GROUPEMENT ET DÉGROUPEMENT AU SEIN D'UN FAISCEAU CATHODIQUE INJECTÉ DANS UN ESPACE EXEMPT DE CHAMPS EXTÉRIEURS. APRÈS AVOIR ÉTÉ MODULÉ DANS SA VITESSE. I.

Par R. WARNECKE, J. BERNIER et P. GUÉNARD.

Sommaire. — Lorsque l'on provoque par un moyen quelconque, dans un faisceau électronique, une perturbation périodique du temps de transit, il se produit un groupement spatial des électrons; la densité de ce groupement dépend, en particulier, de la forme de l'action perturbatrice. Dès que ce groupement apparaît, il se manifeste, dans le faisceau, des forces de répulsion d'origine électrostatique qui tendent à modifier le rassemblement en voie de formation.

Dans la première partie de cette étude, les auteurs considèrent des tubes électroniques dans lesquels un faisceau rectiligne, après avoir été modulé dans sa vitesse, est injecté dans un espace où toute force électrique d'origine extérieure est éliminée grâce à une électrode étui formant écran, et ils déterminent, sous l'hypothèse du rassemblement cinématique, la forme de la modulation de vitesse à adopter pour obtenir un groupement conduisant à une cession aussi complète que possible de l'énergie cinétique des électrons à un champ haute fréquence sinusoïdalement variable agissant sur les électrons parallèlement à leur mouvement à la sortie de l'électrode étui.

Dans la seconde partie du travail, les auteurs étudient, pour le même type de tube, la forme que revêt théoriquement le groupement quand on tient compte des répulsions interélectroniques. Pour simplifier les développements mathématiques, l'analyse est restreinte au cas d'un faisceau cylindrique parfaitement focalisé de l'extérieur, ayant un diamètre faible devant celui de l'électrode étui et subissant une modulation de vitesse sinusoïdale de faible profondeur.

Introduction.

0. A. — **Aperçu des problèmes.** — Comme il ressort de plusieurs exposés [1] [2] de l'un des auteurs, les principes fondamentaux des principaux tubes à modulation de vitesse récemment développés

Fig. 1.

pour la production, l'amplification et la détection des oscillations électromagnétiques d'ultra-haute fréquence peuvent être établis à partir du schéma de la figure 1 correspondant aux tubes dits à « conversion par glissement ». Un faisceau rectiligne d'électrons est injecté suivant l'axe d'un cylindre, les électrons étant accélérés avant leur entrée dans ce cylindre et collectés après l'avoir quitté. Le canon électronique et le collecteur d'électrons n'interviennent pas dans les effets de haute fréquence produits, et il est inutile ici d'en envisager la forme constructive.

Le fonctionnement de ces tubes repose sur les actions suivantes :

Aux bornes d'une section MM' d'un tuyau conducteur (organe modulateur ou « rassembleur »), on maintient une différence de potentiel périodique qui, alternativement, accélère et ralentit par rapport à leur vitesse moyenne, les électrons qui traversent cette section. Cette action fait apparaître une pulsation de densité dans le faisceau, c'est-à-dire une modulation du courant de conduction qu'il transporte. Ensuite, par induction, la composante alternative de ce courant, au niveau de la section CC', cède de l'énergie à une impédance Z connectée aux bornes de cette section (organe collecteur d'énergie).

Dans la théorie la plus simple de ce système, on établit les lois du groupement des électrons dans l'espace séparant MM' et CC' en négligeant les effets des électrons les uns sur les autres, et, pour simplifier encore, on suppose qu'il n'existe dans cet espace aucun champ électrique alternatif ou constant d'origine externe, si bien que le groupement se fait par « glissement ». Une telle théorie, appelée « théorie du rassemblement cinématique », esquissée par Heil [3], développée particulièrement par Webster [4] et les auteurs [5] [6], est complétée dans la première partie de cet exposé.

