Conditions suffisantes pour qu'une matrice puisse caractériser un réseau de self-inductances dont les mailles indépendantes sont couplées par self-inductances et inductances mutuelles

Maurice Parodi

CONDITIONS SUFFISANTES POUR QU'UNE MATRICE PUISSE CARACTÉRISER UN RÉSEAU DE SELF-INDUCTANCES DONT LES MAILLES INDÉPENDANTES SONT COUPLÉES PAR SELF-INDUCTANCES ET INDUCTANCES MUTUELLES

Par MAURICE PARODI.

Sommaire. — L'auteur donne les conditions suffisantes pour qu'une matrice puisse représenter un réseau passif de self-inductances et de mutuelles inductances.

1. **Introduction : réseaux sans mutuelles inductances.** — Considérons tout d'abord un réseau électrique, passif, sans mutuelles inductances, formé de n mailles indépendantes numérotées de 1 à n, chaque maille étant affectée d'un sens positif de description, celui des aiguilles d'une montre par exemple.

A chaque branche, la structure du réseau fait correspondre trois nombres réels positifs : l, s et r représentant respectivement la self-inductance, l'élasticité (inverse d'une capacité) et la résistance de la branche ([1]).

Soit alors une maille quelconque de rang i du réseau et supposons que cette maille comporte une branche qui ne soit commune avec aucune autre maille et différentes branches communes respectivement avec les mailles de rangs $1, 2, \ldots, i-1$ $i+1, \ldots, n$.

A cette maille de rang i, nous faisons correspondre :

a. Trois paramètres totaux. — Self-inductance totale, élasticité totale, résistance totale.

La self-inductance totale est, par définition, la somme *positive*, des nombres positifs, qui mesurent la self-inductance de la branche non couplée et celle des branches communes à la maille i et aux mailles $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$.

L'élasticité totale et la résistance totale de la maille 1 se définissent d'une façon analogue.

Ces paramètres totaux, essentiellement positifs, seront notés l_{ii}, s_{ii}, r_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

b. Des paramètres de couplage. — Nombres réels positifs, négatifs ou nuls (ce dernier cas correspondant à l'absence de couplage) égaux respectivement aux nombres qui mesurent les self-inductances, les élasticités et les résistances des branches communes, affectés respectivement des signes + ou — selon que ces branches sont décrites ou non dans le même sens dans la maille i et les mailles $1, 2, \ldots, i-1$, $i+1, \ldots, n$.

Ces paramètres de couplage seront notés l_{ij}, s_{ij}, r_{ij} $(i \neq j;\, i, j = 1, 2, \ldots, n)$; on a manifestement $l_{ij} = l_{ji}$, $s_{ij} = s_{ji}$, $r_{ij} = r_{ji}$.

Il apparaît alors que le réseau peut être représenté par l'ensemble des trois matrices symétriques d'ordre n :

$$T = (l_{ij}), \qquad U = (s_{ij}), \qquad F = (r_{ij}), \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans de nombreux cas, le choix des mailles indépendantes peut être fait de telle manière qu'une branche couplée n'est commune qu'à deux mailles; dans cette éventualité, on a les conditions qui résultent de la définition des paramètres du réseau :

$$\left.\begin{array}{l} l_{ii} > 0, \quad s_{ii} > 0, \quad r_{ii} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ l_{ii} > \sum_j |l_{ij}|, \quad s_{ii} > \sum_j |s_{ij}|, \quad r_{ii} > \sum_j |r_{ij}|, \\ \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n) \end{array}\right\} \tag{1}$$

En se reportant à l'article précité, on peut faire correspondre aux trois matrices T, U et F trois formes quadratiques

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j l_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j, \qquad \mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j s_{ij}x_i x_j,$$

$$\mathcal{F} = \sum_i \sum_j r_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

qui représentent les trois formes d'énergie qui peuvent se manifester dans le réseau, x_i étant la quantité d'électricité qui circule dans la branche *non couplée* de la maille de rang i, comptée positivement dans le sens de circulation choisi pour cette maille.

Les formes quadratiques $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ ne pouvant s'annuler que pour des valeurs nulles des variables x_i et étant nécessairement positives pour tout autre jeu de valeurs des x_i, doivent être définies positives et, par suite, les déterminants des matrices T, U et F, ainsi que leurs mineurs principaux, doivent être *positifs*.

Nous avons montré ailleurs ([2]) que les conditions (1) étaient suffisantes pour que les formes associées à des matrices du type T, U et F soient définies positives et puissent, par suite, caractériser un réseau réalisable.

La démonstration repose sur le fait que les déterminants $\| T \|$, $\| U \|$ et $\| F \|$ satisfont aux conditions

([1]) *Voir*, par exemple, M. PARODI, *J. de Physique*, 1946, **7**, p. 94.

([2]) *C. R. Acad. Sc.*, 1946, **223**, p. 23.

de M. Hadamard [3] et, par suite, ne peuvent être nuls; par continuité, il est alors facile de montrer, tous les l , s_{ii} e r_{ii} étant positifs, qu'ils sont nécessairement positifs.

