise entre a et b et en désignant par p_1 la pression à la surface du manchon, on obtient

$$\begin{aligned} L \frac{p_1}{p_2} &= \frac{\rho_0}{p_0} \int_a^b \frac{\omega^2 b^4}{(b^2 - a^2)^2} \left(r - \frac{a^2}{r} \right)^2 \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\rho_0 \omega^2 b^4}{p_0 (b^2 - a^2)^2} \left[\frac{b^4 - a^4}{2b^2} - 2a^2 L \frac{a}{b} \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Si nous admettons, comme nous l'avons fait dans ce qui précède, les valeurs 8 cm et 10 cm pour b et c respectivement, il en résulte, pour a , d'après la relation (13), la valeur 6,4 cm.

Pour l'air à la température ordinaire, $\frac{\rho_0}{p_0}$ est de l'ordre de $1,3 \cdot 10^{-9}$ en unités C. G. S. Avec la vitesse angulaire admise de 3 t/s, l'application de (18)

donne

$$L \frac{p_1}{p_0} = 2,2 \cdot 10^{-6}.$$

On trouverait de la même manière, en désignant par p_2 la pression sur la face interne du cylindre extérieur fixe

$$L \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_0 \omega^2 b^4}{\rho_0 (c^2 - b^2)^2} \left[\frac{c^4 - b^4}{2b^2} - 2c^2 L \frac{c}{b} \right],$$

qui conduit à la même valeur numérique

$$L \frac{p_2}{p_1} = 2,2 \cdot 10^{-6}.$$

La variation relative de pression, et par conséquent de densité d'un point à l'autre du gaz ne dépassera donc pas quelques millièmes et l'on pourra

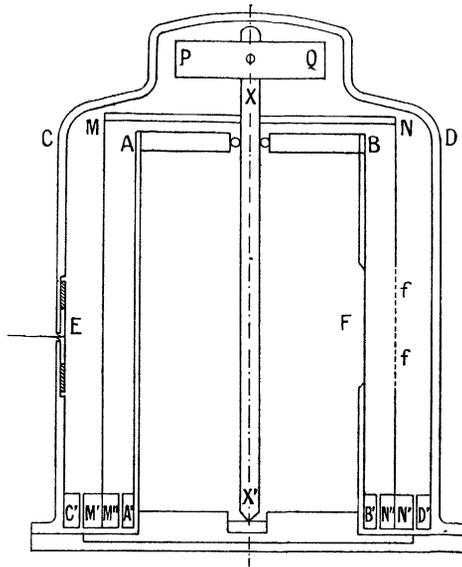


Fig. 3.

considérer ce gaz comme homogène. La différence de pression, même très faible, entre la périphérie et le centre pourrait cependant avoir l'inconvénient de donner naissance à un mouvement de circulation du gaz à travers les fentes nécessairement pratiquées dans le manchon, avec retour par la partie inférieure ou supérieure de celui-ci. Il est facile de rendre ce mouvement parasite absolument négligeable en réduisant autant que possible les intervalles par lesquels peut passer le gaz pour contourner les bords inférieur ou supérieur du manchon, tout en permettant la libre rotation de celui-ci. La disposition générale de l'appareil serait ainsi celle que représente la figure 3. Ce schéma reproduit, en les précisant, les indications de la figure 1.

Le manchon est porté par le plateau MN, solidaire lui-même de l'axe XX'. A la partie supérieure de

celui-ci est fixé un aimant ou un morceau de fer doux PQ qui permet d'exercer magnétiquement de l'extérieur, l'action nécessaire pour établir et entretenir la rotation du manchon. Aucune circulation parasite ne peut s'établir sous l'action de la force centrifuge par le bord supérieur du manchon que ferme le plateau MN. La partie inférieure, qui doit rester libre, est garnie des bourrelets cylindriques M'M''N''N' qui laissent deux intervalles étroits entre eux et les bourrelets A'B', C'D' portés par les cylindres fixes. Étant donnée la petitesse des différences de pression dues à l'action centrifuge, un calcul simple montre que cette disposition suffit à empêcher toute circulation parasite appréciable.

Les extrémités de la fente-source F et de l'électrode E sont suffisamment éloignées des bords inférieurs et supérieurs des cylindres pour que le régime laminaire représenté par les équations (6) et (7) soit réalisé dans toute la région occupée par les ions, à l'influence près des fentes horizontales ff que nous examinerons plus loin.