Cette théorie qui tire son intérêt de la simplicité de ses bases et de sa claire représentation physique, est évidemment insuffisante pour rendre compte des faits expérimentaux puisqu'elle néglige tous les effets

de la charge d'espace et, notamment, ceux qui résultent de la naissance des « paquets d'électrons » dans le faisceau; pour conduire à une image plus correcte du phénomène, elle doit donc être au moins complétée ou corrigée : c'est ce qui est fait dans la seconde partie de cet exposé. Après avoir calculé par approximations successives les forces qui s'exercent sur les électrons et les modifications consécutives de leur mouvement, on détermine, pour un certain nombre de cas pratiquement importants, l'amplitude et la phase des premiers harmoniques de l'onde du courant de conduction transporté par le faisceau.

Dans l'une et l'autre des deux parties de l'exposé on supposera implicitement :

a. Que les champs électriques agissant sur les électrons à l'extérieur de l'espace de groupement sont développés entre des électrodes infiniment voisines l'une de l'autre. De cette façon, on néglige, *a priori*, dans les espaces correspondants, les angles de transit des électrons, dont les auteurs ont par ailleurs [5] [6] déterminé, sous les hypothèses du rassemblement cinématique, l'influence particulièrement importante dans le collecteur.

b. Que les tensions alternatives créant les champs qui agissent sur le faisceau sont appliquées entre des électrodes idéales dont les surfaces, perpendiculaires à l'axe du faisceau, sont équipotentielles. L'introduction de cette restriction est importante : non seulement elle fixe la direction des forces électriques qui s'exercent sur les électrons, mais elle élimine encore la nécessité d'introduire, dans les calculs, des coefficients d'efficacité des électrodes tenant compte de ce que leur action sur un électron dépend de sa distance à l'axe du tube.

0. B. — **Expression générale de l'intensité du courant de conduction transporté par un faisceau dans lequel le temps de transit est modulé.** — Considérons un faisceau rectiligne et « homogène » d'électrons se déplaçant dans le vide. Soient t_0 l'époque de passage à l'origine MM' et t l'époque en un point P. La quantité d'électricité $i_0 dt_0$ qui est passée en MM' entre les époques t_0 et $t_0 + dt_0$ passe en P entre les époques t et $t + dt$; d'après le principe de conservation de l'électricité, on a :

$$i_0 dt_0 = i dt$$

soit

$$\frac{i}{i_0} = \frac{1}{\frac{dt}{dt_0}} = \frac{1}{\frac{dT}{dt_0} + 1} \quad (1)$$

où $T = t - t_0$ est le temps de transit des électrons. Si celui-ci subit une perturbation périodique, c'est-à-dire si T est fonction périodique de t_0 (de pulsation fondamentale ω), $\frac{i}{i_0}$ sera aussi fonction périodique

de t_0 (donc de t) et pourra être considéré comme une somme d'ondes sinusoïdales

$$\frac{i}{i_0} = 1 + \frac{i_1}{i_0} + \dots + \frac{i_n}{i_0} + \dots$$

avec

$$\frac{i_n}{i_0} = \mathcal{R}(k_n e^{jn\omega t}), \quad \frac{k_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i}{i_0} e^{-jn\omega t} d(\omega t), \quad (2)$$

En tenant compte de (1) et en faisant le changement de variables d'intégration $t = t_0 + T(t_0)$, avec $\omega t_0 = \varphi$, $\omega T = \tau$, on a

$$\frac{k_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jn(\varphi + \tau(\varphi))} d\varphi. \quad (3)$$

Les k_n s'obtenant par intégration de (3), le calcul de i revient à celui de $\tau = \tau(\varphi)$ en tenant compte des facteurs déterminants qui, dans le cas général, ont une origine à la fois extérieure et intérieure au faisceau.

Ce résultat, tout à fait général, qui met en relief l'effet du temps de transit, d'une part est indépendant de la forme des trajectoires et de la forme du courant i_0 et, d'autre part, *ne suppose rien ni sur la cause de la variation du temps de transit, ni sur la forme de celle-ci* (pourvu cependant qu'elle soit une fonction périodique de t).

PREMIÈRE PARTIE.

Rassemblement cinématique des électrons dans un faisceau après modulation dans sa vitesse. Groupement optimum.

