La température dans l'analyse dimensionnelle

Jean Villey

LA TEMPÉRATURE DANS L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

Par M. JEAN VILLEY.

Sommaire. — Quand on parle de la température, on songe, en général, à son repère dans une échelle thermométrique : il n'est en rien modifié par un changement de grandeur des unités fondamentales. Mais si, dans l'analyse dimensionnelle, on envisage la température parmi les facteurs possibles d'une loi physique, il s'agit de la température considérée comme une grandeur physique : ses dimensions doivent être celles du carré d'une vitesse pour que le système d'unités soit cohérent.

C'est en oubliant cette observation fondamentale qu'on a souvent prétendu justifier par l'analyse dimensionnelle, la loi fausse qui faisait varier la résistance aérodynamique proportionnellement à la densité de l'air et au carré de la vitesse de translation du mobile.

De telles erreurs d'application ont conduit parfois à mettre en cause l'analyse dimensionnelle elle-même et à l'accuser d'impuissance totale. On a profité de cette étude pour préciser ici ses possibilités — qui sont loin d'être négligeables — en ce qui concerne la prévision des lois physiques.

1. La loi de la résistance aérodynamique. — L'évolution des idées relatives à la loi de variation de la résistance aérodynamique sur un solide en mouvement, en fonction de l'état de l'air et de la vitesse V de translation, appelle des observations assez instructives en ce qui concerne l'analyse dimensionnelle.

Il y a plus de soixante ans, Sarrau enseignait, à l'École Polytechnique, que les considérations d'homogénéité conduisent à prévoir, pour la résistance par unité de surface, une variation proportionnelle à $p.\varphi\left(\frac{V^2\rho}{p}\right)$, en appelant ρ la densité et p la pression de l'air, ou, en notant que la célérité du son W satisfait à la condition

$$W^2 = \gamma R \mathfrak{T} = \gamma \frac{p}{\rho},$$

proportionnelle à

$$p.f\left(\frac{V^2}{W^2}\right). \tag{1}$$

La même chose a été enseignée pendant plus de quarante ans par Émile Picard à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

Il est curieux de constater que cette conclusion essentielle ne s'est pas introduite dans les calculs des techniciens, qui ont continué à invoquer la loi de première approximation

$$F = kS\rho V^2. \tag{2}$$

Cette loi n'est pas inadmissible *a priori*, car elle respecte l'homogénéité; mais il n'en résulte nullement qu'elle soit vraie. En fait, elle est fausse comme on s'en aperçoit dès que l'on s'écarte du domaine des vitesses moyennes où la proportionnalité à V^2 est une bonne approximation.

Les balisticiens ont bientôt constaté le désaccord flagrant de cette loi avec la réalité aux grandes vitesses qui les intéressent. Ils se sont alors contentés d'introduire un facteur de correction, et ils ont cherché à préciser et à utiliser des lois de la forme

$$F = S\rho V^2 f(V), \tag{3}$$

bien qu'une telle loi soit un scandale, car elle égale une grandeur de dimension zéro $\frac{F}{S\rho V^2}$ à une grandeur de dimension non nulle $f(V)$.

La guerre de 1914 a fait participer aux études de balistique des mathématiciens et des physiciens de formations très diverses. Libres des idées préconçues qu'imposent, dans une technique spécialisée, les traditions qui s'y transmettent et s'y conservent, ils y ont apporté des points de vue nouveaux.

Un mathématicien, qui assimile l'air à un milieu continu pour lui appliquer des équations aux dérivées partielles, peut, à la rigueur, penser que cet air est complètement défini, au point de vue mécanique, par sa densité. Mais, pour un physicien, qui y voit un essaim de molécules, il apparaît que leur vitesse d'agitation doit intervenir dans la valeur des efforts aérodynamiques, et qu'il y a lieu de tenir compte du rapport de la vitesse de translation V à la vitesse moyenne d'agitation des molécules, ou à la célérité W du son qui lui est proportionnelle. C'est ce qu'a fait M. Darrieus, en proposant la loi

$$F = S\rho V^2 f\left(\frac{V}{W}\right) \tag{4}$$

qui faisait disparaître le scandale de la non-homogénéité de la loi (3).

Ainsi s'introduit, par la relation $W^2 = \gamma R \mathfrak{T}$, la température, qu'il n'y avait aucune raison de négliger *a priori* comme facteur d'action possible.

Cette rectification devenait fort notable pour l'artillerie à très longues portées dont les projectiles atteignent en cours de route des altitudes fort élevées et des températures beaucoup plus basses qu'au voisinage du sol.

Malgré cette logique évidente et les premières constatations favorables, cette loi nouvelle inquiétait les habitudes acquises. Une consultation fut demandée à M. Langevin. Celui-ci, après avoir observé que la relation

$$\frac{p}{\rho} = R\mathfrak{T} = \frac{W^2}{\gamma}$$

permet de l'écrire

$$F = Sp\gamma\frac{V^2}{W^2}f\left(\frac{V}{W}\right) = Sp\varphi\left(\frac{V}{W}\right), \tag{5}$$

montra que cette forme était seule compatible avec les équations de l'hydrodynamique et la confirma expérimentalement par des mesures sur des jets d'air sortant d'un réservoir sous pressions élevées.

Ainsi était démontrée et vérifiée la forme de loi prévue par Sarrau et Picard.

