



HAL
open science

La distribution de la température dans un coin rectangulaire

Philippe Bock

► **To cite this version:**

Philippe Bock. La distribution de la température dans un coin rectangulaire. Journal de Physique et le Radium, 1939, 10 (5), pp.241-244. 10.1051/jphysrad:01939001005024100 . jpa-00233665

HAL Id: jpa-00233665

<https://hal.science/jpa-00233665>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE DANS UN COIN RECTANGULAIRE

Par PHILIPPE BOCK.

Brno (Č. S. R.).

Sommaire. — Recherche de la distribution de la température dans un coin indéfini limité par deux plans rectangulaires, puis dans un quart de cylindre de révolution, les distributions des températures sur les faces étant données.

Dans la première partie de ce travail, il s'agit de la recherche de la distribution de la température dans un coin rectangulaire infini, c'est-à-dire limité par deux demi-plans normaux l'un sur l'autre, en supposant que la température soit une fonction donnée $e^{it}.f(x)$ le long d'une face $y = 0$ et une fonction donnée $e^{it}.g(y)$ le long de l'autre face $x = 0$. La solution générale de l'équation de la conduction de la chaleur est représentée, avec les conditions aux limites données, par superposition de deux solutions partielles qui sont exprimées en forme d'intégrales de Fourier.

Dans la seconde partie de ce traité, il s'agit de la recherche de la distribution de la température dans un quart de cylindre d'une longueur infinie sous des conditions ou limites particulières et de la description explicite de la solution.

1. L'équation de la conduction de la chaleur est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

u représentant la température, x, y les coordonnées rectangulaires de Descartes dans le plan de section, t la température et k la conductibilité thermique. La solution satisfaisant aux conditions aux limites ci-dessus mentionnées de l'équation (1) a la forme :

$$u = e^{it}.U(x, y) \quad (2)$$

de manière que le facteur d'espace complexe $U(x, y)$ suffit à l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{i\nu}{k} U. \quad (3)$$

La solution $U(x, y)$ est composée de deux parties, dont la première $U_1(x, y)$ doit satisfaire aux conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} U_1 = 0 \\ U_1 = f(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } x = 0 \\ \text{pour } y = 0 \end{array} \quad (4a)$$

et dont la seconde $U_2(x, y)$ doit satisfaire aux conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} U_2 = g(y) \\ U_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } x = 0 \\ \text{pour } y = 0 \end{array} \quad (4b)$$

En premier lieu nous formons la solution, à partir des solutions élémentaires de la forme :

$$U_i = \sin \lambda x . e^{-y \sqrt{i^2 + \frac{i\nu}{k}}} \quad (5)$$

en multipliant U_i par une fonction $\varphi(\lambda)$ et en intégrant selon λ .

Comme solution générale de l'équation (3) satisfaisant aux conditions aux limites (4a), nous obtenons :

$$U_1(x, y) = \int_0^\infty \varphi(\lambda) . \sin \lambda x . e^{-y \sqrt{i^2 + \frac{i\nu}{k}}} . d\lambda. \quad (6)$$

Nous destinons la fonction $\varphi(\lambda)$ à l'aide du théorème d'intégrale de Fourier selon la seconde condition aux limites (4a). Selon celle-ci :

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(\lambda) . \sin \lambda x . dx$$

et par conséquent :

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \sin \lambda \xi . d\xi.$$

Donc, il en résulte comme première solution partielle l'expression :

$$U_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi) \sin \lambda \xi . \sin \lambda x . e^{-y \sqrt{i^2 + \frac{i\nu}{k}}} d\xi . d\lambda. \quad (6)$$

De la même manière nous trouvons la seconde solution partielle $U_2(x, y)$ sous la forme :

$$U_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau) \sin \mu \tau . \sin \mu y . e^{-x \sqrt{i^2 + \frac{i\nu}{k}}} d\tau . d\mu. \quad (7)$$

Les solutions (6) et (7) peuvent être représentées d'une manière sommaire, si nous calculons les noyaux :

$$K_1(x, \xi; y) = \int_0^\infty \sin \lambda x . \sin \lambda \xi . e^{-y \sqrt{i^2 + \frac{i\nu}{k}}} d\lambda \quad (6')$$

et :

$$K_2(x; y, \tau) = \int_0^\infty \sin \mu y . \sin \mu \tau . e^{-x \sqrt{i^2 + \frac{i\nu}{k}}} d\mu. \quad (7')$$

Ce calcul réussit à l'aide de la fonction cylindrique

de Hankel de première espèce d'indice 0. Nous considérons donc la fonction :

$$H_0^1(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{ikr \cos \varphi} d\alpha$$

et posons : $\alpha = i(\gamma - \varphi)$.