1. A. — **Cas d'un faisceau rectiligne injecté dans un espace exempt de champ de forces extérieures, après avoir subi une modulation sinusoïdale de sa vitesse. Rendement de conversion maximum correspondant.** — Quand on ne tient pas compte de la charge d'espace, le calcul du temps de transit est immédiat : en effet, soit $v_1 = v_0(1 + \delta \sin \varphi)$ la vitesse des électrons à la sortie de MM' (fig. 2); le temps que met un électron passant en MM' à l'époque t_0 pour aller en P est $T_1(\tau) = \frac{\tau}{v_1}$ d'où, en introduisant les nota-

tions $\tau_1 = \omega T_1$, $\lambda = \frac{\omega \tau}{v_0}$

$$\tau_1 = \frac{\lambda}{1 + \delta \sin \varphi}.$$

Généralement, pour simplifier le calcul (et aussi parce que ce cas est pratiquement avantageux), on admet que $\delta^2 \lambda$ est négligeable devant $\delta \lambda$, alors

$$\tau_1 \simeq \lambda - \delta \lambda \sin \varphi, \quad (4)$$

ce qui donne, d'après (2) et (3),

$$\frac{h_n}{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\varphi - \gamma t \sin \varphi)} d\varphi = e^{i(n\gamma)} J_n(n\gamma \lambda). \quad (5)$$

$$\frac{i}{i_0} = 1 + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\gamma \lambda) \cos n(\omega t - \lambda). \quad (6)$$

[Dans cet article, $J_n(x)$ représente la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre n , et d'argument x .]

Fig. 2.

On appelle *rendement de conversion* le rapport de l'énergie cédée au champ ultra-haute fréquence du collecteur à l'énergie continue nécessaire pour accélérer le faisceau.

Lorsque le champ du collecteur est sinusoïdal et que le faisceau est modulé en densité par le mécanisme ci-dessus, il résulte de la relation (6), ainsi qu'il est bien connu [4] [1], que la valeur maximum du rendement de conversion ne peut être égale qu'au maximum de $J_1(\gamma \lambda)$, soit 0,582 (obtenue pour $\gamma \lambda = 1,84$).

1. B. — Groupement amélioré grâce à une modulation de vitesse non sinusoïdale. — Pour dépasser la valeur précédente du rendement de conversion, il est nécessaire d'abandonner la forme sinusoïdale de la modulation de vitesse ⁽¹⁾. La forme convenable peut être trouvée directement à partir de l'expression générale du rendement de conversion.

Si dans la section CC', d'abscisse l à partir du

modulateur (fig. 2), le faisceau électronique, dans lequel la modulation de vitesse a provoqué une modulation de densité, traverse un champ électrique étroit dont l'intégrale linéaire dans le sens du mouvement a pour valeur instantanée $-U_2 \cos \omega t$, le rendement de conversion pour le réglage optimum de phase a pour expression ⁽²⁾

$$\gamma = \frac{U_2}{U_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\varphi + \tau_l(\varphi)] d\varphi. \quad (7)$$

où U_0 désigne la tension continue correspondant à la vitesse moyenne v_0 des électrons, et τ_l leur angle de parcours entre le modulateur et le collecteur.

En général, la valeur maximum qu'il est possible de donner à U_2 est U_0 , car, pour une valeur plus élevée il y a réflexion d'électrons dans le champ

⁽²⁾ L'expression (7) peut être établie indépendamment de la forme du courant transporté par le faisceau de la façon suivante (voir [1]) : Soit i_2 l'intensité instantanée du courant transporté par le faisceau au niveau du plan médian du collecteur. Si les électrodes du collecteur sont très voisines l'une de l'autre, le courant induit qui traverse l'impédance shunt de ce dernier est sensiblement égal à i_2 . D'autre part, la tension instantanée que ce courant développe entre les électrodes est $u_2 = U_2 \cos(\omega t + \beta)$ et, d'après (1), on a $i_2 = i_0 \frac{dt_0}{dt}$.

Il s'ensuit que la puissance cédée par le faisceau au champ électrique est

$$W = \overline{i_2 u_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_0 U_2 \frac{dt_0}{dt} \cos(\omega t + \beta) d(\omega t).$$

On obtient l'expression (7) en divisant W par $i_0 U_0$, en rendant nul l'angle de phase β et en remplaçant ωt_0 par φ et ωt par $\varphi + \tau_l(\varphi)$.