C'est un succès remarquable pour l'analyse dimensionnelle, qui avait, depuis si longtemps, devancé cette confirmation.

Mais des partisans trop zélés de l'analyse dimensionnelle prétendaient y trouver la prévision de la loi (2) : cette conclusion ne serait vraie que si l'on posait en principe *a priori* que l'état de l'air est complètement défini, au point de vue résistance aérodynamique, par sa densité ρ.

Là est l'erreur : pour définir l'état de l'air, il faut donner les valeurs de *deux* des trois caractéristiques p, ρ, $\mathfrak{T}$, qui sont reliées entre elles par l'équation d'état $\frac{p}{\rho} = R\mathfrak{T}$ (ou, si l'on préfère, les valeurs de deux combinaisons indépendantes de ces trois caractéristiques).

Si l'on utilise p et ρ, comme Sarrau et Picard, on aboutit sans aucune difficulté à leur conclusion.

Mais si l'on utilise ρ et $\mathfrak{T}$, que l'on peut appeler les variables naturelles [1], il y a lieu d'éviter une erreur possible en ce qui concerne les dimensions qui doivent être attribuées à la température $\mathfrak{T}$.

2. **Dimensions de la température.** — Un malentendu risque, en effet, de s'introduire du fait qu'on a l'habitude de définir la température non pas par une équation de définition qui, ramenant directement ou indirectement son évaluation à des mesures de longueur, de masse et de temps [2], indiquerait immédiatement ses dimensions, mais par un simple repère dans une échelle thermométrique.

Ce repère thermométrique est constitué par un chiffre, qui n'est altéré en aucune manière lorsque l'on change la grandeur des unités fondamentales. En effet, la température centigrade est égale à cent fois le rapport entre l'augmentation de volume d'une masse de mercure depuis la glace fondante jusqu'à la température considérée et l'augmentation de volume entre la glace fondante et l'eau bouillante. La température absolue est, au terme additif 273 près, définie de façon analogue au moyen des pressions d'une masse de gaz parfait maintenue à volume constant.

La température ainsi comprise apparaît comme une grandeur de dimension nulle, et cette illusion risque d'être encore renforcée si l'on songe à la définition thermodynamique de la température absolue au moyen des rapports des quantités de chaleur reçues et perdues dans les cycles de Carnot.

Mais lorsque l'on veut faire intervenir la température dans l'analyse dimensionnelle, il s'agit, non pas de ce repère thermométrique sans dimensions, mais d'une *grandeur physique* mesurable (et non pas seulement repérable) grâce à des relations avec les unités fondamentales, qui définiront ses dimensions.

Ces dimensions seront immédiatement indiquées par l'une quelconque des équations thermodynamiques où intervient la température.

Considérons par exemple l'équation d'état

$$\frac{p}{\rho} = R\mathfrak{T}. \tag{6}$$

Lorsque l'on identifie $\mathfrak{T}$ à son repère thermométrique, R devient une grandeur de mêmes dimensions que le quotient d'une pression par une densité, c'est-à-dire de mêmes dimensions que le carré d'une vitesse. Mais cette manière d'interpréter l'équation (6) est irrationnelle. Cette équation d'état a, en effet, la prétention de relier entre elles trois grandeurs physiques : la pression, la densité et la température; c'est donc R et non pas $\mathfrak{T}$, qu'il faut rabaisser au rôle de simple coefficient spécifique sans dimensions [3], et l'on constate que la température (gran-

(1) Elles correspondent en effet aux modes d'intervention du physicien qui, pour étudier un gaz, l'enferme dans un récipient (donnée v ou ρ) et place celui-ci dans un bain dont il règle la température $\mathfrak{T}$.

(2) De telles mesures seraient à faire à l'ordre de grandeur de l'agitation moléculaire.

(3) Il s'agit ici du coefficient *spécifique* qui figure dans l'équation d'état $pv = R\mathfrak{T}$, où $v = \frac{1}{\rho}$ est le *volume spécifique*. Si l'on veut introduire la constante *moléculaire*, il faut multiplier les deux nombres de l'équation par la masse moléculaire $\mathfrak{M}$ pour obtenir $p\mathfrak{M}v = \mathfrak{M}R\mathfrak{T}$ ou $p\mathfrak{V} = \mathcal{R}.\mathfrak{T}$, dans laquelle $\mathfrak{V}$ représente un *volume*. La constante moléculaire $\mathcal{R} = \mathfrak{M}R$ a donc les dimensions d'une masse.

deur physique) a les mêmes dimensions que le carré d'une vitesse.

On obtient bien entendu, à titre de confirmation, le même résultat à partir de la seconde équation caractéristique des gaz parfaits :

$$U = c\mathfrak{T}, \tag{6'}$$

qui, lorsque l'on réduit c au rôle de coefficient spécifique sans dimensions, donne, pour $\mathfrak{T}$, les dimensions du quotient d'une énergie par une masse, c'est-à-dire encore les dimensions du carré d'une vitesse.

La même conclusion est fournie de façon encore plus immédiate par l'équation de la célérité du son

$$W^2 = \gamma R \mathfrak{T}. \tag{7}$$

Dans l'étude, par l'analyse dimensionnelle, de la résistance aérodynamique, si l'on commet l'erreur d'attribuer à la température des dimensions nulles, on aboutira à la loi fausse de proportionnalité à ρV^2, comme lorsque l'on oubliait de la faire entrer en ligne de compte. Nous vérifierons facilement, au contraire, que, si on lui attribue les dimensions du carré d'une vitesse, on prévoit la proportionnalité à $p.\varphi\left(\frac{V}{W}\right)$ démontrée et vérifiée par Langevin.