Effet de la diffusion. — La diffusion des ions a pour effet d'augmenter progressivement l'épaisseur de la lame verticale d'ions extraite de la fente F par le champ, épaisseur initialement égale à la largeur de la fente, admise plus haut comme étant de l'ordre du millimètre. Nous considérerons l'influence de la diffusion, qui tend à diminuer le pouvoir séparateur, comme négligeable si l'épaississement qui en résulte ne dépasse pas 1 mm.

Si D est le coefficient de diffusion des ions dans le gaz, et t la durée du trajet des ions entre la fente source et l'électrode, on sait que \sqrt{Dt} représente l'ordre de grandeur du déplacement d'un ion par diffusion au bout du temps t . Le temps de parcours total entre la fente F et l'électrode E est facile à évaluer : on a

$$dt = \frac{dr}{kh}$$

et comme

$$h = \frac{U}{2rL\alpha},$$

il vient

$$t = \int_a^c \frac{2L\alpha}{kU} r dr = \frac{(c^2 - a^2)L\alpha}{kU}, \quad (19)$$

d'où

$$\sqrt{Dt} = \sqrt{\frac{(c^2 - a^2)L\alpha D}{Uk}}. \quad (20)$$

Le rapport $\frac{D}{k}$ ne dépend que de la valence des ions, que l'expérience montre d'ailleurs être toujours monovalents; on a, pour ce rapport, l'expression bien connue

$$\frac{D}{k} = \frac{RT}{F},$$

où R est la constanté des gaz parfaits, T la tempéra-

ture absolue et F la charge portée par un ion-gramme monovalent. A la température ordinaire on a sensiblement, en unités C. G. S. électrostatiques

$$\frac{D}{k} = \frac{1}{12\,000}.$$

Avec les dimensions adoptées plus haut et une différence de potentiel U de 0,1 unité électrostatique C. G. S., la formule (19) donne sensiblement

$$\sqrt{Dt} = 0,1$$

c'est-à-dire 1 mm.

Une indication intéressante que donne la formule (19) est que, pour un appareil donné et quel que soit le gaz, l'élargissement par diffusion ne dépend que de la différence de potentiel employée et varie en raison inverse de la racine carrée de celle-ci. Si l'on veut, au cours de l'exploration d'un spectre de mobilités maintenir constant l'épaississement par diffusion quand on fait varier la mobilité, il faut simplement maintenir constante la différence de potentiel U et explorer en faisant varier, soit la vitesse angulaire de rotation ω , soit le décalage en azimut θ de l'électrode E par rapport à la fente F.

Effet de la répulsion mutuelle des ions. —

Les ions utilisés étant tous chargés du même signe, la lame mince extraite de la fente tend à augmenter d'épaisseur par répulsion mutuelle des ions qui la composent. Cet effet est facile à évaluer. Je supposerai à tous les ions une même mobilité k .

La largeur du ruban d'ions est égale à la longueur l de la fente-source, si i est l'intensité du courant représenté par les ions qui sortent de la fente, la densité superficielle électrique σ du ruban en un point où l'intensité du champ est h , a pour valeur

$$\sigma = \frac{i}{kh l}.$$

lorsque le mouvement des ions est radial et de vitesse kh , c'est-à-dire lorsque le gaz est immobile.

Cette couche de densité σ produit à sa surface, de chaque côté, un champ normal à celui-ci et d'intensité $2\pi\sigma$ qui, agissant sur les ions de mobilité k présente à cette surface pendant un temps dt , produit un épaississement

$$d\varepsilon = 4\pi k\sigma dt = \frac{4\pi i}{h l} dt$$

et, en remplaçant dt par kh ,

$$d\varepsilon = \frac{4\pi i}{k h^2 l} dr.$$

Comme d'ailleurs

$$h = \frac{U}{2rL\alpha}, \quad d\varepsilon = \frac{16\pi i (L\alpha)^2}{k l U^2} r^2 dr.$$

En intégrant entre a et c

$$\varepsilon = \frac{16\pi i (L\alpha)^2}{3 k l U^2} (c^3 - a^3).$$

Cherchons, avec les données numériques admises jusqu'ici, une longueur de fente de 6 cm et des ions de mobilité égale à 500 unités C. G. S., quelle doit être l'intensité i , en unités électrostatiques C. G. S. pour que l'épaississement par répulsion reste inférieur à 1 mm. On obtient

$$i < \frac{1}{200} \text{ C. G. S.}$$

Cette intensité de courant est celle qui sort de la fente. Celle qui est recueillie par l'électrode lorsque le manchon tourne est réduite, même en supposant des ions d'une seule mobilité, dans un rapport au maximum égal à la fraction de la surface du manchon occupée par les fentes f dans la tranche horizontale de celui-ci qui contient la fente-source et l'électrode. Ce maximum est atteint si le manchon est infiniment mince; une épaisseur finie du manchon introduit un nouveau facteur de réduction que nous étudierons plus loin. On peut fixer la fraction du courant i disponible sur l'électrode pour l'analyse des mobilités, à environ 20 pour 100, ce qui correspond à un courant de l'ordre du millième d'unité électrostatique.