Au sujet de l'expression précédente de la puissance utile, il convient de noter :

a. Que le fait d'admettre une forme sinusoïdale pour u_2 est légitime si l'on suppose que cette tension est développée aux bornes d'un système ayant les propriétés d'un circuit anti-résonnant.

b. Que la composante du courant induit due au déplacement des électrons est la seule qui présente un intérêt réel puisque la composante capacitive du courant total est éliminée dans le circuit extérieur et ne produit aucune puissance moyenne (voir [2], chapitre II).

c. Que pour une durée non négligeable du transit des électrons dans le collecteur, une expression de la puissance utile pourrait être trouvée et utilisée comme celle qui est donnée plus haut. La valeur instantanée du courant induit à introduire pour son calcul (valeur du courant induit résultant des courants induits élémentaires dus à tous les électrons présents à l'instant considéré t entre les électrodes) s'obtiendrait à partir de l'expression

$$i_t = \frac{1}{h} \int_{t-T_t}^t \rho_1(t_1) v_1(t_1) \frac{dx}{dt} dt,$$

dans laquelle ρ_1 , v_1 , t_1 désignent respectivement la densité, la vitesse et l'époque de passage des électrons au niveau de la première électrode du collecteur et T la durée du transit (fonction du temps) entre les électrodes de celui-ci, distantes de h ; mais le calcul de la puissance sur ces bases conduirait alors à des résultats d'une forme si compliquée que leur discussion présenterait difficilement un intérêt pour le problème considéré ici et c'est pourquoi le cas du temps de transit négligeable dans le collecteur est seul considéré.

⁽¹⁾ Ce problème de l'amélioration du groupement dans un faisceau commandé par modulation de vitesse, qui vient de faire l'objet d'une communication importante de BORGES et LEDINEGG [9], a été traité antérieurement à ce travail par les auteurs du présent exposé; on trouvera, en effet, le résumé de la première partie de notre article dans le préambule théorique d'un brevet français déposé le 19 septembre 1942 sous le n° 471.736.

du collecteur et perte correspondante d'énergie. D'autre part la valeur de l'intégrale est maximum lorsqu'on a, quel que soit φ :

$$\cos[\varphi + \pi/(2k-1)] = 1, \quad \text{soit} \quad \varphi + \pi/(2k-1) = 2k\pi.$$

Ainsi, théoriquement, dans l'hypothèse du rassemblement cinématique, le rendement de conversion d'un tube à temps de transit peut être amené à une valeur voisine de 100 pour 100 (quel que soit le mode de groupement) en faisant en sorte que $\pi/(2k-1)$ soit une fonction périodique de φ coïncidant avec $2k\pi - \varphi$ dans une période. Ce résultat est général, il est indépendant de la forme de la trajectoire des électrons et du mode de groupement.

Dans le cas particulier du groupement par glissement, on a $\pi/(2k-1) = \frac{\omega l}{v_1}$ et la condition de rendement de conversion maximum est évidemment, en posant $\lambda_l = \frac{\omega l}{v_0}$

$$\varphi + \lambda_l \frac{v_0}{v_1} \equiv 2k\pi. \quad (8)$$

1. C. — Forme de « tension » de commande rendant maximum le rendement de conversion dans le cas du groupement par glissement.

Si l'on continue à supposer que la modulation de vitesse dans le faisceau est provoquée par une différence de potentiel alternative appliquée entre deux grilles idéales très voisines l'une de l'autre (couche électrique double infiniment mince) portées au potentiel U_0 constant, la vitesse v_1 de l'électron à la sortie du système de commande correspond à un potentiel $U_0 + U(\varphi)$ et l'on a $\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = 1 + \frac{U(\varphi)}{U_0}$.