Il est bon d'éclairer pour cela les possibilités de prévision de l'analyse dimensionnelle. Elles ont été parfois exagérées, mais elles sont loin de mériter le scepticisme que cela a parfois provoqué à leur endroit.

3. **Les équations de l'analyse dimensionnelle.** — Il est certain, en effet, du moins si l'on admet qu'on ait su constituer un système d'unités *cohérent*, c'est-à-dire capable de formuler les lois physiques sous forme invariante, que les considérations d'homogénéité peuvent indiquer seulement qu'une loi proposée est, *a priori*, impossible si elle ne satisfait pas l'homogénéité, c'est-à-dire si elle prétend égaler deux termes dont les variations ne sont pas proportionnelles lorsque l'on change la grandeur des unités fondamentales.

Mais, lorsqu'elles constatent la non-impossibilité de la loi proposée, on pourra considérer cette loi comme certainement vraie s'il est certain qu'il en existe une entre les grandeurs considérées et s'il apparaît impossible d'en imaginer aucune autre qui satisfasse, elle aussi, à la condition d'homogénéité.

Ce dernier cas se présente en particulier, sous des conditions que l'on peut préciser, lorsque l'on suppose que toutes les grandeurs A, B, C, D, ... à relier entre elles sont définies, à partir des seules unités fondamentales de longueur, masse et temps, par des équations qui fournissent, immédiatement ou indirectement, la mesure de chacune d'elles sous la forme du produit de puissances (entières ou fractionnaires, positives ou négatives, ou éventuellement nulles) de mesures de longueurs, masses et temps.

Nous n'envisagerons que de telles grandeurs physiques.

Une équation homogène peut se mettre sous la forme d'une relation numérique entre grandeurs de degré zéro.

Les prévisions qu'il est possible de tirer de l'analyse dimensionnelle dépendent du nombre de combinaisons sans dimensions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... que l'on peut former au moyen des grandeurs A, B, C, D, ... de dimensions non nulles susceptibles d'intervenir dans la loi.

La loi invariante cherchée doit, en effet, être de la forme

$$\mathcal{A} = f(\mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots; a, b, c, \dots), \tag{8}$$

où a, b, c, ... représentent les grandeurs de dimension zéro — en général des angles, autrement dit des éléments de forme ou d'orientation — qui sont susceptibles d'intervenir dans le phénomène étudié; f est une fonction complètement indéterminée.

S'il n'existe qu'une combinaison invariante $\mathcal{A}$ et si a, b, c, ... restent constantes, cette loi devient

$$\mathcal{A} = \mathrm{C^{te}}, \tag{9}$$

et elle peut alors s'écrire sous la forme

$$A = \varphi(B, C, D, \dots), \tag{9'}$$

où φ est une fonction connue par la définition même de $\mathcal{A}$ au moyen de (A, B, C, D, ...).

Or, avec les hypothèses que nous avons admises relativement à la nature des grandeurs A, B, C, D, ..., on sait former des combinaisons invariantes de la forme

$$\mathcal{A} = \frac{A}{B^x C^y D^z \dots}, \tag{10}$$

où nous mettons en évidence la grandeur A que nous cherchons à évaluer en fonction des autres grandeurs B, C, D, ...

Il faut écrire, pour cela, que les exposants de L, de M et de T, dans les symboles dimensionnels du numérateur et du dénominateur, sont respectivement égaux.

En écrivant chacun des symboles dimensionnels sous la forme $L^\lambda M^\mu T^\tau$, et en distinguant par les indices 0, 1, 2, 3, ... les exposants λ, μ, τ, relatifs aux grandeurs A, B, C, D, ..., on obtient ainsi les trois conditions :

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 t + \dots \\ \mu_0 &= \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z + \mu_4 t + \dots \\ \tau_0 &= \tau_1 x + \tau_2 y + \tau_3 z + \tau_4 t + \dots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

imposées aux exposants inconnus x, y, z, t, ...

Le cas normal d'utilisation de ce système de trois équations est celui où il comporte trois inconnues, c'est-à-dire où la grandeur physique A

(supposée de dimensions non nulles) que nous étudions dépend de trois autres grandeurs physiques de dimensions non nulles B, C et D, autrement dit encore où nous cherchons à relier, par une loi, quatre grandeurs de dimensions non nulles.

Entre moins de quatre grandeurs de dimensions non nulles, il ne peut exister de loi invariante que sous des conditions restrictives faciles à préciser par l'analyse dimensionnelle. Entre plus de quatre grandeurs, l'analyse dimensionnelle ne peut pas prédéterminer complètement la loi, ce qui n'exclut pas d'ailleurs qu'elle puisse donner, sur elle, des renseignements très utiles.

