



Sur la théorie de la désintégration radioactive alpha

L. Goldstein

► To cite this version:

L. Goldstein. Sur la théorie de la désintégration radioactive alpha. Journal de Physique et le Radium, 1936, 7 (12), pp.527-532. 10.1051/jphysrad:01936007012052700 . jpa-00233464

HAL Id: jpa-00233464

<https://hal.science/jpa-00233464>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LA THÉORIE DE LA DÉSINTÉGRATION RADIOACTIVE ALPHA

Par L. GOLDSTEIN
Institut Henri Poincaré

Sommaire. — On généralise la théorie de la désintégration radioactive alpha pour tenir compte de l'extension spatiale finie de la particule émise. Comme on ne veut introduire dans la théorie aucune hypothèse nouvelle sur la structure nucléaire, on considère la particule alpha comme un corpuscule rigide sphérique de rayon fini. Ceci exclut la possibilité d'un traitement rigoureux du problème et exige un traitement approché contrairement à la théorie originale — théorie ponctuelle — qui regarde la particule alpha comme un corpuscule sans dimension dont le mouvement se décrit rigoureusement à l'aide de la mécanique des quanta qui est une mécanique ponctuelle. La méthode de traitement approchée, adoptée ici, conduit à une expression de la vie moyenne radioactive nucléaire qui ne diffère pratiquement que très peu de la formule de vie moyenne donnée par la théorie ponctuelle. Il résulte, en particulier, que les rayons des noyaux radioactifs obtenus à l'aide de la formule de vie moyenne généralisée, suivant le procédé de Gamow, ne sont que peu supérieurs aux rayons nucléaires fournis par la théorie ponctuelle, tout au moins dans l'hypothèse où le rayon de la particule alpha ne correspond pas à une fraction très élevée du rayon des noyaux atomiques radioactifs.

§ 1. — La théorie proposée, dans les cadres de la mécanique des quanta, par Gamow, Gurney et Condon ⁽¹⁾ pour expliquer le processus de désintégration radioactive alpha, a permis d'interpréter la loi empirique de Geiger-Nuttall qui relie la vie moyenne ou la constante radioactive des noyaux radioactifs à l'énergie de la particule alpha émise. La relation théorique obtenue ne contient pratiquement en dehors des constantes fondamentales caractérisant le noyau émetteur et la particule alpha qu'une seule grandeur dépendant dans une certaine mesure des hypothèses éventuelles sur la constitution des noyaux émetteurs. Cette grandeur est le rayon du noyau radioactif. Et l'on sait que le grand succès de la déduction théorique de la loi empirique indiquée réside en ce que, abstraction faite du rayon nucléaire, elle est indépendante dans une très large mesure des hypothèses que l'on pourrait faire sur la structure nucléaire. L'hypothèse relative à la barrière de potentiel entourant chaque noyau radioactif est supportée essentiellement par le champ électrostatique dû à la charge nucléaire. Comme la théorie de la désintégration ne contient qu'une seule grandeur importante caractérisant le noyau, on pouvait penser qu'une tentative en vue de préciser d'avantage cette grandeur ne serait pas dépourvue d'intérêt, l'essai de généralisation devant être toujours conditionné par le maintien de son indépendance des hypothèses particulières sur la constitution nucléaire.

Il existe effectivement un point relatif au rayon nucléaire où la théorie originale peut être généralisée. On ne doit pas perdre de vue dans la théorie de désintégration proposée que l'existence de la particule alpha est admise ici tout au moins au voisinage du bord du noyau et c'est un noyau d'hélium qui tombe sur la paroi nucléaire de la barrière de potentiel. Or la particule alpha est un système complexe et l'existence d'une extension spatiale finie pour cette particule ne correspond à aucune hypothèse nouvelle. Elle est admise implicitement dans la théorie lorsqu'on y attribue un rayon fini aux noyaux atomiques radio-

