



HAL
open science

Forme et propagation des ondes sonores dans un espace limité par des surfaces absorbantes

Jacques Brillouin

► **To cite this version:**

Jacques Brillouin. Forme et propagation des ondes sonores dans un espace limité par des surfaces absorbantes. *Journal de Physique et le Radium*, 1939, 10 (12), pp.497-503. 10.1051/jphys-rad:019390010012049700 . jpa-00233710

HAL Id: jpa-00233710

<https://hal.science/jpa-00233710>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FORME ET PROPAGATION DES ONDES SONORES DANS UN ESPACE LIMITÉ PAR DES SURFACES ABSORBANTES

Par JACQUES BRILLOUIN.

Sommaire. — L'auteur examine au moyen de l'équation générale du potentiel des vitesses divers problèmes de propagation et de vibrations forcées dans des espaces limités par des surfaces absorbantes. L'absorption est définie par l'impédance de la surface limite.

Cet examen montre l'existence, dans les espaces limités par des plans, d'ondes planes non uniformes de structure spéciale : vibration elliptique dans un plan contenant la direction de propagation, amplitudes suivant une loi exponentielle dans la direction du plan d'onde contenant les trajectoires elliptiques, uniformité dans la direction du plan d'onde normale au plan des trajectoires, vitesse de phase et vitesse de propagation de l'énergie égales entre elles et inférieures à la vitesse du son.

Ces ondes jouent, dans les espaces considérés, le rôle tenu par les ondes planes uniformes dans les espaces limités par des plans rigides.

Le calcul donne enfin pour les espaces non clos les différentes formes d'onde progressives, avec leur vitesse de phase et leur affaiblissement, pour les espaces clos, les vibrations forcées.

1. Position des problèmes traités. Définition de la surface absorbante. — Nous nous sommes limités au cas où les surfaces absorbantes peuvent être représentées par des conditions de la forme

$$p = \frac{v_n}{Z},$$

où p est la pression acoustique, v_n la composante normale à la paroi, prise vers l'extérieur, de la vitesse vibratoire et Z une impédance complexe.

Cette condition signifie que la paroi réagit comme si elle était formée de petits pistons jointifs indépendants les uns des autres. Cette supposition est raisonnable dans le cas de la plupart des matériaux absorbant usuels, qui agissent par leur porosité. Elle ne peut, en revanche, servir à représenter une paroi dont la surface soit susceptible de restituer à distance l'énergie sonore qu'elle reçoit du milieu fluide.

Espaces considérés. — Nous examinons le cas d'un demi-espace limité par un plan, de l'espace compris entre deux plans parallèles, des tuyaux de section rectangulaire et circulaire, de la salle parallépipédique. Dans ce dernier cas ce n'est plus un problème de propagation, mais de vibrations forcées.

2. Méthodes de calcul. — Ces méthodes dérivent de celles qui sont utilisées dans le cas d'espaces limités par des parois rigides.

L'une, largement développée par lord Rayleigh (Theory of Sound) et employée par mon père ⁽¹⁾

(1) Marcel BRILLOUIN, Propagation anormale des sons aigus dans les tuyaux larges, *Congrès international de Physique*, 1900, **1**, p. 246; Sur la propagation du son dans les gros tuyaux cylindriques, à propos des expériences de Violle et Vauthier, *Annales de Chimie et Physique*, 8^e série, 1906, **8**, p. 443.

en 1900 pour l'étude de la propagation et de la dispersion du son dans les tuyaux larges, consiste à partir de l'équation générale du potentiel des vitesses et à chercher les solutions sous forme d'ondes planes non uniformes cheminant parallèlement aux surfaces limites.

L'autre, plus géométrique et plus intuitive, s'applique aux espaces limités par des plans rectangulaires. On part d'ondes planes uniformes d'incidence oblique que l'on groupe deux à deux (onde incidente et onde réfléchie) de manière à annuler sur les plans limite la composante normale de la vitesse vibratoire. On trouvera un exemple de cette méthode, appliquée à des problèmes électriques, dans divers articles de mon frère, Léon Brillouin ⁽²⁾.

Nous avons conduit nos calculs par la première méthode. Elle permet d'ailleurs aisément de trouver les décompositions en ondes obliques, et montre que, sauf dans le cas où il n'y a qu'un plan limite, ces ondes ne sont pas uniformes, mais sont du type spécial que nous avons décrit sous le nom d'ondes S dans un précédent article ⁽³⁾.