4. **Lois reliant deux grandeurs** ($N=1+n=2$). — Entre deux grandeurs de dimensions non nulles, la seule [1] combinaison invariante possible est de la forme

$$\mathcal{A} = \frac{A}{B^x}.$$

Les équations (11) comportent une seule inconnue x, et la condition de compatibilité est alors

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{\tau_0}{\tau_1},$$

c'est-à-dire que le symbole dimensionnel de l'une doit être identique à une puissance du symbole de l'autre, ce que nous pourrons exprimer en disant que les deux grandeurs sont de *même famille.* Cela comporte le cas particulier où elles sont de même *dimension*, c'est-à-dire où elles ont le même symbole dimensionnel, et le cas encore plus particulier où elles sont de *même espèce.*

Désignons par m la valeur commune des trois rapports ci-dessus des exposants (que l'on peut appeler *puissance* de la grandeur A par rapport à la grandeur B), la loi invariante cherchée s'écrit immédiatement sous la forme

$$A = kB^m. \tag{12}$$

Nous aurons, par exemple, les lois suivantes. Entre deux grandeurs de même famille : la célérité du son dans un gaz varie proportionnellement à la racine carrée de la température. Entre deux grandeurs de même dimension (système électrostatique) : la capacité électrique d'une sphère est égale à son rayon. Entre deux grandeurs de même espèce : la célérité du son varie proportionnellement à la vitesse moyenne d'agitation des molécules.

5. **Lois reliant trois grandeurs** ($N=1+n=3$). — Si la grandeur A dépend de deux grandeurs B et C de dimensions non nulles, la condition de compatibilité des trois équations (11) à deux inconnues x et y s'écrit en annulant le déterminant complet formé avec les 9 exposants λ, μ et τ de leurs trois symboles, soit

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Cela veut dire que l'on a simultanément

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \\ \mu_0 &= \alpha\mu_1 + \beta\mu_2, \\ \tau_0 &= \alpha\tau_1 + \beta\tau_2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

autrement dit que chacun des trois symboles est identique au produit des deux autres symboles élevés respectivement à des puissances convenables, ce que nous exprimerons en disant que les trois grandeurs sont *associées.*

Il y a lieu de distinguer alors plusieurs hypothèses.

1° Si B et C sont de même famille, on a

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \gamma,$$

et les équations (14) deviennent

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \frac{\mu_0}{\mu_2} = \frac{\tau_0}{\tau_2} = \alpha\gamma + \beta, \tag{15}$$

c'est-à-dire que, pour qu'il y ait une combinaison invariante $\mathcal{A}$ contenant A, il faut que A soit, lui aussi, de la même famille.

Dans ce cas exceptionnel où les trois grandeurs sont de même famille, on aura, entre leurs symboles, les relations $[B] = [A]^m$ et $[C] = [A]^n$ et la condition d'invariance de $\mathcal{A} = \dfrac{A}{B^x C^y}$ se réduit à $mx + ny = 1$. Il y a donc une infinité de combinaisons invariantes $\mathcal{A}$ possibles, et l'on ne peut pas prévoir la forme de la loi.

2° Si deux seulement des trois grandeurs sont de même famille, la seule combinaison invariante possible est celle qui les relie simplement l'une à l'autre. Par exemple, si l'on a, entre les symboles, la relation $[A] = [B]^m$, on aura la combinaison $\mathcal{A}' = \dfrac{A}{B^m}$, et la seule loi possible est $A = kB^m$. Elle n'est toutefois à retenir que s'il apparaît admissible que A soit uniquement fonction de B : on a alors un cas dégénéré qui nous ramène à celui du paragraphe 4. Si nous cherchons par exemple la loi de variation de la célérité du son W dans l'air, en fonction de son état, caractérisé par p et $\mathfrak{T}$, puisque W et $\mathfrak{T}$ sont de même famille, avec la relation $[W] = [\mathfrak{T}]^{0,5}$ entre leurs symboles, la seule loi possible fait varier la célérité du son proportionnellement à la racine carrée de la température, sans intervention de la pression.

[1] Toutes les puissances d'une combinaison invariante sont elles aussi des combinaisons invariantes, mais nous ne les considérerons pas comme distinctes les unes des autres.

3° Enfin, le cas le plus normal est celui où les trois grandeurs A, B et C sont de trois familles différentes. Alors la condition (13) suffit pour garantir l'existence d'une, et d'une seule, combinaison invariante complète $\mathcal{A} = \frac{A}{B^x C^y}$. En effet, puisque B et C ne sont pas de même famille, il y a au moins l'un des trois déterminants du second ordre tirés des deux dernières colonnes de (13) qui n'est pas nul. Soit par exemple

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On peut alors utiliser les deux dernières équations du système (11) pour calculer les deux inconnues x et y. Elles sont certainement toutes les deux différentes de zéro, car ni $\frac{A}{B^x}$ ni $\frac{A}{C^y}$ ne peuvent avoir l'invariance exprimée par les équations (11) puisque ni B ni C ne sont de même famille que A. Pour la même raison, il ne peut pas y avoir une autre combinaison invariante, car elle devrait être du type $\mathcal{B} = \frac{B}{C^y}$, et c'est impossible puisque B et C ne sont pas de même famille.

La seule loi invariante possible est donc alors

$$A = kB^x C^y. \tag{16}$$

Si le déterminant (13) n'est pas nul, les équations (11) n'ont pas de solution et l'on ne peut pas former de combinaison invariante contenant A, qui permettrait de déterminer une loi invariante donnant A en fonction de B et de C.

6. **Lois reliant quatre grandeurs** ($N = 1 + n = 4$). — Lorsque A dépend de trois autres grandeurs de dimensions non nulles B, C et D, nous sommes en présence du cas normal d'un système (11) de trois équations à trois inconnues x, y et z.