actifs. Et si actuellement divers arguments sont en faveur de ce que le volume de la particule alpha est faible devant celui des noyaux radioactifs, il apparaît, par contre, que le rayon de cette particule, dans l'hypothèse d'une forme approximativement sphérique des noyaux, est loin d'être petit devant les rayons des noyaux atomiques radioactifs. Il en résulte qu'un essai de généralisation de la théorie actuelle, la théorie ponctuelle, eu vue d'y tenir compte du rayon fini de la particule alpha n'est pas dépourvu d'intérêt ^(*). On devra s'attendre à ce que cette généralisation conduise à une formule de vie moyenne des noyaux radioactifs qui contient une certaine combinaison du rayon de ces noyaux et de celui de la particule alpha. Les autres constantes fondamentales devraient figurer dans la nouvelle formule pratiquement de la même manière que dans l'ancienne et cette dernière doit résulter de la première à la limite où le rayon de la particule alpha disparaît.

Si l'argument en faveur de la généralisation indiquée est très précis, le traitement direct du problème comme dans le cas de la théorie ponctuelle est loin d'être immédiat. Il est clair, en effet, que la mécanique des quanta est une mécanique de points et son application à notre problème nécessiterait de considérer la particule alpha comme un système de corpuscules sans dimensions, ce qui permettrait éventuellement d'éviter l'introduction explicite d'un rayon fini de la particule. Or, un tel procédé est à exclure puisque notre généralisation doit tenir compte d'une condition importante, indiquée plus haut, consistant à éviter l'introduction de toutes hypothèses nouvelles sur la structure nucléaire aussi bien en ce qui concerne la particule alpha émise que le noyau radioactif émetteur. On est ainsi conduit à regarder la particule alpha comme un corpuscule sphérique rigide de rayon fini. On sait cependant que l'étude du mouvement de tels corpuscules est étrangère à la mécanique des quanta qui est une mécanique de points. Si une quantification de la

⁽¹⁾ G. GAMOW : *Z. Physik*, 1928, **51**, 204. — R. W. GURNEY et E. U. CONDON : *Nature*, 1928, **122**, 439 et *Phys. Rev.*, 1929, **33**, 127.

^(*) Que les rayons nucléaires obtenus à l'aide de la théorie ponctuelle étaient incertains du rayon de la particule alpha était noté par G. BECK : Cf. *Handbuch der Radiologie*, vol. 6, 2^e édition, 1^{re} partie, p. 426, Leipzig, 1933.

mécanique des corps rigides ne semble pas présenter, apparemment, des difficultés particulières, on conçoit qu'une justification physique rigoureuse de cette quantification ne soit guère possible pour la raison évidente que la notion de corps rigide est incompatible dans une très large mesure avec les principes de la théorie des quanta. Néanmoins, la quantification de la mécanique des corps rigides peut conduire à des théories de modèle qui peuvent rendre des services appréciables. Elle pourrait s'effectuer après la décomposition du mouvement général d'un corps rigide conformément au théorème de mécanique classique sur cette décomposition. On sait que la quantification du mouvement de rotation a conduit aux modèles de rotateur et l'on connaît les services rendus par ces modèles dans la théorie de la structure des molécules ⁽¹⁾. La quantification du mouvement de translation ne paraît pas avoir été étudiée en détail.

Il résulte donc de ce qui précède que, contrairement à la théorie ponctuelle de la désintégration radioactive alpha, notre généralisation nécessite un traitement approché ou traitement de modèle vu que l'on regarde ici la particule alpha non pas comme un système de corpuscules élémentaires sans dimensions mais comme une particule rigide d'une extension spatiale finie. Il est à présumer cependant que les résultats fournis par cette méthode approchée n'ont pas plus de défauts que ceux fournis par d'autres théories de modèles. Le schéma de la méthode de traitement adoptée dans le présent travail est le suivant : la particule rigide de dimensions finies est décrite dans son mouvement de translation comme un point matériel sans dimensions ayant mêmes masse et charge que le corpuscule réel, ce point matériel correspondrait au centre de gravité classique du corpuscule, et l'on tient compte de l'extension spatiale finie du corpuscule par une condition supplémentaire dite « condition de dimension ». La méthode sera discutée plus loin en connexion avec notre problème particulier. Elle offre également la possibilité d'une généralisation de la théorie de la diffraction au cas des corpuscules de dimensions finies ce qui présente, en dehors d'un intérêt théorique, un intérêt pratique en liaison avec une étude approfondie de la diffraction des atomes ou molécules.