Ces ondes jouent un rôle important dans tous les problèmes concernant les espaces limités par des plans absorbants. D'autre part elles ont pour forme

(2) Léon BRILLOUIN, *Revue gén. de l'Électricité*, 1936, **40**, p. 227; *Electrical Communication*, 1938, **16**, p. 350; *Bulletin Soc. fr. des Électriciens*, 1938, **9**, p. 899.

Signalons enfin, dans la *Revue d'Acoustique*, 1939, vol VIII, fasc. 1-3 : Léon BRILLOUIN, *Le tuyau acoustique comme filtre passe-haut*, p. 1. — Jacques BRILLOUIN, *Propagation d'ondes sonores planes au voisinage d'un plan absorbant*, p. 97.

Et d'intéressants travaux expérimentaux : H. E. HARTIG et C. E. SWANSON, Transverse acoustic waves in rigid Tubes, *Phys. Rev.*, 1938, **54**, p. 618. — F. V. HUNT, Investigation of Room Acoustics by Steady-State Transmission Measurements, *Journ. of the acoustical Soc. of America*, janvier 1939, p. 216.

(3) cf. *Revue d'Acoustique*, p. 104 et figure p. 99.

limite l'onde plane uniforme, de sorte qu'une décomposition en ondes S obliques tend vers la décomposition classique en ondes uniformes lorsque l'impédance des plans limite tend vers l'infini (plans rigides).

Nous commencerons donc par donner la forme générale de l'équation de ces ondes et la description de leurs propriétés.

3. Les ondes S. — L'équation générale du potentiel des vitesses étant

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

on peut la satisfaire par une solution de la forme

$$\Phi = C e^{j\omega t + \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z}, \quad (2)$$

où $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont des quantités complexes. Posant alors $\delta_i = \delta'_i + j\delta''_i$, il vient entre ces diverses quantités, les relations

$$\left. \begin{aligned} (\delta_1'^2 + \delta_2'^2 + \delta_3'^2) - (\delta_1''^2 + \delta_2''^2 + \delta_3''^2) + \frac{\omega^2}{V^2} &= 0, \\ \delta_1' \delta_1'' + \delta_2' \delta_2'' + \delta_3' \delta_3'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Un changement d'orientation des axes permet de réduire la forme (2) à la forme

$$\Phi = C e^{\omega \left[j \left(t - \frac{\text{ch} \psi}{V} x - \frac{\text{sh} \psi}{V} y \right) \right]}, \quad (4)$$

nous nommerons *caractéristique* de l'onde l'arc hyperbolique ψ qui détermine sa vitesse de phase et la répartition des amplitudes dans la direction des y .

L'onde générale (2) est donc une onde oblique du type (4).

Cette dernière se propage sans déformation dans le sens ox avec une vitesse de phase $W = \frac{V}{\text{ch} \psi}$, inférieure à la vitesse du son V .

L'onde est uniforme dans le sens oz .

Les composantes de la *vitesse vibratoire* sont

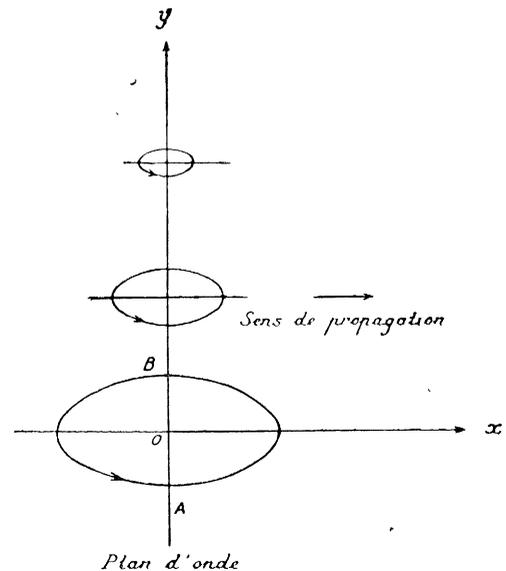
$$\left. \begin{aligned} v_x &= C \frac{\omega \text{ch} \psi}{V} e^{-\frac{\omega \text{sh} \psi}{V} y} \sin \omega \left(t - \frac{\text{ch} \psi}{V} x \right), \\ v_y &= -C \frac{\omega \text{sh} \psi}{V} e^{-\frac{\omega \text{sh} \psi}{V} y} \cos \omega \left(t - \frac{\text{ch} \psi}{V} x \right), \\ v_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