Il vient :

$$H_0^1(kr) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikr \cos \varphi} \cos \varphi \cdot e^{ikr \sin \varphi} \sin \varphi d\varphi,$$

d'où résulte par la substitution :

$$kr \sin \varphi = Cu, \quad -ikr \cos \varphi = Cv, \quad \sin \varphi = \frac{\lambda}{c}$$

$$H_0^1(ic\sqrt{u^2 + v^2}) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\sqrt{\lambda^2 - c^2 + iku}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + c^2}}.$$

Par une différentiation partielle de cette équation par rapport à \mathbf{v} , nous pouvons écrire la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iku - r\sqrt{\lambda^2 - c^2 + iku}} d\lambda = \frac{c\mathbf{v}\pi}{\sqrt{u^2 + v^2}} H_1^1(ic\sqrt{u^2 + v^2}). \quad (8)$$

A présent nous posons en (6') :

$$\sin \lambda x \cdot \sin \lambda \xi = -\frac{1}{4} (e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}) (e^{i\lambda \xi} - e^{-i\lambda \xi})$$

et obtenons quatre intégrales qui, deux à deux se laissent réduire à une intégrale qui s'étend de $-\infty$ à $+\infty$. Le calcul de la valeur de ces deux intégrales donne :

$$K_1(x, \xi; y) = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{iy}{k}} y \left\{ \frac{H_1^1\left(\sqrt{-\frac{iy}{k}} \sqrt{(x+\xi)^2 + y^2}\right)}{\sqrt{(x+\xi)^2 + y^2}} - \frac{H_1^1\left(\sqrt{-\frac{iy}{k}} \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}\right)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + y^2}} \right\}. \quad (6'')$$

De même :

$$K_2(x; y, \tau) = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{iy}{k}} x \left\{ \frac{H_1^1\left(\sqrt{-\frac{iy}{k}} \sqrt{(y+\tau)^2 - x^2}\right)}{\sqrt{(y-\tau)^2 + x^2}} - \frac{H_1^1\left(\sqrt{-\frac{iy}{k}} \sqrt{(y-\tau)^2 - x^2}\right)}{\sqrt{(y-\tau)^2 - x^2}} \right\}. \quad (7'')$$

La solution totale $U = U_1 + U_2$ apparaît alors sous la forme :

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} K_1(x, \xi; y) f(\xi) d\xi - \int_0^{\infty} K_2(x; y, \tau) g(\tau) d\tau \right], \quad (9)$$

avec les noyaux donnés par (6'') et (7'') où, comme

d'habitude, la partie réelle représente la température.

2. La distribution de la température dans un quart de cylindre d'une longueur infinie. — Le long des faces du coin, donnons-nous la température comme l'indique la figure 1, et cela le long de la face $\overline{OA} = a$ par la fonction $f(x)$, le long de la face $\overline{OB} = a$, par la fonction $g(y)$ et le long de l'arc de cercle \widehat{AB}

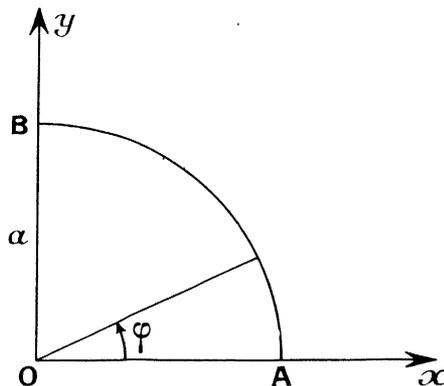


Fig. 1.

par la fonction $h(\varphi)$. La température totale, nous la composons par les températures de trois solutions partielles :

$$U = U_1 + U_2 + U_3. \quad (1)$$

La première solution partielle est alors :

$$U_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^a K_1(x, \xi; y) f(\xi) d\xi. \quad (2)$$