On sait les calculer si la condition

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{17}$$

est satisfaite.

Cette condition veut dire, d'après le paragraphe 5, qu'il n'existe pas de combinaison invariante du type $\mathcal{B} = \frac{B}{C^{y'} D^{z'}}$. Elle exclut aussi le cas où deux des trois grandeurs B, C, D seraient de même famille, ce qui rendrait proportionnels entre eux les éléments de deux colonnes de (17).

Dans ce cas, il existe une combinaison invariante $\mathcal{A} = \frac{A}{B^x C^y D^z}$ et il n'en existe aucune autre. La seule loi invariante possible est alors

$$A = f(a, b, c, \dots) B^x C^y D^z \tag{18}$$

qui sera certainement la loi cherchée, si du moins cette loi existe.

Pour qu'elle fasse effectivement intervenir toutes les grandeurs envisagées, il faut que x, y et z soient tous non nuls, c'est-à-dire que chacun des trois déterminants obtenus en remplaçant l'une des colonnes de (17) par les exposants du symbole $[A]$ (indice zéro) soit différent de zéro. Cela veut dire que la grandeur A ne doit être associée à aucun des trois groupes de deux des grandeurs B, C, D.

Si cette condition n'est pas satisfaite, on aura, par exemple,

$$[A] = [C]^m [D]^n,$$

autrement dit

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= m\lambda_2 + n\lambda_3, \\ \mu_0 &= m\mu_2 + n\mu_3, \\ \tau_0 &= m\tau_2 + n\tau_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

et ces valeurs portées dans les équations (11) les transforment en un système de trois équations homogènes

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 x + \lambda_2(y - m) + \lambda_3(z - n) &= 0, \\ \mu_1 x + \mu_2(y - m) + \mu_3(z - n) &= 0, \\ \tau_1 x + \tau_2(y - m) + \tau_3(z - n) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

dont le déterminant complet est différent de zéro. Il n'admet que les solutions toutes nulles

$$x = (y - m) = (z - n) = 0,$$

d'où

$$x = 0, \qquad y = m, \qquad z = n,$$

et la loi (18) prend la forme dégénérée

$$A = f(a, b, c, \dots) C^m D^n, \tag{21}$$

Elle ne peut pas se réduire à la forme

$$A = f(a, b, c, \dots) C^y, \tag{22}$$

car les deux conditions simultanées

$$\lambda_0 = m\lambda_2 + n\lambda_3, \qquad \mu_0 = m\mu_2 + n\mu_3, \qquad \tau_0 = m\tau_2 + n\tau_3,$$

et

$$\lambda_0 = p\lambda_1 + q\lambda_2, \qquad \mu_0 = p\mu_1 + q\mu_2, \qquad \tau_0 = p\tau_1 + q\tau_2,$$

qui annuleraient respectivement x et z, annuleraient le déterminant (17).

Envisageons maintenant le cas où le déterminant (17) des exposants de $[B]$, $[C]$ et $[D]$ est nul, c'est-à-dire où les trois grandeurs B, C et D sont associées.

Les raisonnements du paragraphe 5 montrent qu'il existe alors au moins une combinaison invariante des trois grandeurs B, C, D, que l'on peut noter

$$\mathcal{D} = \frac{D}{B^{x'} C^{y'}},$$

cette écriture englobant le cas particulier $\frac{D}{C^{y'}}$.

Alors la loi cherchée

$$A = f(a, b, c, \ldots) B^x C^y D^z,$$

dont on ne sait pas calculer les exposants x, y, z, pourra s'écrire

$$A = f(a, b, c, \ldots) B^{x+x'z} C^{y+y'z} \left(\frac{D}{B^{x'} C^{y'}}\right)^z,$$

ou

$$A = f(a, b, c, \ldots) B^{x''} C^{y''} \mathcal{D}^z, \tag{23}$$

en posant

$$x + x'z = x'' \quad \text{et} \quad y + y'z = y''.$$

Mais les conditions d'homogénéité qu'invoque l'analyse dimensionnelle ne peuvent donner aucun renseignement sur l'exposant z de la combinaison invariante $\mathcal{D}$. Par conséquent, z reste arbitraire, et l'on peut prendre, pour A, une somme de termes (23) contenant, avec les mêmes exposants x'' et y'', des exposants variés z. C'est-à-dire que, au regard de l'analyse dimensionnelle, la grandeur A peut être une fonction arbitraire de l'invariant $\mathcal{D}$ et l'on devra écrire

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{D}) B^{x''} C^{y''}. \tag{24}$$

On peut alors appliquer à la recherche des exposants x'' et y'' les raisonnements du paragraphe 5.

Si A, B et C sont de familles différentes, x'' et y'' sont déterminées, et l'on a une loi analogue à la loi (16), mais avec cette différence fondamentale que le coefficient de $B^{x''} C^{y''}$, au lieu d'être une constante (lorsque les grandeurs sans dimensions a, b, c, ... sont supposées données), est une fonction inconnue de la combinaison invariante $\mathcal{D} = \dfrac{D}{B^{x'} C^{y'}}$ par laquelle D intervient dans la loi cherchée.

Si A est de même famille que l'une des autres grandeurs, soit $[A] = [B]^m$, cette loi dégénère en

$$A = f(\mathcal{D}) B^m. \tag{24'}$$

Elle devient $A = k B^m$ si l'on s'impose de maintenir constante la combinaison $\mathcal{D}$.