Remarquons d'ailleurs que, lorsque le manchon tourne, la rotation du gaz allonge le ruban d'ions et diminue d'autant la densité superficielle des charges qu'il porte et, par conséquent, la vitesse d'épaississement par répulsion mutuelle, d'où, puisque la durée du trajet entre fente-source et électrode reste toujours la même, diminution de l'épaississement.

Remarquons encore que les forces exercées sur le champ électrique radial h sur les ions présents dans le gaz sont finalement transmises à celui-ci et y produisent des mouvements parasites de la nature du vent électrique. On peut montrer, en traitant le problème ainsi posé, qu'avec les intensités de courant envisagées ci-dessus, auxquelles correspondent des distributions déterminées d'ions dans les gaz, ces mouvements parasites sont entièrement négligeables par rapport au mouvement d'ensemble imposé par la rotation du manchon.

Pouvoir séparateur. — Les résultats de la discussion précédente peuvent encore être présentés sous une autre forme. S'il est possible de réduire l'influence de la répulsion mutuelle des ions en diminuant l'intensité du courant recueilli, c'est-à-dire en augmentant la sensibilité de l'appareil de mesure électrométrique, il n'en est pas de même pour l'influence de la diffusion qui dépend seulement de la différence de potentiel employée et des dimensions de l'analyseur. Comme la diffusion joue ainsi un rôle analogue à celui de la diffraction en spec-

troscopie, il est naturel de définir le pouvoir séparateur P par le rapport entre le déplacement $c\theta$ du point d'arrivée des ions sur la surface interne du cylindre extérieur et la quantité $2\sqrt{Dt}$ qui mesure l'épaississement du ruban d'ions produit par la diffusion. En remplaçant θ et t par leurs valeurs (14) et (19), il vient

$$P = \frac{\omega b^2}{k\sqrt{U}} \sqrt{\frac{k}{D} \frac{(L\alpha)^3}{(\alpha^4 - 1)}}.$$

L'accroissement de ce pouvoir séparateur par augmentation de la vitesse angulaire ω est limitée par l'instabilité du régime laminaire. Pour tenir compte de cette circonstance, il est indiqué d'introduire dans l'expression de P le nombre R de Reynolds défini par l'équation (15). Il en résulte

$$P = \frac{\mu}{\rho} \frac{R}{k\sqrt{U}} \sqrt{\frac{k}{D} \frac{(L\alpha)^3}{(\alpha - 1)^2(\alpha^4 - 1)}},$$

$\frac{k}{D}$ est, à une température donnée, une constante commune à tous les ions monovalents et dont la racine carrée est sensiblement égale à 110 en unités C. G. S., d'où

$$P = 110 \frac{\mu}{\rho} \frac{R}{k\sqrt{U}} \sqrt{\frac{(L\alpha)^3}{(\alpha - 1)^2(\alpha^4 - 1)}}.$$

Pour un gaz donné, quand on fait varier la pression, le coefficient de viscosité μ ne change pas, non plus que le produit ρk puisque la mobilité des ions varie généralement en sens inverse de la pression. Il en résulte que, pour un gaz donné, le maximum possible pour le pouvoir séparateur (limité supérieurement par R) dépend seulement de la différence de potentiel employée et du coefficient de forme α . On peut d'ailleurs remarquer que l'influence de ce coefficient de forme sur P est très limitée, la fonction de α qui figure sous le radical dans l'expression de P ayant un maximum égal à $\frac{1}{4}$ lorsque α est voisin de l'unité et diminuant lentement lorsque α s'éloigne de l'unité, c'est-à-dire lorsque les rayons a , b , c des cylindres s'écartent de plus en plus les uns des autres. Il y a néanmoins intérêt à prendre α voisin de l'unité, c'est-à-dire à faire en sorte que les deux condensateurs cylindriques intérieurs l'un à l'autre se rapprochent autant que possible de la forme plane. En admettant la valeur $\frac{1}{4}$ pour la fonction de α , il vient

$$P = 55 \frac{\mu R}{\rho k\sqrt{U}}.$$

Pour l'air, en particulier, on a, en admettant la mobilité 500 et la valeur 2000 pour la constante R

$$P = \frac{34}{\sqrt{U}},$$

U étant exprimé en unités électrostatiques C. G. S. Pour $U = 0,1$, on a P voisin de 100.