et les composantes du *déplacement*

$$\left. \begin{aligned} d_x &= -C \frac{\text{ch} \psi}{V} e^{-\frac{\omega \text{sh} \psi}{V} y} \cos \omega \left(t - \frac{\text{ch} \psi}{V} x \right), \\ d_y &= -C \frac{\text{sh} \psi}{V} e^{-\frac{\omega \text{sh} \psi}{V} y} \sin \omega \left(t - \frac{\text{ch} \psi}{V} x \right), \\ d_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Les trajectoires sont donc des ellipses situées dans des plans parallèles à xoy . Leur grand axe est parallèle à ox (direction de propagation) et leur petit axe à oy (direction de non-uniformité). Le rapport des axes est $\text{th} \psi$.

Tous les points du plan d'onde ont donc des vibrations elliptiques *en phase* dont l'amplitude suit dans le sens oy une loi exponentielle, et est constante dans le sens oz . Le sens de parcours est indiqué sur la figure.



Les pressions acoustiques sont

$$p = C \rho \omega e^{-\frac{\omega \text{sh} \psi}{V} y} \sin \omega \left(t - \frac{\text{ch} \psi}{V} x \right) \quad (7)$$

et sont donc en phase avec la composante longitudinale v_x de la vitesse vibratoire. Le maximum de pression se produit quand les particules passent à l'extrémité A du petit axe de leur trajectoire, c'est-à-dire quand la dilatation dans le sens transversal oy est maxima.

Lorsque ψ tend vers zéro l'onde tend vers l'onde plane uniforme.

La densité moyenne d'énergie est

$$C^2 \frac{\rho}{2} \frac{\omega^2}{V^2} e^{-2\frac{\omega \text{sh} \psi}{V} y} \quad (8)$$

Il est aisé de voir que l'énergie se propage dans le sens ox . En considérant une paroi normale au sens de propagation et d'impédance

$$Z = \frac{\rho V}{\text{ch} \psi},$$

qui absorbe totalement l'onde, on trouve que la vitesse de propagation de l'énergie est égale à la vitesse de phase $\frac{V}{\text{ch} \psi}$.

Le flux d'énergie à travers une surface dS normale à la direction de propagation est donc

$$C^2 \frac{\rho}{2} \frac{\omega^2}{V \text{ch} \psi} e^{-2\frac{\omega \text{sh} \psi}{V} y} dS. \quad (9)$$

De telles ondes, évidemment, ne sauraient avoir d'existence physique dans un espace illimité, car cela conduirait à y admettre des amplitudes indéfiniment croissantes avec $-\psi y$.

Nous avons montré qu'on peut limiter ces ondes dans cette direction par des plans doués d'absorption totale. Les ondes S peuvent donc exister dans un demi-espace limité par un plan absorbant.

4. Propagation le long d'un plan absorbant. —

Le plan absorbant est le plan xoy . L'espace considéré est celui des z positifs. Nous nous limitons aux solutions ayant la forme d'ondes planes uniformes en y , non uniformes en z , cheminant vers les x croissants avec une vitesse de phase W et un affaiblissement a .

Nous écrivons alors le potentiel des vitesses sous la forme

$$\Phi = e^{j\omega t} e^{-(a+j\frac{\omega}{W})z} F(z) \tag{10}$$

et la condition à la limite

pour $z = 0$ $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\rho}{Z} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$. (11)

D'où, pour déterminer $F(z)$, l'équation

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left[a^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{W^2} \right) + 2j \frac{a\omega}{W} \right] F = 0 \tag{12}$$

et la condition

pour $z = 0$ $\frac{dF}{dz} = j \frac{\omega \rho}{Z} F$. (13)

Appelant δ^2 la quantité entre crochets, facteur de F dans (12), les solutions sont

$$F = C' e^{j\delta z} + C'' e^{-j\delta z} \tag{14}$$

et la condition (13) donne

$$\frac{C''}{C'} = \frac{\delta Z - \rho \omega}{\delta Z + \rho \omega} \tag{15}$$

L'onde définie par ces conditions est la résultante de deux ondes S obliques, l'une incidente, l'autre réfléchie, d'incidence φ , de caractéristique ψ et il vient