Enfin, dans le cas exceptionnel où A, B et C seraient tous les trois de la même famille (ce qui exigerait aussi D de cette même famille puisque $\mathcal{D}$ est invariant), l'analyse dimensionnelle ne pourrait fournir aucun renseignement sur la loi.

7. Cas où $N = 1 + n$ est supérieur à 4. — Lorsque le nombre des grandeurs de dimensions non nulles est supérieur à 4, l'analyse dimensionnelle ne peut jamais déterminer la loi puisque le système des trois équations (11) contient plus de trois inconnues ($n > 3$).

Elle peut toutefois donner sur elle, par les raisonnements des paragraphes 4, 5 et 6, des renseignements qui, surtout dans le cas $N = 5$, restent fort utiles.

En effet, ils permettent de reconnaître les combinaisons invariantes des types $\mathcal{D} = \dfrac{D}{E^m F^n G^p}$ ou $\mathcal{E} = \dfrac{E}{F^{n'} G^{p'}}$ ou $\mathcal{F} = \dfrac{F}{G^{p''}}$ que l'on peut former avec 4, 3 ou 2 des grandeurs B, C, D, E, F, G, ... dont dépend A, et chacune d'elles permet, dans l'expression générale

$$A = k B^x C^y D^z E^t F^u G^v, \ldots, \tag{25}$$

de faire disparaître l'une des grandeurs, du moins sous sa forme explicite, par exemple D^z, pour le remplacer par une fonction inconnue de la combinaison invariante $\mathcal{D}$, qui s'introduit dans k.

Pour opérer méthodiquement cette élimination progressive, on recherche d'abord les groupes de deux grandeurs de même famille, qui introduiront des combinaisons invariantes du type $\mathcal{F}$, puis les groupes de trois grandeurs associées, qui introduisent des combinaisons du type $\mathcal{E}$. Ayant ainsi fait disparaître du second membre tous les groupes de deux grandeurs de même famille et de trois grandeurs associées, on est sûr, s'il reste encore $(3 + q)$ grandeurs, de pouvoir former avec elles q combinaisons invariantes du type $\mathcal{D}$.

Alors, s'il existait au second membre de (25) au moins trois grandeurs non associées, on arrive à la loi

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots) B^x C^y D^z \tag{26}$$

qui n'est pas dégénérée si la grandeur A n'est associée à aucun des groupes de deux des grandeurs B, C, D.

Si A est associée avec C et D, on a la forme dégénérée du type (21)

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots) C^m D^n, \tag{26'}$$

ce qui ne veut pas dire d'ailleurs que A soit indépendant de B, qui peut intervenir dans les combinaisons invariantes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, ...

Nous avons vu qu'elle ne peut pas aboutir à la forme

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots) C^m. \tag{26''}$$

qui correspondrait à (22).

Si le second membre de (25) ne contient pas trois grandeurs non associées, on peut encore, dans (26), éliminer D au moyen de la combinaison invariante $\mathcal{D}' = \dfrac{D}{B^m C^m}$, et l'on arrivera alors à la loi

$$A = f(a, b, c, \ldots; \mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots) B^{x'} C^{y'}. \tag{27}$$

Elle a une forme analogue à la loi (26'), mais f contient $(N - 3)$ combinaisons invariantes au lieu de $(N - 4)$.

Lorsqu'il y a dans f plusieurs combinaisons invariantes qui y interviennent simultanément, il n'y a pas grand'chose d'utile à tirer de ces résultats. Mais si nous considérons par exemple le cas où A dépend de quatre grandeurs ($n = 4$, d'où $N = 5$) dont trois au moins ne soient pas associées entre elles, on obtient

$$A = f(\mathcal{E}) B^x C^y D^z, \tag{28}$$

qui permet d'étudier la variation de A en fonction de B, C et D, *lorsque* $\mathcal{E}$ *est maintenu constant* [ce qui donne $f(\mathcal{E}) = k$]. Nous ne savons toutefois rien dire *a priori* de la forme de la variation en fonction de $\mathcal{E}$.

8. **Application à la résistance aérodynamique.** — Appliquons ces notions à l'étude de la force aérodynamique F à laquelle est soumis un mobile en mouvement uniforme dans l'air supposé en équilibre (sauf la perturbation provoquée par le mobile lui-même).

Les grandeurs susceptibles d'intervenir dans la valeur de F sont les suivantes :

1° Les caractéristiques de forme du mobile, c'est-à-dire :

a. les angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \ldots$ qui définissent sa forme géométrique;

b. une longueur de base l, qui le définit dans la famille des solides géométriquement semblables.

2° Les caractéristiques de l'état de sa surface, qui correspondent à la définition géométrique de ses aspérités par les éléments suivants, à fournir pour chacune d'elles (d'indice k) :

c. les angles $\Theta_{k,1}, \Theta_{k,2}, \ldots, \Theta_{k,i}, \ldots$ qui définissent sa forme :

d. une longueur de base λ_k.

3° Les caractéristiques de la translation, c'est-à-dire :

e. sa grandeur V;

f. sa direction, définie par rapport au solide au moyen de deux angles i et j.

4° Les caractéristiques de l'état de l'air dans les régions non perturbées par le mobile; elles seront fournies par deux des trois caractéristiques p, ρ, $\mathfrak{T}$. Pour mettre en évidence le malentendu possible signalé au paragraphe 2, nous choisirons :

g. la densité ρ;

h. la température $\mathfrak{T}$.