La condition de rendement maximum s'écrit alors, dans le cas du groupement par glissement :

$$\frac{U(\varphi)}{U_0} = \left(\frac{\lambda_l}{2k\pi - \varphi}\right)^2 - 1.$$

Soit

$$a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + \dots + a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi + \dots$$

le développement en série de Fourier de $\left(\frac{\lambda_l}{2k\pi - \varphi}\right)^2$,

le calcul donne $a_0 = \frac{\lambda_l^2}{4\pi^2 k(k-1)}$. D'autre part la valeur moyenne de $U(\varphi)$ étant nulle, a_0 doit être égal à l'unité; ceci impose à λ_l une valeur particulière λ_{l_0}

$$\lambda_{l_0} = 2\pi \sqrt{k(k-1)}. \quad (9)$$

Les coefficients a_n et b_n (cf. Annexe I) sont donnés par

$$a_n = \frac{2\lambda_l^2}{4\pi^2 k(k-1)} + \frac{n\lambda_l^2}{\pi} [si(2(k-1)n\pi) - si(2kn\pi)],$$

$$b_n = \frac{n\lambda_l^2}{\pi} [Ci(2(k-1)n\pi) - Ci(2kn\pi)].$$

où si et Ci sont les fonctions sinus-intégral et cosinus-intégral. Ces coefficients tendent vers zéro lorsque n augmente indéfiniment et, en tenant compte de (9), on peut les représenter par les formules asymptotiques

$$a_n \sim \frac{2 \times 10^{-1}}{n^2 \lambda_{l_0}^2} - \frac{2 \times 10^{-1}}{n^3 \lambda_{l_0}^3},$$

$$b_n \sim \frac{-2 \times 10^{-1}}{n \lambda_{l_0}} + \frac{2 \times 10^{-1}}{n^3 \lambda_{l_0}^3}.$$

Application numérique. — Pour un tube fonctionnant avec $U_0 = 3000$ V sur une longueur d'onde de $\lambda = 25$ cm, la longueur de l'espace de glissement $\left[l = \lambda \frac{v_0}{c} \sqrt{k(k-1)}\right]$ serait de $l = 6,6$ cm pour $k = 3$ ($\lambda_{l_0} = 15,4$ radians), de $l = 9,35$ cm pour $k = 4$ ($\lambda_{l_0} = 21,8$ radians), de $l = 12,05$ cm pour $k = 5$ ($\lambda_{l_0} = 26,2$ radians); dans ce dernier cas les coefficients du développement seraient

$$b_1 \approx -0,140, \quad a_1 \approx 0,015$$

$$b_2 \approx -0,071, \quad a_2 \approx 0,004$$

$$b_n \approx -0,142/n, \quad a_n \approx 0.$$

Pour obtenir le rendement maximum de conversion $\eta = \frac{U_2}{U_0}$, l'intégrale du champ dans le collecteur étant toujours de la forme $U_2 \cos \omega t$, il faudrait donc que la tension de commande dans le modulateur soit représentée par

$$\frac{U(\varphi)}{U_0} = (-0,140 \sin \varphi + 0,015 \cos \varphi)$$

$$+ (-0,071 \sin 2\varphi + 0,004 \cos 2\varphi)$$

$$- 0,047 \sin 3\varphi + \dots - \frac{0,142}{n} \sin n\varphi + \dots$$

1. D. — Forme de la vitesse à la sortie du rassembleur rendant le rendement de conversion maximum dans le cas du groupement par glissement.

— La vitesse v_1 doit satisfaire à l'égalité (8) et doit avoir comme valeur moyenne v_0 (fig. 3).

Posons

$$\frac{v_1}{v_0} = 1 + a'_1 \cos \varphi + b'_1 \sin \varphi$$

$$+ \dots$$

$$+ a'_n \cos n\varphi + b'_n \sin n\varphi + \dots$$

La condition que la valeur moyenne de $\frac{v_1}{v_0}$ soit égale à 1 entraîne pour λ_l la valeur λ_{l_0} déterminée par

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_{l_0}'}{2k\pi - \varphi} d\varphi.$$

c'est-à-dire

$$1 = \lambda_{l_0}' \frac{1}{2\pi} [\log 2k\pi - \log 2(k-1)\pi].$$

d'où

$$\lambda'_{l_0} = \frac{2\pi}{\log \frac{k}{k-1}} \quad (k \text{ entier}).$$

Les coefficients a'_n et b'_n sont donnés par

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lambda'_{l_0} \frac{\cos n\varphi}{2k\pi - \varphi} d\varphi = \frac{\lambda'_{l_0}}{\pi} \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\cos n\psi}{\psi} d\psi,$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \lambda'_{l_0} \frac{\sin n\varphi}{2k\pi - \varphi} d\varphi = \frac{\lambda'_{l_0}}{\pi} \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin n\psi}{\psi} d\psi.$$

d'où

$$\frac{\pi a'_n}{\lambda'_{l_0}} = Ci(2kn\pi) - Ci(2(k-1)n\pi),$$

$$\frac{\pi b'_n}{\lambda'_{l_0}} = si(2kn\pi) - si(2(k-1)n\pi).$$

Fig. 3. — Forme de $\frac{v_1}{v_0}$ rendant le rendement de conversion maximum pour le groupement par glissement.