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\omega}{V} \text{sh } \psi \cos \varphi, \\ \frac{1}{W} &= \frac{1}{V} \text{ch } \psi \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

Il est aisé de voir que $\left| \frac{C''}{C'} \right|$ représente le coefficient de réflexion des amplitudes. Le coefficient de réflexion des énergies est alors, en posant

$$Z = X + jY = Z e^{j\zeta}$$

$$\left| \frac{C''}{C'} \right|^2 = \frac{(\rho V \sin \zeta - Z \sin \varphi \text{sh } \psi)^2 + (\rho V \cos \zeta - Z \cos \varphi \text{ch } \psi)^2}{(\rho V \sin \zeta + Z \sin \varphi \text{sh } \psi)^2 + (\rho V \cos \zeta + Z \cos \varphi \text{ch } \psi)^2} \tag{17}$$

et le coefficient d'absorption

$$A = 1 - \left| \frac{C''}{C'} \right|^2 = \frac{4 \rho V Z \left| \sin \zeta \sin \varphi \text{sh } \psi + \cos \zeta \cos \varphi \text{ch } \psi \right|}{(\rho V \sin \zeta + Z \sin \varphi \text{sh } \psi)^2 + (\rho V \cos \zeta + Z \cos \varphi \text{ch } \psi)^2} \tag{18}$$

On a réflexion totale si $A = 0$, c'est-à-dire si

$$\text{tg } \zeta \text{ tg } \varphi \text{ th } \psi = -1.$$

Si donc on se donne le plan absorbant (ζ) et la caractéristique ψ de l'onde, on pourra toujours trouver un angle d'incidence φ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ pour lequel il y ait absorption totale.

Si $\zeta > 0$ ($Y > 0$) φ et ψ seront de signes contraires, c'est-à-dire que l'onde incidente aura des amplitudes indéfiniment croissantes lorsqu'on s'éloigne du plan limite.

Si $\zeta < 0$ ($Y < 0$) φ et ψ sont de même signe, l'onde aura des amplitudes décroissantes lorsqu'on s'éloigne du plan limite.

Pour $\zeta = 0$ (onde plane) on trouve la condition $\cos \zeta \cos \varphi = 0$,

c'est-à-dire :

Soit $\zeta = 0$ ($X = 0$, paroi sans viscosité, ce qui est évident).

Soit $\varphi = 0$ incidence rasante. Il faut alors remarquer que l'onde incidente et l'onde réfléchie sont en opposition de phase. L'onde résultante est évanouissante. *Il y a donc incompatibilité entre l'existence d'un plan absorbant et d'une onde plane uniforme cheminant sous incidence rasante le long de ce plan.*

L'absorption totale nécessite que dans (17) les deux carrés composant le numérateur soient nuls. On en tire les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \varphi \text{ th } \psi &= \text{tg } \zeta, \\ |Z| &= \frac{\rho V}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \text{sh}^2 \psi}} \quad (1). \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

Pour $\psi = 0$ (onde uniforme) il vient

$$\begin{aligned} \text{tg } \zeta &= 0 \quad (Y = 0, \text{ paroi purement visqueuse}), \\ |Z| &= X = \frac{\rho V}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Si le plan absorbant est donné, les formules (19) permettent de calculer la valeur de ψ et celle de φ correspondant à l'absorption totale.

Éliminant φ il vient, pour déterminer ψ ,

$$\text{sh}^4 \psi + \text{sh}^2 \psi \left(1 - \frac{\rho^2 V^2}{|Z|^2} \right) - \frac{\rho^2 V^2}{|Z|^2} \sin^2 \zeta = 0,$$

qui donne toujours pour $\text{sh}^2 \psi$ une racine positive

(1) C'est par erreur que nous avons donné une autre valeur dans un précédent article.

unique. ψ est donc déterminé au signe près. La première condition (19) détermine alors la valeur de φ correspondante. Le changement de signe de ψ entraîne celui de φ . On pourra donc prendre φ entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

A chaque plan absorbant correspond donc une onde S unique et une incidence unique pour lesquelles il y a absorption totale.

5. Propagation entre deux plans absorbants parallèles. — Ces plans seront les plans $z = z'$, $z = z''$ avec $z' > z''$. Leurs impédances respectives sont Z'_3 et Z''_3 .