2. **Réseaux avec inductances mutuelles.** — Soit un réseau comportant n mailles indépendantes, une maille quelconque, celle de rang i par exemple, pouvant être couplée avec chacune des mailles 1, 2, ..., $i-1$, $i+1$, ..., n par self-inductances, ce qui fait intervenir les paramètres de couplage précédemment envisagés

$$l_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$$

et par mutuelle inductance : nous désignerons, par l_k, la self-inductance de la maille i couplée avec la self-inductance l_k^{ki} de la maille k [4] (ces coefficients étant positifs), le coefficient d'inductance mutuelle correspondant étant noté m_{ik} $(= m_{ki})$ et pouvant avoir un signe quelconque; entre ces trois coefficients existe la relation classique

$$m_{ik}^2 < l_i^k l_k^{ki}, \qquad (i \neq k).$$

Le réseau des self — et mutuelles inductances peut, dans ces conditions, être caractérisé par la matrice symétrique d'ordre n :

$$\mathbf{T}' = \begin{vmatrix} l_{11} + l_1^{1,2} + \ldots + l_1^{1,n} & l_{12} + m_{12} & \ldots & l_{1,n} + m_{1,n} \\ l_{12} + m_{12} & l_{22} + l_2^{2,1} + l_2^{2,3} + \ldots + l_2^{2,n} & \ldots & l_{2,n} + m_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ l_{1,n} + m_{1,n} & l_{2,n} + m_{2,n} & \ldots & l_{nn} + l_n^{n,1} + \ldots + l_n^{n,n-1} \end{vmatrix} \tag{2}$$

les l_{ii} étant les self-inductances totales de mailles dont la définition a été donnée au paragraphe précédent.

Cette matrice, avec le choix de mailles indépendantes précisé au paragraphe précédent, est telle que ses éléments satisfassent aux relations

$$\left.\begin{array}{l} l_{ii} > 0, \\ l_{ii} > \sum\limits_k |l_{ik}| \qquad (k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n), \\ l_i^{ik} > 0, \\ m_{ik}^2 < l_i^{ik} l_k^{ki} \qquad [i, k = 1, 2, \ldots, n (i \neq k)]. \end{array}\right\} \tag{3}$$

et la forme quadratique qui lui est associée doit être définie positive puisqu'elle représente l'énergie magnétique du réseau.

Nous nous proposons de montrer que toute matrice du type (2) satisfaisant aux conditions (3) est telle que la forme quadratique qui lui est associée $\mathcal{C}'$ est définie positive et peut, par suite, caractériser l'ensemble des self-inductances et mutuelles inductances d'un réseau passif réalisable.

La forme quadratique associée à (2) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' = \; & (l_{11} + l_1^{1,2} + \ldots + l_1^{1,n})x_1^2 + 2(l_{12} + m_{12})x_1 x_2 \\ & \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad + 2(l_{1,n} + m_{1,n})x_1 x_n \\ & + (l_{22} + l_2^{2,1} + \ldots + l_2^{2,n})x_2^2 + \ldots \\ & \qquad + 2(l_{2,n} + m_{2,n})x_2 x_n \\ & \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (l_{nn} + l_n^{n,1} + \ldots + l_n^{n,n-1})x_n^2. \end{aligned}$$

ou encore, sous la forme d'une somme de deux formes quadratiques

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' = \; & | \; l_{11} x_1^2 + 2 l_{12} x_1 x_2 + \ldots \\ & \qquad + 2 l_{1,n} x_1 x_n \\ & + l_{22} x_2^2 + 2 l_{23} x_2 x_3 + \ldots \\ & \qquad + 2 l_{2,n} x_2 x_n \\ & \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad\qquad + l_{nn} x_n^2 | \\ + | \; & (l_1^{1,2} + \ldots + l_1^{1,n})x_1^2 + \ldots \\ & \qquad + 2 m_{1,n} x_1 x_n \\ & + (l_2^{2,1} + \ldots + l_2^{2,n})x_2^2 + \ldots \\ & \qquad + 2 m_{2,n} x_2 x_n \\ & \qquad + (l_n^{n,1} + \ldots + l_n^{n,n-2})x_n^2 |. \end{aligned}$$

Les coefficients de la première forme quadratique satisfont aux relations (1) du premier paragraphe, cette dernière est donc une forme définie positive.

La seconde forme peut s'écrire

$$\begin{aligned} & (l_1^{1,2} x_1^2 + 2 m_{12} x_1 x_2 + l_2^{2,1} x_2^2) \\ & + (l_1^{1,3} x_1^2 + 2 m_{13} x_1 x_3 + l_3^{3,1} x_3^2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (l_{n-1}^{n-1,n} x_{n-1}^2 + 2 m_{n-1,n} x_{n-1} x_n + l_n^{n,n-1} x_n^2). \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que

$$m_{ik}^2 < l_i^k l_k^{ki} \qquad (i \neq k),$$

elle se présente sous la forme d'une somme de formes définies positives, elle est donc définie positive.

Finalement, $\mathcal{C}'$, somme de termes toujours positifs et nulle seulement pour des valeurs nulles des x, est définie positive et le déterminant $\| T' \|$ est toujours positif.

Ainsi, toute matrice du type $\mathbf{T}'$ dont les éléments satisfont aux relations (3) caractérise un réseau réalisable.

Manuscrit reçu le 31 juillet 1946.

[3] *Leçons sur la propagation des ondes*, Paris, 1903.

[4] Nous nous limitons ainsi au cas où la self l_i^{ik} n'est couplée qu'à la self l_k^{ki} de la maille k.