De la même façon que précédemment on peut obtenir des valeurs approchées de a'_n et b'_n à partir des développements asymptotiques de si et Ci , soient

$$\frac{\pi a'_n}{\lambda'_{l_0}} = \frac{1}{4n^2\pi^2} \frac{2k-1}{[k(k-1)]^2},$$

$$\frac{\pi b'_n}{\lambda'_{l_0}} = \frac{1}{2n\pi} \frac{1}{k(k-1)} + \frac{2}{(2n\pi)^3} \left[\frac{1}{(k-1)^3} - \frac{1}{k^3} \right].$$

Application numérique. — Reprenant l'exemple précédent pour $k=5$, on trouve comme valeurs des coefficients (3)

$$a'_n = \frac{0,005}{n^2}, \quad b'_n = -\frac{0,071}{n} + \frac{0,0005}{n^3}.$$

(3) Les a'_n et b'_n ont des valeurs moitié de celles trouvées dans le développement de $\frac{U(\varphi)}{U_0}$ parce que k a été choisi pour que le rapport des amplitudes des tensions soit petit: par ailleurs, les conditions de rendement maximum sont évidemment les mêmes, $\lambda_{l_0} = \lambda'_{l_0}$ car

$$\frac{2\pi}{\log \frac{k}{k-1}} \approx 2\pi \sqrt{k(k-1)}.$$

1. E. — Forme de l'angle de transit $\tau_l(\varphi)$ rendant maximum le rendement de conversion dans le cas d'un mode de groupement quelconque. — On a déjà montré que la condition de rendement maximum, quel que soit le mode de groupement, est que la fonction périodique $\tau_l(\varphi)$ de période 2π , coïncide avec $2k\pi - \varphi$ entre 0 et 2π .

On en déduit le développement en série de Fourier de la fonction $\tau_l(\varphi)$ optimum

$$\tau_l(\varphi) = a''_0 + a''_1 \cos \varphi + b''_1 \sin \varphi + \dots + a''_n \cos n\varphi + b''_n \sin n\varphi + \dots$$

avec

$$a''_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2k\pi - \varphi) d\varphi = (2k-1)\pi,$$

$$a''_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2k\pi - \varphi) \cos n\varphi d\varphi = 0,$$

$$b''_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2k\pi - \varphi) \sin n\varphi d\varphi = \frac{2}{n},$$

d'où

$$\tau_l(\varphi) = (2k-1)\pi + 2 \left[\sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \dots + \frac{\sin n\varphi}{n} + \dots \right]. \quad (10)$$

1. F. — Rendement de conversion correspondant à quelques formes particulières de groupement. — Il est évident qu'au temps de transit optimum exprimé en angle par la relation (10), correspond, lorsque $U_2 = U_0$, un rendement maximum de conversion égal à l'unité

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \left[\varphi + 2 \sin \varphi + \sin 2\varphi + \frac{2}{3} \sin 3\varphi + \dots + \frac{2}{n} \sin n\varphi + \dots \right] d\varphi = 1. \quad (10bis)$$

Examinons ce qu'il advient quand le temps de transit n'a pas cette forme idéale, mais une forme qui correspond seulement à l'utilisation des premiers termes du développement.

a. Si le temps de transit varie sinusoidalement [comme c'est le cas d'après (4) dans les tubes à modulation de vitesse à groupement par glissement, où la tension haute fréquence de commande est faible et sinusoidale] le réglage défini par

$$\tau_l(\varphi) = (2k-1)\pi + 2 \sin \varphi$$

donne, pour $U_2 = U_0$, le rendement de conversion

$$\eta_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + 2 \sin \varphi) d\varphi = J_1(2) = 0,577.$$