Les conditions aux limites deviennent

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } z = z' \\ \text{pour } z = z'' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\rho}{Z'_3} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\rho}{Z''_3} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{array} \quad (20)$$

nous nous limitons aux ondes planes uniformes en y , non uniformes en z , normales à ox et cheminant vers les x positifs.

Φ prend alors la forme (12), $F(z)$ la forme (14) et les conditions aux limites donnent

$$C' = \frac{e^{-j\delta z'} \left(1 - \frac{\omega \rho}{\delta Z'_3}\right)}{e^{j\delta z'} \left(1 + \frac{\omega \rho}{\delta Z'_3}\right)} = \frac{e^{-j\delta z''} \left(1 - \frac{\omega \rho}{\delta Z''_3}\right)}{e^{j\delta z''} \left(1 + \frac{\omega \rho}{\delta Z''_3}\right)}, \quad (21)$$

d'où, pour déterminer δ , l'équation transcendante

$$\text{tg } \delta(z' - z'') = j \frac{\frac{\omega \rho}{\delta Z'_3} + \frac{\omega \rho}{\delta Z''_3}}{1 + \frac{\omega^2 \rho^2}{\delta^2 Z'_3 Z''_3}}. \quad (22)$$

La résolution de l'équation transcendante (22) nous donnera donc, pour chaque valeur de ω , une infinité de racines $\delta = \delta' + j\delta''$, d'où nous tirerons les formes d'onde possibles, leurs vitesses de phase, leurs affaiblissements.

Se reportant à la valeur de δ^2 [équation (12)] on trouve en effet

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^2 - \frac{\omega^2}{W^2} = \delta'^2 - \delta''^2 - \frac{\omega^2}{V^2} \\ \alpha \frac{\omega}{W} = \delta' \delta'' \end{array} \right\} \quad (23)$$

α^2 et $-\frac{\omega^2}{W^2}$ sont donc les deux racines, l'une positive, l'autre négative, de l'équation du second degré en u

$$u^2 - \left(\delta'^2 - \delta''^2 - \frac{\omega^2}{V^2}\right) u - \delta' \delta'' = 0. \quad (24)$$

La forme (14) de $F(z)$ montre que l'onde est le résultat de la superposition de deux ondes S obliques de caractéristique ψ et d'incidence φ aisément calculables.

Ainsi le cas de deux plans absorbants parallèles est analogue à celui de deux plans rigides, mais, au lieu de deux ondes planes uniformes obliques, ce sont deux ondes S obliques que l'on devra associer, et qui fourniront une onde résultante se propageant avec une vitesse de phase

$$W = \frac{V}{\sin \varphi \text{ ch } \psi},$$

qui pourra être inférieure à V , et un affaiblissement

$$\alpha = \frac{\omega}{V} \cos \varphi \text{ sh } \psi$$

que la structure des ondes S indique clairement.

Dans le cas où les deux plans ont la même impédance Z_3 , nous poserons $z' = z_0$, $z'' = -z_0$. La condition (22) donne alors :

soit

$$\delta \text{ tg } \delta z_0 = j \frac{\omega \rho}{Z_3} \quad \text{avec } C' = C'', \quad (25)$$

d'où

$$F(z) = C \cos \delta z;$$

soit

$$\delta \text{ cotg } \delta z_0 = -j \frac{\omega \rho}{Z_3} \quad \text{avec } C' = -C'', \quad (26)$$

d'où

$$F(z) = C \sin \delta z.$$

Nous appellerons les premières solutions *paires* et les secondes *impaires*, car, pour $Z = \infty$ (plan rigide), elles donnent respectivement les valeurs classiques

$$2z_0 \delta = 2k\pi, \quad 2z_0 \delta = (2k-1)\pi.$$

Remarquons que, pour les solutions paires, le plan $z = 0$ est un plan de symétrie et qu'on y a $\frac{dF}{dz} = 0$, c'est-à-dire que la vitesse vibratoire normale à ce plan est nulle. On peut donc le remplacer par un plan rigide.

Les solutions paires sont donc les solutions du problème de propagation entre un plan rigide $z = 0$ et un plan absorbant $z = z_0$.

Les équations (25) et (26) peuvent s'écrire sous une forme sans dimensions qui sera utile pour une discussion.