La seconde solution partielle est alors :

$$U_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^a K_2(x; y, \tau) g(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Quant à la troisième solution partielle, il faut qu'elle satisfasse aux conditions aux limites :

$$U_3|_{x=0} = 0, \quad U_3|_{y=0} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$U_3|_{x=0} = 0, \quad U_3|_{y=0} = 0; \quad U_3|_{r=a} = h(\varphi) \quad (5)$$

et elle peut être écrite sous la forme :

$$U_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin 2n\varphi \cdot J_{2n}\left(r\sqrt{-\frac{iy}{k}}\right). \quad (4)$$

Tenant compte de $x = a \cdot \cos \varphi$ et $y = a \cdot \sin \varphi$ nous pouvons écrire les valeurs que les solutions par-

tielles prennent sur l'arc \widehat{AB} de la manière suivante :

$$U_1(a \cos \varphi, a \sin \varphi) = U_1(xy)|_a = \frac{1}{\pi} \int_0^a K_1(a \cos \varphi, \xi; a \sin \varphi) f(\xi) d\xi. \quad (2)$$

$$U_2(a \cos \varphi, a \sin \varphi) = U_2(xy)|_a = \frac{1}{\pi} \int_0^a K_2(a \cos \varphi; a \sin \varphi, r) g(r) dr. \quad (3)$$

et :

$$U_3(a \cos \varphi, a \sin \varphi) = U_3(xy)|_a = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin 2n\varphi \cdot J_{2n} \left(a \sqrt{-\frac{iv}{k}} \right).$$

On obtient les coefficients c_n par la théorie des séries de Fourier. Après la substitution de la valeur de c_n , la solution U_3 peut être aussi écrite de la sorte :

$$U_3(xy) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{a \cos \varphi} U_3(a) \cdot J_{2n} \left(r \sqrt{-\frac{iv}{k}} \right) \sin 2n\varphi \cdot d\varphi}{J_{2n} \left(a \sqrt{-\frac{iv}{k}} \right)}$$

$$\frac{a\pi \sqrt{\frac{iv}{k}}}{4} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{H_1^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{iv}{k}} \sqrt{(a \cos \varphi + \xi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} \right)}{\sqrt{(a \cos \varphi + \xi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi \cdot f(\xi) \sin 2n\varphi d\xi d\varphi \right. \\ \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{H_1^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{iv}{k}} \sqrt{(a \cos \varphi - \xi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} \right)}{\sqrt{(a \cos \varphi - \xi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi \cdot f(\xi) \sin 2n\varphi d\xi d\varphi \right\}. \quad (7)$$

Les deux intégrales doubles se laissent facilement réduire à une intégrale unique, en posant dans la première intégrale : $\varphi = \psi$ et dans la seconde intégrale :

$$\varphi = \pi - \psi.$$

La contraction des deux intégrales donne :

$$\frac{a\pi \sqrt{\frac{iv}{k}}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{H_1^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{iv}{k}} \sqrt{a^2 + \xi^2 + 2a\xi \cos \varphi} \right)}{\sqrt{a^2 + \xi^2 + 2a\xi \cos \varphi}} \sin \varphi \cdot \sin 2n\varphi \cdot f(\xi) d\xi \cdot d\varphi. \quad (7')$$

Par une intégration partielle de l'expression :

$$\frac{1}{\xi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{H_1^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{iv}{k}} \sqrt{a^2 + \xi^2 + 2a\xi \cos \varphi} \right)}{\sqrt{a^2 + \xi^2 + 2a\xi \cos \varphi}} \sqrt{-\frac{iv}{k}} a \cdot \xi \cdot \sin \varphi \right] \sin 2n\varphi \cdot d\varphi,$$

nous obtenons :

$$-\frac{2n}{\xi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_0^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{iv}{k}} \sqrt{a^2 + \xi^2 + 2a\xi \cos \varphi} \right) \cos^2 n\varphi \cdot d\varphi.$$

De la condition aux limites (5) résulte :

$$U_3(a) = h(\varphi) - [U_1(a) + U_2(a)]. \quad (5)$$

Donc, suivant (6) :

$$c_n = \frac{4}{\pi J_{2n} \left(a \sqrt{-\frac{iv}{k}} \right)} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\varphi) \sin 2n\varphi \cdot d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a K_1(a \cos \varphi, \xi; a \sin \varphi) f(\xi) \sin 2n\varphi \cdot d\xi \cdot d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a K_2(a \cos \varphi; a \sin \varphi, r) g(r) \sin 2n\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \right\}. \quad (6')$$