Cette valeur est à peine inférieure à celle du maximum de η (0,582) trouvée au paragraphe 1. A.

et correspondant à un réglage optimum tel que (4)

$$\tau_I(\varphi) = (2k-1)\pi + 1,84 \sin \varphi. \quad (11)$$

b. Si le temps de transit varie comme $a \sin \varphi + b \sin 2\varphi$ le réglage défini par les premiers termes du développement (10), soit

$$\tau_I(\varphi) = (2k-1)\pi + \varphi \sin \varphi + \sin 2\varphi \quad (12)$$

correspond pour $U_2 = U_0$ au rendement de conversion.

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \varphi \sin \varphi + \sin 2\varphi) d\varphi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi + 2 \sin \varphi) \cos(\sin 2\varphi) \\ &\quad - \sin(\varphi + 2 \sin \varphi) \sin(\sin 2\varphi)] d\varphi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + 2 \sin \varphi) \left[J_0(1) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} J_{2q}(1) \cos q \varphi \right] d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + 2 \sin \varphi) \left[2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p-1}(1) \sin \varphi (2p-1) \varphi \right] d\varphi. \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\tau_{12} = \left\{ J_0(1)J_1(2) - \sum_{q=1}^{\infty} J_{2q}(1)[J_{1q-1}(2) - J_{1q+1}(2)] \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \varphi (2p-1) J_{2p-1}(1) J_{1p-2}(2) \right\}$$

et, en négligeant les termes inférieurs à 10^{-4} ,

$$\tau_{12} = J_0(1)J_1(2) - J_2(1)J_3(2) + \varphi J_1(1)J_2(2) = 0,737.$$

On peut constater que le maximum de l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + a \sin \varphi + b \sin 2\varphi) d\varphi$$

ne diffère pas sensiblement de 0,737. Ainsi, à partir de deux termes, le réglage optimum est pratiquement défini par les premiers termes du développement de (10).

c. Si le temps de transit varie comme

$$a \sin \varphi + b \sin 2\varphi + c \sin 3\varphi,$$

le réglage optimum est tel que

$$\tau_I(\varphi) \approx (2k-1)\pi + \varphi \left(\sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} \right) \quad (13)$$

(4) Lorsque le temps de transit dans l'espace de glissement ne correspond qu'à un nombre limité des termes du développement (10), il convient, pour obtenir la valeur maximum possible du rendement de conversion (puisque des termes manquent alors), de donner aux amplitudes des termes restants des valeurs différentes de celles qui seraient adoptées si le développement complet était utilisé.

et cela correspond pour $U_2 = U_0$ à un rendement de conversion maximum

$$\tau_{11} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\left(\varphi + \varphi \sin \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi\right) d\varphi,$$

dont la valeur approximative est

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= J_0\left(\frac{2}{3}\right) \tau_{12} + J_1\left(\frac{2}{3}\right) \\ &\quad \times \left\{ J_0(1)[J_2(2) - J_1(2)] \right. \\ &\quad \left. + J_1(1)[J_3(2) - J_0(2) - J_4(2)] \right. \\ &\quad \left. + J_2(1)[J_2(2) - J_0(2)] + J_3(1)[J_2(2) - J_1(2)] \right\} \\ &\quad + J_2\left(\frac{2}{3}\right) J_2(1)[J_3(2) - J_1(2)] \approx 0,751. \end{aligned}$$

Les résultats indiqués sous a, b, c montrent que le fait de produire, dans un tube électronique du type considéré, une variation du temps de transit de la forme (12) au lieu d'une variation sinusoïdale de la forme (11) apporterait, pour les conditions de réglage optimum, un accroissement du rendement de conversion de l'ordre de 16 pour 100 tandis que la forme (13) n'apporterait qu'un gain supplémentaire de 1,4 pour 100. On peut montrer facilement que le gain apporté par l'emploi des harmoniques d'ordre de plus en plus élevé est de plus en plus faible, quoique le rendement maximum augmente en tendant vers 100 pour 100 quand on approche de la forme idéale (10). La signification physique de l'expression (10)^{1/2} est que tous les électrons sortis du système de commande au cours d'une période passent à la même époque à travers le collecteur, cette époque étant celle où le champ électrique du collecteur est retardateur et maximum en valeur absolue.