Posant

$$\delta z_0 = \theta = \theta' + j\theta'',$$

et, λ étant la longueur d'onde (en espace libre) du son considéré,

$$\lambda = \frac{2\pi V}{\omega},$$

et enfin

$$\xi = 2\pi \frac{z_0}{\lambda} \frac{\rho V X}{F^2 + Y^2},$$

$$\eta = 2\pi \frac{z_0}{\lambda} \frac{\rho V Y}{F^2 + Y^2};$$

avec

$$Z = Y + jX.$$

(25) et (26) deviennent respectivement

$$\theta \operatorname{tg} \theta = \eta + j\xi, \quad (27)$$

$$\theta \operatorname{cotg} \theta = -(\eta + j\xi). \quad (28)$$

Lorsque $Z = \infty$ (plans rigides), nous avons donc

$$\delta' = \frac{k\pi}{2z_0}, \quad \delta'' = 0.$$

Nous reportant aux équations (23), nous trouvons que

$$\text{pour } k < \frac{4z_0}{\lambda} \quad \delta'^2 - \frac{\omega^2}{V^2} < 0,$$

on a donc

$$a = 0, \quad W > V,$$

c'est la forme classique d'une onde formée par superposition de deux ondes planes uniformes obliques, et se propageant sans affaiblissement sous une incidence φ , avec

$$\cos \varphi = \frac{k\lambda}{4z_0}$$

$$\text{pour } k > \frac{4z_0}{\lambda} \quad \delta'^2 - \frac{\omega^2}{V^2} > 0,$$

on a

$$W = \infty, \quad a \neq 0$$

et les équations (16) montrent qu'alors le système stationnaire représenté par cette solution est le résultat de la superposition de deux ondes S d'incidence normale ($\varphi = 0$), qui donnent bien

$$\frac{1}{W} = 0, \quad a = \frac{\omega}{V} \operatorname{sh} \psi.$$

ψ étant déterminé par la relation

$$\operatorname{ch} \psi = \frac{k\lambda}{4z_0}.$$

Pour une valeur de λ donnée il y a donc deux groupes de phénomènes, les uns progressifs se propageant sans affaiblissement, les autres stationnaires et comportant un affaiblissement dans le sens des x .

Ce résultat subsiste tant que les impédances des plans limites sont purement imaginaires (parois sans viscosité). Il est évident en ce cas qu'il ne saurait y avoir propagation avec dissipation d'énergie. Les solutions δ complexes, s'il s'en trouvait, seraient incompatibles avec les conditions physiques. La relation (22) peut alors donner δ soit réel, soit imaginaire pur, les deux cas entraînant soit W fini avec $a = 0$ (ondes progressives sans affaiblissement résultant de la superposition de deux ondes planes uniformes obliques), soit $W = \infty$ avec $a \neq 0$ (phénomènes stationnaires résultant de la superposition de deux ondes S d'incidence normale).

Si l'une au moins des impédances Z'_1, Z''_1, Z'_3, Z''_3 , contient un terme réel (viscosité), (22) montre que les solutions δ sont complexes. Dans ce cas (24), qui donne a^2 et $-\frac{\omega^2}{W^2}$ a deux racines de signes contraires. Il y a donc toujours à la fois propagation et affaiblissement.

Ainsi l'apparition de la viscosité sur les parois a deux conséquences : la première, qui est intuitive, est d'introduire dans les ondes progressives un affaiblissement en cours de propagation, c'est-à-dire de transformer en ondes S les deux ondes uniformes obliques dont la superposition forme l'onde considérée; la seconde est de rendre progressifs les phénomènes stationnaires, c'est-à-dire de rendre obliques les deux ondes S d'incidence normale qui les composaient.

6. Propagation dans un tuyau de section rectangulaire. — Les plans limitant le tuyau seront :

$$\begin{array}{lll} y = y' & \text{d'impédance} & Z'_2 \\ y = y'' & \text{''} & Z''_2 \quad \text{avec } y' > y'', \\ z = z' & \text{''} & Z'_3 \\ z = z'' & \text{''} & Z''_3 \quad \text{avec } z' > z''. \end{array}$$