Si l'on ne fait pas l'hypothèse de surfaces parfaitement polies, toutes les longueurs λ_k font un nombre très élevé (¹) de grandeurs de dimensions non nulles. Mais nous pouvons, comme il a été dit au paragraphe 7, les remplacer par les rapports $\varepsilon_k = \frac{\lambda_k}{l}$ qui passeront dans le coefficient sans dimensions $f(\ldots)$.

Suivant la remarque déjà faite, l'analyse dimensionnelle ne peut rien nous dire sur la manière dont les $\Theta_{k,i}$ et les ε_k influent sur la force aérodynamique F. Mais cela ne nous empêchera pas d'étudier les variations de celle-ci pour les valeurs fixes des Θ et des ε qui correspondent à un mobile donné.

Nous allons vérifier facilement que c'est en faisant, plus ou moins implicitement, l'erreur qui considère la température $\mathfrak{T}$ comme une grandeur sans dimensions que l'on aboutit à la loi fausse de variation proportionnelle à ρV^2.

Il ne reste alors, en effet, comme grandeurs de dimensions non nulles à relier à F que l, V et ρ, et l'on écrira alors

$$F = f(\ldots, \theta_k, \ldots, \Theta_{k,i}, \ldots, \varepsilon_k, \ldots; i, j; \mathfrak{T})\, l^x V^y \rho^z.$$

Cela enlève tout espoir de prévoir la loi de variation en fonction de la température, mais on se trouve alors dans le cas normal des trois équations (11) à trois inconnues x, y, z, obtenues en écrivant les conditions d'homogénéité

$$(LMT^{-2}) = (LM^0T^0)^x (LM^0T^{-1})^y (L^{-3}MT^0)^z,$$

car le déterminant (17) est alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Les trois équations

$$\begin{aligned} 1 &= x + y - 3z, \\ 1 &= z, \\ -2 &= -y \end{aligned}$$

donnent immédiatement

$$z = 1, \qquad y = 2, \qquad x = 1 + 3 - 2 = 2,$$

c'est-à-dire

$$F = f(\theta, \Theta, \varepsilon; i, j; \mathfrak{T})\, l^2 V^2 \rho,$$

ou, pour un mobile donné, sous une incidence donnée, en laissant en évidence la surface S de son maître-couple pour respecter l'homogénéité,

$$F = f(\mathfrak{T}) S \rho V^2. \tag{29}$$

Cette loi a, sur la loi (3), la double supériorité de respecter l'homogénéité (puisqu'elle considère $\mathfrak{T}$ comme de dimensions nulles) et de ne pas exclure, *a priori*, une influence de la température sur la résistance aérodynamique. Mais, comme la loi (2), elle est fausse, puisqu'elle exige, à densité et température constantes, la proportionnalité à V^2.

Il y a donc eu une erreur dans notre raisonnement dimensionnel, et elle réside justement dans l'assimilation de la température à une grandeur sans dimensions.

Si, conformément aux conclusions du paragraphe 2, nous donnons à $\mathfrak{T}$ les dimensions du carré d'une

(¹) A moins que l'on ne suppose toutes les aspérités identiques entre elles.

vitesse [et nous pouvons, conformément à l'équation (7) la mesurer par le carré de la célérité du son], nous écrirons, pour un mobile donné sous une incidence donnée, la relation

$$F = kl^x V^y \rho^z \mathfrak{T}^t.$$

Elle relie 5 grandeurs de dimensions non nulles, donc ne peut pas complètement déterminer la loi; mais les deux grandeurs de même famille V et $\mathfrak{T}$ permettent l'élimination de $\mathfrak{T}$. Celle-ci apparaît encore plus claire si l'on remplace $\mathfrak{T}$ par sa mesure W^2 pour écrire

$$F = kl^x V^y \rho^z W^{2t},$$

où V et W sont deux grandeurs de même dimension et même de la même espèce.

On arrive alors à

$$F = \varphi\left(\frac{V^2}{W^2}\right) l^x V^{y'} \rho^z,$$

et le calcul qui a fourni (29) aboutit à

$$F = \varphi\left(\frac{V^2}{W^2}\right) S \rho V^2, \tag{30}$$

que l'on peut écrire autrement, en tenant compte de

$$\frac{p}{\rho} = R\mathfrak{T} = \frac{1}{\gamma} W^2,$$

$$F = \varphi\left(\frac{V^2}{W^2}\right) S p \gamma \frac{V^2}{W^2},$$

ou encore

$$F = Spf\left(\frac{V^2}{W^2}\right). \tag{30'}$$

C'est la loi donnée par Darrieus et Langevin, d'accord avec Sarrau et Picard, et ce résultat justifie l'assimilation dimensionnelle de $\mathfrak{T}$ au carré d'une vitesse.

On peut d'ailleurs, à titre de contrôle supplémentaire, vérifier que l'on aboutit bien à la loi (30') par l'analyse dimensionnelle conduite sans faire intervenir explicitement $\mathfrak{T}$, de façon à écarter toute hésitation : il suffit de définir l'état de l'air par p et ρ.

On écrira alors

$$F = kl^x V^y \rho^z p^t$$

qui contient encore quatre inconnues, mais sans couple de grandeurs de même famille.