Pour calculer les intégrales qui surgissent ici, nous employons pour les noyaux les représentations (6'') et (7'') pour les fonctions cylindriques de Hankel de premier ordre. Le second terme en (6) se transforme en :

Dans cette intégrale nous employons le théorème d'addition de fonctions cylindriques de Hankel :

$$-\frac{2n}{\xi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_0^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{iv}{k}} \sqrt{a^2 + \xi^2 + 2a\xi \cos \varphi} \right) \cos 2n\varphi = \\ = - \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \frac{2n}{\xi} J_{\varepsilon} \left(\sqrt{-\frac{iv}{k}} \xi \right) H_{\varepsilon}^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{iv}{k}} a \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\varepsilon(\frac{\pi}{2}-\varphi)} \cdot \cos 2n\varphi \cdot d\varphi \quad (1).$$

L'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\varepsilon(\frac{\pi}{2}-\varphi)} \cdot \cos n\varphi \cdot d\varphi = \frac{\varepsilon[(-1)^{\varepsilon} - 1]}{i(\varepsilon^2 - 4n^2)}$$

disparaît pour des ε pairs, hors $\varepsilon = \pm 2n$ et a pour des valeurs impaires positives et négatives de ε la valeur égale contraire. Pour $\varepsilon = \pm 2n$, cette intégrale a la même valeur $\frac{\pi}{2}$.

De plus, nous tenons compte de :

$$J_{-}(z) = (-1)^n J_{+}(z)$$

et :
$$H_{-}^1(z) = (-1)^n H_{+}^1(z).$$

Par conséquent, la somme se réduit à un membre. Nous pouvons donc écrire définitivement le second terme en c_n de la manière suivante :

$$-\frac{\pi^2 in}{2} H_{2n}^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} a \right) \int_0^a J_{2n} \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} \xi \right) f(\xi) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Le calcul du troisième terme (2) se fait d'une manière semblable et fournit la valeur :

$$-\frac{\pi^2 in}{2} (-1)^{n+1} H_{2n}^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} a \right) \int_0^a J_{2n} \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} \tau_1 \right) g(\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau_1}.$$

Par conséquent c_n peut s'écrire :

$$c_n = \frac{2}{J_{2n} \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} a \right)} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\varphi) \sin 2n\varphi \cdot d\varphi - in H_{2n}^1 \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} a \right) \left\{ \int_0^a J_{2n} \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} \xi \right) f(\xi) \frac{d\xi}{\xi} + (-1)^{n+1} \int_0^a J_{2n} \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} \tau_1 \right) g(\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau_1} \right\} \right],$$

Si le quart de cylindre est placé dans un champ de température symétrique de sorte que :

$$f(z) = g(z)$$

les coefficients c_n disparaissent pour des n pairs.

L'interprétation de la solution précédente est à reconnaître par la considération suivante : On sait que les fonctions cylindriques de Hankel d'indice 1 représentent des ondes cylindriques. Les noyaux $K_1(x, \xi; y)$ et $K_2(x; y, \tau_1)$ de notre solution sont composés de telles fonctions. La fonction de Hankel

$$H_1^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} \right)$$

représente une fonction cylindrique sortant du point $(\xi, 0)$. Chaque point de l'axe x peut donc être considéré comme point source d'une onde cylindrique,

dont l'intensité est proportionnelle à la température $f(\xi)$ de ce point. Par réflexion à la paroi $x = 0$ se forme une nouvelle onde, dont la source apparente est située à l'image mirage du point de source, donc du point $(-\xi, 0)$ de la première onde cylindrique. Cette onde réfléchie est représentée par la partie :

$$H_1^{(1)} \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} \sqrt{(x + \xi)^2 + y^2} \right)$$

du noyau. Une considération analogue est aussi valable pour le noyau $K_2(x; y, \tau_1)$.

On devrait supposer d'avance que la solution aurait une telle structure. Car selon le principe de Huyghens, chaque point de la superficie du coin atteint par les oscillations de température $u_a = f(\xi) \cdot e^{i\nu t}$ devient centre d'excitation d'ondes secondaires, qui sont justement les ondes cylindriques discutées ci-dessus.

J'exprime ma reconnaissance à M. le Professeur R. Weyrich qui m'a donné l'idée de ce travail, et à M. A. Erdélyi pour ses précieux conseils.