Employant toujours la même méthode de décomposition nous écrirons

$$\Phi = e^{j\omega t} e^{-\left(a + j\frac{\omega}{W}\right)x} F_2(y) F_3(z) \quad (29)$$

et nous trouverons

$$\left. \begin{array}{l} F_2 = C'_2 e^{j\delta_2 y} + C''_2 e^{-j\delta_2 y} \\ F_3 = C'_3 e^{j\delta_3 z} + C''_3 e^{-j\delta_3 z} \end{array} \right\} \quad (30)$$

avec, pour satisfaire à l'équation générale du potentiel des vitesses,

$$\delta_2^2 + \delta_3^2 = \frac{\omega^2}{V^2} + \left(a + j\frac{\omega}{W}\right)^2; \quad (31)$$

δ_2 et δ_3 , pour remplir les conditions aux limites doivent chacun être racine d'une équation du type (22). Chaque racine δ_2 peut être accouplée avec chaque racine δ_3 pour former une solution complète.

Ainsi l'onde est le résultat de la superposition de quatre ondes S obliques.

L'affaiblissement et la vitesse de phase sont alors données par (31) et il vient

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - \frac{\omega^2}{W^2} = (\delta_2'^2 + \delta_3'^2) - (\delta_2''^2 + \delta_3''^2) - \frac{\omega^2}{V^2}, \\ a \frac{\omega}{W} = \delta_2' \delta_2'' + \delta_3' \delta_3'', \end{array} \right\} \quad (32)$$

qui permettent de calculer a^2 et $-\frac{\omega^2}{W^2}$ comme racines d'une équation du second degré analogue à (23).

Si l'on a $Z'_2 = Z''_2$ ou $Z'_3 = Z''_3$ l'une des conditions (22) prend la forme (25) ou (26). Les solutions se séparent

en paires et impaires, qui permettent de traiter le cas où certaines parois du tuyau sont rigides. Comme dans le cas précédent, si les parois sont sans viscosité, les solutions se divisent en deux groupes : ondes progressives sans affaiblissement, phénomènes stationnaires résultant de la combinaison de quatre ondes S normales aux parois. Si les parois ont de la viscosité toutes les solutions sont des ondes progressives avec affaiblissement.

7. Tuyau de section circulaire. — Le potentiel des vitesses s'écrit, en coordonnées polaires r, φ prises autour de l'axe ox du tuyau,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (33)$$

et la condition à la limite, si r_0 est le rayon du tuyau,

$$\text{pour } r = r_0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{\rho}{Z} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (34)$$

On prend pour Φ la forme classique

$$\Phi = e^{j\omega t} \sin n\varphi e^{-\left(a + j\frac{\omega}{V}\right)r} F(r);$$

on trouve alors

$$F(r) = C_n J_n(\delta r),$$

J_n étant la fonction de Bessel d'ordre n et la condition (33) donne

$$\left(\frac{n}{r_0} + j\frac{\omega\rho}{Z}\right) J_n(\delta r_0) = \delta J_{n+1}(\delta r_0), \quad (35)$$

qui, avec les mêmes notations que précédemment dans lesquelles r_0 remplace z_0 , prend la forme sans dimensions

$$\theta \frac{J_{n+1}(\theta)}{J_n(\theta)} = n + \eta + j\xi. \quad (36)$$

8. Tuyaux étroits. — On obtient le résultat, qui est celui de la théorie élémentaire (tuyaux souples, de Helmholtz; coups de bélier), où l'on considère une tranche comme animée d'un mouvement d'ensemble, en confondant dans (22), (25) ou (26) la tangente avec l'angle, ou, dans le cas du tuyau de section circulaire, en posant

$$n = 0, \quad J_0(\delta r_0) = 1, \quad J_1(\delta r_0) = \frac{1}{2} \delta r_0.$$

9. Vibrations forcées des espaces clos. Salle parallélépipédique. — La recherche des sons propres d'espaces clos par des surfaces absorbantes (1) conduit à poser

$$\Phi = e^{j\omega t - \alpha t} \Psi(xyz), \quad (37)$$

(1) Voir, par exemple, SCHUSTER et WAETZMANN, Über den Nachhall in geschlossenen Räumen, *Annalen der Physik*, 5 folge, Bd 1, Heft 5, 1929, p. 671.

avec une condition aux limites

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = - \frac{\rho}{Z} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

qui donne pour Ψ

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = - \frac{(j\omega - \alpha)\rho}{Z} \Psi, \quad (38)$$

où Z est une fonction des coordonnées et de la pulsation ω .