Les auteurs reportent à un article futur la discussion des possibilités techniques de mise en application du principe précédent dont il est superflu de souligner l'important intérêt pratique pour l'augmentation de la puissance des générateurs d'ondes ultra-courtes.

(A suivre.)

ANNEXE I.

Soit

$$\left(\frac{\lambda_I}{2k\pi - \varphi} \right)^2 = a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + \dots \\ + a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi + \dots$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_I}{(2k\pi - \varphi)^2} \cos n\varphi d\varphi \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{2k\pi}^{2(k-1)\pi} \frac{\lambda_I^2}{\psi^2} \cos n\psi d\psi \\ &= \frac{\lambda_I^2}{\pi} \left\{ \left[-\frac{\cos n\psi}{\psi} \right]_{2k\pi}^{2(k-1)\pi} - n \int_{2k\pi}^{2(k-1)\pi} \frac{\sin n\psi}{\psi} d\psi \right\} \\ &= \frac{\lambda_I^2}{\pi} \left[\frac{1}{2(k-1)\pi} - \frac{1}{2k\pi} - n \int_{2k\pi}^{2(k-1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right], \end{aligned}$$

de même

$$b_n = -n \frac{\lambda_f^2}{\pi} \int_{2(k-1)n\pi}^{2kn\pi} \frac{\cos x}{x} dx.$$

En introduisant les fonctions

$$si_y = - \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx, \quad Ci_y = - \int_0^y \frac{\cos x}{x} dx,$$

a_n et b_n se mettent sous la forme

$$a_n = \frac{2\lambda_f^2}{4\pi^2 k(k-1)} + \frac{n\lambda_f^2}{\pi} [si(2(k-1)n\pi) - si(2kn\pi)]$$

$$b_n = \frac{n\lambda_f^2}{\pi} [Ci(2(k-1)n\pi) - Ci(2kn\pi)].$$

Ces coefficients tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment comme on le voit en remplaçant Ciy et siy par leurs valeurs asymptotiques $Ciy \sim \frac{\sin y}{y}$, $siy \sim -\frac{\cos y}{y}$. En utilisant les relations (cf. Jahnke Emde, *Funktionen Tafeln*, p. 3)

$$-si_y + jCi_y = \frac{e^{jy}}{y} H(jy)$$

avec

$$H(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} + \dots$$

On obtient pour siy et Ciy les valeurs asymptotiques plus approchées

$$-si_y = \frac{\cos y P(y) - \sin y Q(y)}{y},$$

$$Ci_y = \frac{\sin y P(y) + \cos y Q(y)}{y}$$

avec

$$\begin{cases} P(y) = 1 - \frac{2!}{y^2} + \frac{4!}{y^4} - \dots \\ Q(y) = -\left[1 - \frac{3!}{y^3} + \dots\right]. \end{cases}$$

d'où, en posant

$$f(y) = \frac{1 - P(y)}{y}, \quad g(y) = \frac{Q(y)}{y},$$

$$a_n = \frac{n\lambda_f^2}{\pi} [f(2(k-1)n\pi) - f(2kn\pi)] \sim -2n^2\lambda_f^2 f'(x),$$

$$b_n = \frac{n\lambda_f^2}{\pi} [g(2(k-1)n\pi) - g(2kn\pi)] \sim -2n^2\lambda_f^2 g'(x),$$

x étant compris entre $2(k-1)n\pi$ et $2kn\pi$. On peut prendre en particulier $x = \sqrt{4k(k-1)n^2\pi^2} = n\lambda_{l_0}$. En donnant à x cette valeur et en remplaçant dans les formules précédentes λ_f par λ_{l_0} , on obtient finalement

$$a_n \sim -\frac{2 \times 3!}{n^2 \lambda_{l_0}^2} + \frac{2 \times 5!}{n^4 \lambda_{l_0}^4},$$

$$b_n \sim -\frac{2 \times 2!}{n \lambda_{l_0}} + \frac{2 \times 4!}{n^3 \lambda_{l_0}^3}.$$