Manuscrit reçu le 20 février 1939.

BIBLIOGRAPHIE

(1) R. WEYRICH, dans son ouvrage « Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen » (B. G. Teubner, Leipzig, 1937, 4, p. 92, donne :

$$e^{i\nu} Z_\nu(kr) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(kr) Z_{\nu-n}^{(2)}(kr_0) e^{in(\varphi-\varphi_0)} \quad (r < r_0)$$

avec nos notations :

$$r = \xi, \quad \xi < a, \quad r_0 = a, \quad \varphi_0 = \pi, \quad \nu = 0 \quad \text{et} \quad Z_\nu = H_0^{(1)}.$$

(2) Nous remplaçons dans

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{H_1^1 \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} \sqrt{a^2 + \tau_1^2 + 2a \sin \varphi} \right)}{\sqrt{a^2 + \tau_1^2 + 2a \sin \varphi}} \cos \varphi \cdot \sin 2n\varphi g(\tau) d\varphi d\tau$$

φ par $\frac{\pi}{2} - \psi$

et dans

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{H_1^1 \left(\sqrt{-\frac{i\nu}{k}} \sqrt{a^2 - \tau_1^2 - 2a \sin \varphi} \right)}{\sqrt{a^2 - \tau_1^2 - 2a \sin \varphi}} \cos \varphi \cdot \sin 2n\varphi g(\tau) d\varphi d\tau$$

φ par $-\frac{\pi}{2} - \psi$.

Par ces remplacements, les deux intégrales sont transformées au facteur $(-1)^{n+1}$ pris en une intégrale du type (7).

PLANCHE I.

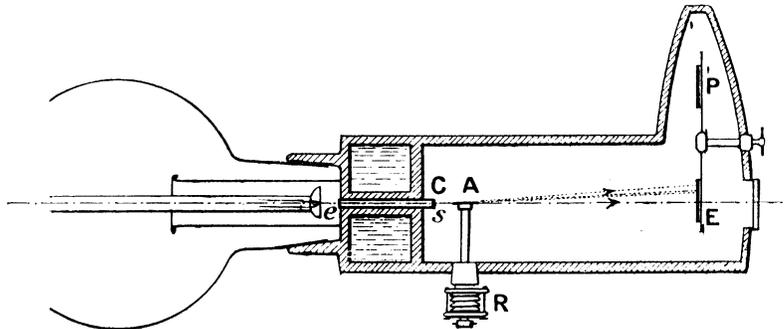


Fig. 1. - Schéma de l'expérience avec analyseur électronique: A: plaquette de métal tangente au faisceau.

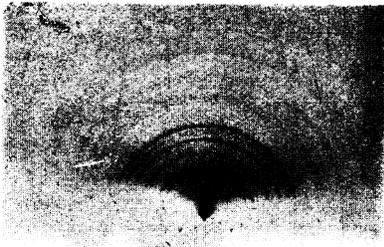


Fig. A.
Cuivre oxydé; diagramme initial (40 K.V.).

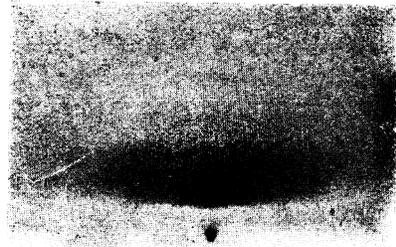


Fig. B.
Même point que fig. A après exposition de trois minutes.



Fig. C.
Trace du faisceau tangent sur plaquette Ag. ($\times 10$).

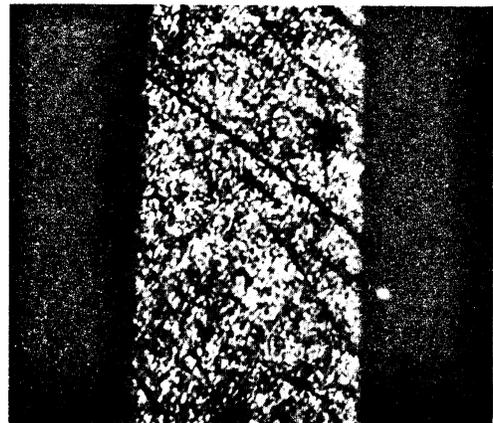


Fig. D.
Même trace que fig. C ($\times 300$).