On obtient alors deux séries de valeurs : $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$ de la pulsation, et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ de l'amortissement; et la série de fonctions $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$ qui leur correspondent.

Ces fonctions, contrairement à ce qui se passe dans les cas classiques, ne sont pas propres à l'étude des états stables de vibrations forcées. En effet, il faut dans ce cas poser

$$\Phi = e^{j\omega t} \Psi(x, y, z).$$

Si l'on prend pour Ψ une des fonctions Ψ_k précédemment déterminées, les conditions aux limites ne sont pas satisfaites, et ce pour deux raisons : la suppression du terme α dans la condition (38), la variation de valeur de Z en fonction de ω .

L'étude des vibrations forcées peut être faite par la voie suivante : si les forces extérieures (sources sonores) agissant sur l'élément de volume dx, dy, dz dérivent d'un potentiel R , ce qui est généralement le cas, l'équation du potentiel des vitesses prend la forme

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial R}{\partial t} \right), \quad (39)$$

qui, si $R = R_0 e^{j\omega t}$, doit donner des solutions de la forme $\Phi = \Psi e^{j\omega t}$, d'où, pour déterminer les fonctions Ψ l'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{V^2} \Psi = - \frac{j\omega}{V^2} R_0. \quad (40)$$

Nous chercherons les fonctions Ψ_k satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{V^2} \Psi_k = 0, \quad (41)$$

où ω est la pulsation donnée, et d_k une quantité complexe à déterminer de manière à ce que Ψ_k satisfasse à la condition aux limites

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial n} = - \frac{j\omega\rho}{Z} \Psi_k. \quad (42)$$

A toute valeur donnée de ω , (41) et (42) font correspondre une suite $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$ de fonctions, et la suite correspondante des quantités d_1, d_2, \dots, d_k .

On décomposera alors R_0 en série

$$R_0 = \sum_1^{k=\infty} A_k \Psi_k;$$

Ψ sera donné par une autre série

$$\Psi = \sum_1^{k=\infty} B_k \Psi_k.$$

Se reportant à (40), en tenant compte de (41), il vient

$$B_k = \frac{j\omega}{\delta_k^2} A_k$$

et (42) montre que Ψ satisfait à la condition aux limites.

L'étude des vibrations forcées doit donc se faire au moyen des équations tirées de la condition aux limites (42), qui est du même type que les conditions rencontrées dans les problèmes de propagation, et non au moyen des équations tirées des conditions du type (43) rencontrées dans les problèmes de sons propres amortis.

Nous traiterons le cas à trois dimensions, de la Salle parallélépipédique dont chaque paroi a une impédance donnée. Nous posons alors, comme précédemment

$$\Phi = e^{j\omega t} F_1(x) F_2(y) F_3(z),$$

où les trois fonctions F_1, F_2, F_3 ont la même forme

$$F_1 = C_1' e^{j\delta_1 x} + C_1'' e^{-j\delta_1 x} \dots,$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ étant chacun racine d'une équation du type (22).

En associant trois valeurs de $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, et les trois

fonctions F_1, F_2, F_3 nous formerons la fonction

$$\Psi_k(x, y, z) = F_1(x) F_2(y) F_3(z),$$

qui satisfait aux conditions aux limites. Portant Ψ_k dans l'équation (41), nous obtiendrons la quantité complexe d_k qui lui correspond

$$d_k^2 = \omega^2 + \Gamma^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2).$$

10. Problèmes se rattachant aux problèmes précédents. — Les mêmes méthodes et les mêmes types de conditions, conduisant aux équations transcendantes (22), (25), (26) et (36), permettent de traiter les problèmes suivants.

Tuyaux rigides étroits ou cordes terminés à leurs extrémités par deux impédances Z' et Z'' , couche fluide mince comprise entre deux plans parallèles rigides, ou membrane, limitée par un contour rectangulaire ou circulaire d'impédance ponctuelle Z . Ces problèmes sont alors, comme celui de la Salle parallélépipédique, des problèmes de vibrations forcées.

11. Classement des ondes, discussion des résultats. — Ce travail suppose la résolution des équations transcendantes régissant le problème étudié, puis à partir du classement des racines, l'étude du classement des vitesses de phase et affaiblissements.

Nous l'avons entrepris sous la forme simplifiée — et déjà fort laborieuse — des équations (26) et (27), et en donnerons les résultats dans un prochain article.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1939.