Influence des fentes du manchon. — Un autre aspect du problème qu'il convient d'examiner avec soin concerne l'influence que les fentes pratiquées dans le manchon pour permettre le passage des ions peuvent avoir sur le mouvement d'entraînement du gaz.

Nous avons déjà vu que si le manchon est très mince et si la condition (10) est satisfaite par les différences de potentiel U_1 et U_2 , la surface du manchon se confond avec la surface équipotentielle U_1 et la distribution du champ électrique reste exactement la même quelles que soient les ouvertures pratiquées dans le manchon et même si celui-ci est complètement enlevé. Il n'en est pas de même, naturellement, pour ce qui concerne l'entraînement du gaz, représenté en toute rigueur par les formules (6) et (7) seulement dans le cas où le manchon ne présente aucune ouverture. Comme les ouvertures sont indispensables, il s'agit d'évaluer et de réduire au minimum la perturbation qu'elles apportent, tout en conservant une valeur suffisante à la fraction du courant d'ions qui peut passer à travers le manchon. Si celui-ci est infiniment mince, le champ électrique est inaltéré et cette fraction est égale au rapport entre la surface des ouvertures et la surface totale du manchon dans la tranche horizontale qui contient exactement la fente-source F et l'électrode E .

La disposition d'ouvertures qui apporte la moindre perturbation dans le mouvement représenté par (6) et (7), parce qu'elle en conserve la symétrie cylindrique, est celle de fentes horizontales ff , disposées périodiquement, comme le représentent les figures 1 et 3, dans toute la hauteur occupée par la fente-source F et par l'électrode E . Ces fentes ne peuvent pas, naturellement, s'étendre sur toute la périphérie du manchon, mais on leur en fera occuper la plus grande partie possible en les disposant en groupes de grande longueur par rapport à la largeur de chacune d'elles et séparés par des parties pleines suffisantes pour assurer la tenue mécanique du manchon. C'est seulement entre les fentes que le gaz est entraîné par la surface du manchon avec la vitesse $v_0 = \omega b$ imposée à ce dernier par le mouvement de rotation. Il s'agit d'évaluer la perturbation introduite par la présence des fentes dans le mouvement du gaz et, plus particulièrement, la diminution qui peut en résulter dans la finesse du spectre des mobilités.

Étant donné que les différences $c - b$ et $b - a$ entre les rayons des cylindres sont assez faibles par rapport à ces rayons eux-mêmes, l'évaluation cherchée ne sera pas modifiée de manière importante si nous substituons au problème cylindrique le problème plan correspondant d'une grille plane,

composée de barreaux infiniment plats, tous de même largeur et équidistants (j'examinerai plus loin l'influence d'une épaisseur finie de ces barreaux sur le mouvement du gaz et sur la distribution du champ électrique) se mouvant parallèlement à la longueur des barreaux d'un mouvement uniforme de vitesse v_0 entre deux plans immobiles, parallèles à celui de la grille et placés à une même distance d de part et d'autre de celle-ci.

Dans le mouvement laminaire ainsi défini, la vitesse v en un point du gaz sera évidemment parallèle à celle de la grille et ne dépendra pas de la coordonnée d'espace dans cette même direction. Il suffira donc de connaître la distribution de v dans un plan P perpendiculaire à cette direction, c'est-à-dire à la longueur des barreaux. En vertu de la première des équations (2) qui s'applique évidemment ici, cette distribution satisfait à l'équation de Laplace et le problème se ramène à la recherche, dans le plan P considéré, d'une fonction harmonique s'annulant sur les deux droites AB et CD, intersection du plan P avec les plans parallèles immobiles et prenant la valeur v_0 sur les sections telles que MN, M'N', etc. (fig. 4) des barreaux de la grille par le plan P.

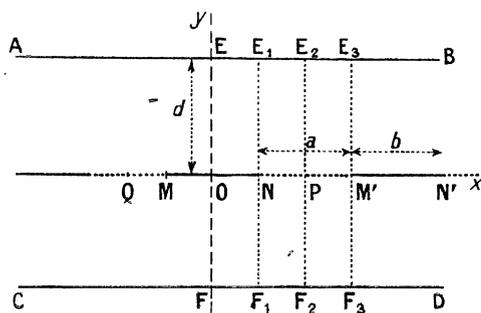


Fig. 4.