Pour guider l'élimination, nous formerons le tableau des exposants des divers symboles dimensionnels :

F	l	V	ρ	p
$[LMT^{-2}]$	$[LM^0T^0]$	$[LM^0T^{-1}]$	$[L^{-3}MT^0]$	$[L^{-1}MT^{-2}]$
1	1	1	−3	−1
1	0	0	1	1
−2	0	−1	0	−2

Nous constatons que le déterminant relatif à $[V]$, $[\rho]$ et $[p]$ est nul, c'est-à-dire que ces trois grandeurs sont associées et fournissent, par conséquent, une combinaison sans dimensions que nous pourrons écrire *a priori* sous la forme $\frac{V}{\rho^m p^n}$, avec les conditions

$$\begin{aligned} 1 &= -3m - n, \\ 0 &= m + n, \\ -1 &= -2n, \end{aligned}$$

qui donnent immédiatement $n = \frac{1}{2}$ et $m = -\frac{1}{2}$ d'où la combinaison invariante $\frac{V.\rho^{0,5}}{p^{0,5}}$. D'ailleurs, toutes les puissances d'une combinaison invariante sont aussi des combinaisons invariantes qu'il n'y a pas lieu de considérer comme distinctes les unes des autres. Il sera plus commode de faire disparaître les exposants fractionnaires en prenant $\frac{V^2\rho}{p}$ qui permet d'éliminer l'une de ces trois grandeurs. Si l'on élimine ρ, on aboutit alors à une loi de la forme

$$F = f\left(\frac{V^2\rho}{p}\right) l^x V^{y'} p^{z'}.$$

Le déterminant des exposants de $[l]$, $[V]$ et $[p]$ est égal à $1 \neq 0$ et l'on peut calculer les inconnues x, y' et z'; mais nous observerons de suite que celui obtenu en substituant $[F]$ à $[V]$ est nul, c'est-à-dire que les grandeurs F, l et p sont associées et que la loi se réduit à

$$F = f\left(\frac{V^2\rho}{p}\right) l^x p^{z'},$$

c'est la forme dégénérée (26').

On peut calculer

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 - (-2 - 1) - 2 = 2$$

et

$$z' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

Mais on pouvait aussi observer immédiatement que la seule combinaison de p et l homogène à une force est le produit pl^2 d'une pression par une surface.

On obtient finalement la loi

$$F = f\left(\frac{V^2\rho}{p}\right) Sp. \tag{31}$$

Elle se confond bien avec la loi (30'), car

$$\frac{p}{\rho} = R\mathfrak{T} = \frac{1}{\gamma} W^2.$$

9. **Conclusion.** — Comme conclusion, nous pouvons dire que, au point de vue de l'analyse dimensionnelle, la température d'un gaz parfait, repérable par l'échelle thermométrique, est *définie*

par l'équation

$$\mathcal{T} = \frac{W^2}{\gamma R} \tag{32}$$

qui se réfère à la mesure de la célérité du son, c'est-à-dire indirectement à la vitesse d'agitation des molécules, et où γ et R sont des coefficients numériques caractéristiques du gaz considéré.

On peut donner, au coefficient spécifique R, pour chaque gaz parfait, une valeur telle que, *dans un système d'unités donné*, la mesure $\frac{W^2}{\gamma R}$ de la température se trouve égale au repère thermométrique de l'échelle absolue, mais un changement d'unités fera cesser cette concordance puisque la température, grandeur physique définie par (32), variera proportionnellement à $(LT^{-1})^2$.

On observera que cette définition de la température par l'agitation moléculaire ne peut permettre de prévoir par analyse dimensionnelle les lois où la température intervient que si ses variations font exclusivement varier la vitesse d'agitation des éléments qui participent à l'agitation thermique, sans altérer la constitution du système matériel étudié. Par exemple, la dissociation des molécules d'un gaz polyatomique met en défaut la loi des gaz parfaits. Il en était déjà de même pour l'intervention progressive des vibrations intramoléculaires conformément à la théorie des quanta.

Cela limite beaucoup les possibilités ouvertes à l'analyse dimensionnelle, car les variations de température paraissent très souvent modifier la constitution des systèmes matériels.

Nous terminerons par une remarque essentielle relative à la signification qu'il faut attribuer au fait que deux grandeurs sont de même dimension. Cela ne prétend pas introduire une assimilation au point de vue de leur *nature intime*, mais seulement une relation entre leurs *mesures*, qui, lorsque l'on prend une unité de masse M fois plus petite, une unité de longueur L fois plus petite et une unité de temps T fois plus petite, se trouvent multipliées dans le même rapport égal à $(L^\lambda M^\mu T^\tau)$.

Le groupement par familles dépend donc essentiellement des équations adoptées pour définir les unités dérivées, c'est-à-dire qu'on aura des groupements différents dans deux systèmes d'unités différents. Mais, si l'on suppose ces deux systèmes cohérents, cela n'empêche nullement l'analyse dimensionnelle, dont les raisonnements prennent en considération ces groupements divers, d'en tirer des conclusions concordantes en ce qui concerne l'élimination de lois impossibles *a priori*. Il n'y a là rien qui puisse mettre en défaut les conclusions détaillées ci-dessus où sont précisées les possibilités de prévision de l'analyse dimensionnelle : elles sont fort éloignées d'être négligeables.

Manuscrit reçu le 2 janvier 1944.