La grille est supposée se mouvoir perpendiculairement au plan de la figure avec la vitesse v_0 . Dans le plan P de cette figure, prenons pour origine le milieu O de la section du barreau MN, pour axe des x la direction du plan P contenue dans le plan de la grille et pour axe des y la perpendiculaire à ce plan. Désignons par b la largeur de chaque barreau et par a la largeur des fentes qui séparent ces barreaux. Les formules que nous allons obtenir se simplifieront dans le cas représenté sur la figure où a est égal à b , cas que nous supposons également réalisé dans l'appareil. Laissons, pour l'instant, a et b quelconques.

En raison de la structure périodique de la grille, la fonction cherchée v de x et de y doit être périodique en x avec la période $a + b$ et elle doit, en outre, être fonction paire de y pour tenir compte de la position symétrique occupée par la grille entre les plans fixes AB et CD.

Dans le cas où la distance d est supposée assez grande par rapport à la période $a + b$ (condition qui sera réalisée dans l'appareil) une première solution très simple nous sera fournie par application de la méthode des variables imaginaires ou de la représentation conforme.

On sait que si la variable complexe

$$Z = X - iY,$$

où X et Y sont des quantités réelles est une fonction analytique quelconque de la variable

$$z = x + iy,$$

les quantités conjuguées X et Y seront des fonctions harmoniques de x et y .

Pour simplifier nos formules ultérieures, posons, en conservant les notations de la figure 4

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\pi x}{a+b}, & \eta &= \frac{\pi y}{a+b}, & \delta &= \frac{\pi d}{a-b}, \\ \rho &= \frac{b}{a+b}, & \zeta &= \xi + i\eta, & \gamma &= \sin \frac{\pi \rho}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Il est remarquable que la fonction analytique Z de ζ et par conséquent de z , définie par la relation simple

$$\gamma \sin Z = \sin \zeta \quad (23)$$

fournisse la solution de notre problème.

Pour le montrer, traduisons la relation (23) dans le domaine réel par les deux équations qui lui sont équivalentes

$$\left. \begin{aligned} \gamma \sin X \operatorname{ch} Y &= \sin \xi \operatorname{ch} \eta, \\ \gamma \cos X \operatorname{sh} Y &= \cos \xi \operatorname{sh} \eta, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

γ étant, d'après sa définition (22) une constante positive et inférieure à l'unité.

Nous examinerons plus particulièrement ce qui concerne la fonction Y définie à partir de ξ et η par l'équation suivante, obtenue en éliminant X entre les deux équations (24).

$$\frac{\sin^2 \xi \operatorname{ch}^2 \eta}{\operatorname{ch}^2 Y} + \frac{\cos^2 \xi \operatorname{sh}^2 \eta}{\operatorname{sh}^2 Y} = \gamma^2, \quad (25)$$

Il est facile de voir que cette équation, quels que soient ξ et η , donne pour $\operatorname{sh}^2 Y$ une et une seule valeur positive à laquelle correspondent, pour $\operatorname{sh} Y$ et par conséquent pour Y , deux valeurs égales et de signes contraires. Pour achever de définir la fonction Y , nous choisirons la détermination positive dont il est également facile de voir qu'elle représente une fonction continue de ξ et de η dans toute l'étendue du plan des ζ .

Il résulte de l'équation (25), qui ne change pas quand on y remplace ξ par $\pi + \xi$, que la fonction Y est périodique en ξ avec la période π et, par conséquent, périodique en x avec la période $a + b$. De même, l'équation (25) ne changeant pas quand on y remplace η par $-\eta$, notre fonction Y est paire en η et, par conséquent, en y .

Montrons que cette fonction s'annule sur les segments tels que MN, M'N', ... de l'axe des x (fig. 4), c'est-à-dire sur les barreaux de la grille sans s'annuler dans leurs intervalles, c'est-à-dire sur les segments tels que NM' de l'axe des x .

Pour tout point appartenant à l'un quelconque de ces segments de l'axe des x , y et par conséquent η sont nuls et l'équation (25) devient

$$\text{sh}^2 Y (\sin^2 \xi - \gamma^2 \text{ch}^2 Y) = 0. \tag{26}$$

Les abscisses x de M et N sont respectivement $-\frac{b}{2}$

et $+\frac{b}{2}$ et correspondent aux valeurs $-\frac{\pi\rho}{2}$ et $+\frac{\pi\rho}{2}$

de ξ ou $-\gamma$ et $+\gamma$ de $\sin \xi$ en vertu des notations (22). On voit facilement que pour tout point des segments tels que MN (barreaux), $\sin^2 \xi$ est compris entre zéro et γ^2 , tandis que pour tout point des segments tels que NM' (fentes), $\sin^2 \xi$ est compris entre γ^2 et l'unité.

L'équation (26) montre que, dans le premier intervalle, $\text{ch}^2 Y$ étant toujours supérieur à l'unité, le second facteur du premier membre ne peut s'annuler et la seule solution possible est celle qui annule le premier facteur, c'est-à-dire

$$Y = 0.$$

Dans le second intervalle, au contraire, cette solution ne convient pas puisque, substituée avec $\eta = 0$ dans la première des équations (24) qui devient

$$\gamma \sin X = \sin \xi,$$

elle conduit à une impossibilité, $\sin \xi$ étant supérieur à γ en valeur absolue dans l'intervalle considéré et X devant être une quantité réelle.

On a donc nécessairement, dans cet intervalle à annuler le second facteur du premier membre de (26) et l'on obtient

$$\text{ch}^2 Y = \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \xi,$$

correspondant pour Y à des valeurs qui varient depuis 0 aux points tels que N, M' (bords des fentes) jusqu'à un maximum Y_P aux points tels que P (milieux des fentes) donné par

$$\text{ch} Y_P = \frac{1}{\gamma}. \tag{27}$$

Les caractères de la fonction Y ainsi obtenue apparaissent clairement sur la figure 5 qui traduit la correspondance établie par la relation (23) entre le plan des ζ et le demi-plan supérieur des Z (Y étant toujours positif) réalisant ainsi une représentation conforme de l'un sur l'autre.

La figure 5 correspond au cas particulier où a est égal à b et par conséquent ρ égal à $\frac{1}{2}$, d'où

$$\gamma = \sin \frac{\pi\rho}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et, d'après (27),

$$\text{ch} Y_P = \sqrt{2}. \quad Y_P = 0,88.$$

Les courbes tracées dans le plan des ζ sont les courbes

$$Y = \text{const.}$$

et correspondent aux droites horizontales du plan des Z . Elles sont tracées pour les valeurs croissantes de Y : $\frac{\pi}{8}$, Y_P , $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ et π .

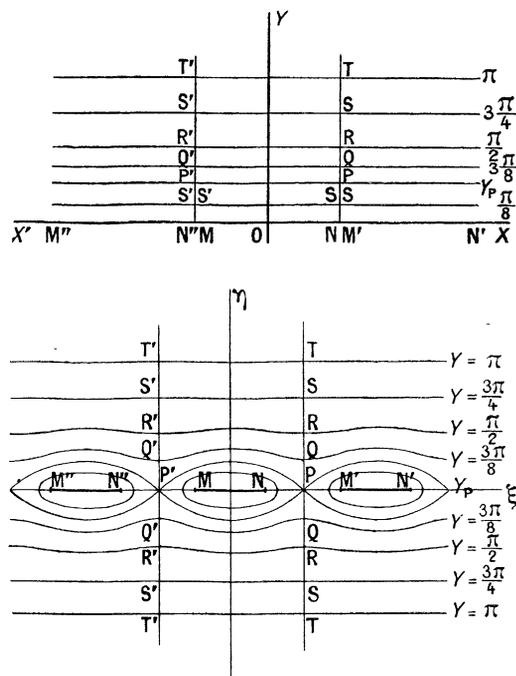


Fig. 5.

Les points homologues dans les deux plans des Z et des ζ sont indiqués par une même lettre. On voit que la transformation (23) dilate les segments MN, M'N', ... de l'axe des ξ (barreaux) et les place bout à bout pour en faire l'axe des X . En même temps, les segments tels que NM' (fentes) sont pliés en deux au point milieu P et relevés verticalement, les deux moitiés NP et PM' étant appliquées l'une sur l'autre.

Un caractère très net que fait ressortir la figure est que la déformation ou perturbation liée à l'existence des fentes diminue très rapidement quand on s'éloigne du plan de la grille et disparaît pratiquement à une distance de celle-ci qui est de l'ordre de la largeur des fentes. Alors que la courbe Q'Q qui correspond à la valeur $\frac{3\pi}{8}$ de Y est nettement ondulée, la courbe R'R pour Y égal à $\frac{\pi}{2}$ ne l'est plus que très faiblement et toute trace d'ondulation

disparaît, à l'échelle de la figure, sur S/S pour Y égal à $\frac{3\pi}{4}$. Cela signifie que les courbes

$$Y = \text{const.}$$

se transforment très rapidement, quand Y augmente, en courbes

$$\eta = \text{const.}$$

Ce fait peut se déduire directement de l'équation (25) qui, résolue par rapport à $\text{sh}^2 \eta$ donne

$$\text{sh}^2 \eta = \text{sh}^2 Y \frac{\gamma^2 \text{ch}^2 Y - \sin^2 \xi}{\text{ch}^2 Y - \sin^2 \xi}, \quad (28)$$

$\text{ch}^2 Y$ augmente très rapidement avec Y tandis que $\sin^2 \xi$ est au maximum égal à l'unité et devient négligeable à partir d'une valeur suffisante de Y . Dans ces conditions, (28) donne

$$\text{sh}^2 \eta = \gamma^2 \text{sh}^2 Y,$$

relation qui tend, pour Y suffisamment grand, vers

$$Y = |\eta| - L\gamma \quad (29)$$

$L\gamma$ étant le logarithme népérien de γ .

Dans le cas particulier de la figure, où γ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, cette relation limite devient

$$Y = |\eta| + L\sqrt{2} = |\eta| - 0,34657.$$

VITESSE EN UN POINT DU GAZ. — Voyons maintenant comment la fonction harmonique Y définie par (25) nous permet de résoudre le problème de l'influence des fentes sur le mouvement du gaz. Posons

$$v = v_0 - CY$$

et déterminons la constante C de manière que v s'annule sur les plateaux AB et CD, pour $y = \pm d$, c'est-à-dire pour $\eta = \pm \delta$. Si δ est suffisamment grand, et nous avons vu qu'il lui suffit d'atteindre quelques unités, alors que dans l'appareil réalisé il est de l'ordre de 10, la relation (29) est applicable et C se trouve déterminé par la condition

$$0 = v_0 - C(\delta - L\gamma),$$

d'où, pour la solution de notre problème

$$v = v_0 \left(1 - \frac{Y}{\delta - L\gamma} \right), \quad (30)$$

qui satisfait bien aux conditions imposées à v d'être une fonction harmonique prenant la valeur v_0 sur les barreaux de la grille ($Y = 0$) et s'annulant sur les plateaux AB et CD.

Les courbes de la figure 5 représentent ainsi les sections par le plan de la figure des surfaces cylindriques sur chacune desquelles v a une valeur constante.

Dans le plan de la grille, l'écart de la vitesse à

partir de v_0 est maximum au milieu des fentes, en P par exemple et a pour valeur

$$v_0 - v_P = v_0 \frac{L\gamma}{\delta - L\gamma}.$$

Dans l'appareil réalisé, δ est de l'ordre de 10, γ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et nous avons trouvé, pour Y_P , la valeur 0,880; l'écart relatif maximum par rapport à v_0 prend ainsi la valeur

$$\frac{v_0 - v_P}{v_0} = \frac{0,880}{10 - L\sqrt{2}} = \frac{0,880}{10,346} = 0,085.$$

DÉVIATION DE LA TRAJECTOIRE. — Voyons maintenant l'effet de cette perturbation, localisée au voisinage des fentes, comme le montre la figure 5, sur le déplacement des ions. Dans le problème plan que nous avons substitué au problème cylindrique, le champ électrique entre les plateaux AB et CD, reste uniforme malgré l'existence des fentes si la grille est portée au potentiel moyen entre ceux de AB et CD.

La fente F source des ions, située dans le plateau CD et perpendiculaire aux fentes de la grille, se projette sur le plan P de la figure 4 suivant $FF_1F_2F_3$ et l'électrode E, située dans le plateau AB se projette sur le même plan suivant $EE_1E_2E_3$. La trajectoire d'un ion particulier, dont le point de départ se projette en F, par exemple, serait la ligne de force électrique FOE si le gaz était immobile. L'entraînement de celui-ci par le mouvement de la grille qui est perpendiculaire au plan de la figure aura pour effet de faire suivre à l'ion une trajectoire qui se projettera suivant FOE, mais dont l'extrémité E sera déplacée perpendiculairement au plan de la figure de la quantité

$$l = \int v dt = \frac{1}{kh} \int_{-d}^{+d} v dy = \frac{v_0}{kh} \int_0^d v dy \quad (31)$$

v étant la vitesse d'entraînement du gaz au point d'ordonnée y sur la droite FE, h l'intensité du champ électrique uniforme et k la mobilité de l'ion sous l'action de ce champ.

L'ion n'arrivera d'ailleurs à l'électrode que si le point où sa trajectoire se présente pour traverser la grille tombe à l'intérieur d'une fente. Il en sera ainsi pour les trajectoires projetées entre F_1E_1 et F_3E_3 . Les déplacements l ne seront pas les mêmes pour toutes ces trajectoires et leurs valeurs extrêmes l_1 et l_2 correspondront évidemment aux trajectoires F_1E_1 et F_2E_2 qui traversent une fente : la première à son bord N, la deuxième en son milieu P. Si v_1 et v_2 désignent respectivement les vitesses d'entraînement du gaz au point d'ordonnée y sur les droites F_1E_1 et F_2E_2 , on aura, d'après (31),

$$l_1 = \frac{2}{kh} \int_0^d v_1 dy, \quad l_2 = \frac{2}{kh} \int_0^d v_2 dy. \quad (32)$$

C'est la différence $l_1 - l_2$ qui mesure la dispersion due à l'influence des fentes. Seule, sa valeur relative nous intéresse. Prenons pour terme de comparaison le déplacement l_0 que subirait l'ion si les fentes étaient infiniment étroites, c'est-à-dire si a tendait vers 0. On a, dans ce cas, d'après les définitions (22)

$$\rho = 1, \quad \gamma = \sin \frac{\pi \rho}{2} = 1, \quad L\gamma = 0$$

et la formule (30) devient, en tenant compte de (29)

$$v = v_0 \left(1 - \frac{|\eta|}{\delta} \right),$$

ce qui concorde bien avec la solution simple

$$v = v_0 \left(1 - \frac{|y|}{d} \right),$$

dans le cas où la grille est remplacée par un plan matériel déplacé avec la vitesse v_0 entre les deux plans fixes AB et CD. On a, dans ce cas, d'après (31),

$$l_0 = \frac{2}{kh} \int_0^d v_0 \left(1 - \frac{y}{d} \right) dy = \frac{v_0 d}{kh}. \quad (33)$$

Désignons par Y_1 et Y_2 les valeurs que prend la fonction Y de η sur F_1E_1 et F_2E_2 respectivement (fig. 4) qui correspondent aux valeurs $\frac{\pi}{2}\rho$ et $\frac{\pi}{2}$ de ζ , c'est-à-dire aux valeurs γ et 1 de $\sin \xi$. On aura, d'après (22), (30) et (32),

$$\begin{aligned} l_1 - l_2 &= \frac{2v_0}{kh(\delta - L\gamma)} \int_0^d (Y_2 - Y_1) dy \\ &= \frac{2v_0(a+b)}{\pi kh(\delta - L\gamma)} \int_0^{\delta} (Y_2 - Y_1) d\eta, \end{aligned}$$

d'où, d'après (33),

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{2}{\delta(\delta - L\gamma)} \int_0^{\delta} (Y_2 - Y_1) d\eta. \quad (34)$$

Les fonctions Y_2 et Y_1 de η s'obtiennent à partir de (25) en y donnant à $\sin^2 \zeta$ les valeurs 1 et γ^2 respectivement. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \text{ch } Y_2 &= \frac{1}{\gamma} \text{ch } \eta, \\ \text{sh}^2 Y_1 &= \frac{\text{sh } \eta (\text{sh } \eta + \sqrt{\text{sh}^2 \eta + 4\gamma^2(1-\gamma^2)})}{2\gamma^2}. \end{aligned}$$

Quand b est égal à a et γ égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ces expressions deviennent

$$\text{ch } Y_2 = \sqrt{2} \text{ch } \eta, \quad \text{sh}^2 Y_1 = \text{sh } \eta (\text{sh } \eta + \text{ch } \eta) \quad (35)$$

et la dispersion relative (34)

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{2}{\delta(\delta + L\sqrt{2})} \int_0^{\delta} (Y_2 - Y_1) d\eta. \quad (36)$$

Il résulte des définitions (35) que $Y_2 - Y_1$ tend très rapidement vers zéro quand η augmente, de sorte que l'intégrale figurant dans (36) ne dépend sensiblement pas de sa limite supérieure δ dès que celle-ci dépasse quelques unités. Cette valeur limite de l'intégrale, facile à calculer par intégration graphique, est sensiblement égale à 0,314, de sorte que

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{0,628}{\delta(\delta + L\sqrt{2})}, \quad \int_0^{\delta} (v_1 - v_2) d\eta = \frac{0,314}{\delta + L\sqrt{2}}.$$

Pour δ voisin de 10, cette valeur de la dispersion relative introduite par la largeur finie de fentes égales aux intervalles plans qui les séparent se montre ainsi inférieure au centième, c'est-à-dire à l'ordre que nous nous sommes fixé pour la finesse du spectre des mobilités.

Manuscrit reçu le 20 février 1949.