§ 2. — Comme notre traitement suit de près celui de la théorie ponctuelle, il convient de résumer le traitement adopté dans cette théorie ⁽²⁾. On se bornera au cas des particules s ; le cas des particules ayant un moment cinétique orbital non nul ne présente aucune difficulté particulière. Dans ce cas, la fonction propre de la particule ne dépendra que de la variable radiale r . Si l'on désigne par $r^{-1} \varphi(r)$ cette fonction propre, alors $\varphi(r)$ doit satisfaire à l'équation

⁽¹⁾ Pour la discussion de la quantification du mouvement de rotation d'un corps rigide, cf. H. B. G. CASIMIR, *Dissertation*, Leyde, 1931.

⁽²⁾ Nous suivons ici un exposé dû à Fermi. Cf. F. RASSETTI, *I nucleo atomico*, Zanichelli, Bologne, 1936.

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V(r)) \varphi = 0 \quad (1)$$

dans la notation usuelle. L'énergie potentielle est définie par

$$\begin{cases} V(r) = -U = c^{10} & \text{pour } r < \rho \\ V(r) = 2Ze^2/r & \text{— } r > \rho \end{cases} \quad (2)$$

$(Z + 2)e$ est la charge du noyau initial, Ze celle du noyau produit dans la désintégration, et ρ désigne le rayon de ce dernier noyau. L'énergie $-U$ schématise grossièrement l'influence du reste du noyau initial sur la particule alpha. Si l'on désigne par b la distance d'approche minimum classique de la particule alpha au noyau produit définie par $2Ze^2/(E - V(\infty))$, le dénominateur étant l'énergie cinétique de la particule alpha à une distance infiniment grande de ce noyau, il est clair alors que $\varphi(r)$ est oscillatoire pour $r < \rho$, et aussi pour $r > b$. À l'intérieur de la barrière de potentiel, pour $\rho < r < b$, $\varphi(r)$ admet la forme suivante :

$$u(r) \exp Kr + v(r) \exp -Kr \quad (3)$$

où u et v désignent deux fonctions qui varient lentement comparées aux exponentiels et K est la racine de la valeur moyenne du coefficient de $\varphi(r)$ en (1), en valeur absolue.

En général, ni u ni v ne sont nuls et ce n'est que pour des valeurs particulières de l'énergie, énergie des niveaux quantiques virtuels, que $\varphi(r)$ est très petit à l'extérieur du noyau. Soit E_0 une telle valeur de l'énergie; on peut montrer, comme on le verra plus loin, que l'amplitude Ω de l'onde loin du noyau, et pour une énergie $(E_0 + \varepsilon)$ très voisine de E_0 , peut se mettre sous la forme

$$\Omega^2 = A^2 + B^2 \varepsilon^2 \quad (4)$$

où A et B sont deux quantités extrêmement petites et grandes respectivement. On démontre ⁽²⁾ que si à un instant initial $t = 0$, la particule est dans le noyau, à un instant t ultérieur la probabilité de la trouver à l'intérieur du noyau est, avec

$$\begin{aligned} \varphi(r, t) &= (4\pi^2 m \rho / h^2 E_0)^{1/2} \frac{\varphi_0(r)}{AB} \\ &\exp - \frac{2\pi i}{h} E_0 t \exp - \frac{2\pi A}{h} t \quad (5) \end{aligned}$$

la fonction d'onde complète de la particule normalisée à l'unité à l'intérieur du noyau et associée au niveau stationnaire virtuel d'énergie E_0 , $\varphi_0(r)$ étant la fonction propre stationnaire sinusoïdale d'amplitude unité,

$$\int |\varphi_0(r)|^2 dr = \frac{2\pi^2 m \rho^2}{h^2 E_0 A^2 B^2} \exp - \frac{4\pi A}{h} t \quad (6)$$

tenant compte de ce que

$$\int |\varphi_0(r)|^2 dr = \int_0^\infty \sin^2(r\sqrt{\alpha}) dr \sim \rho/2. \quad (6a)$$

On en tire la seule grandeur expérimentalement accessible la vie moyenne τ , ou la constante radio-

active λ , l'inverse $1/\tau$, du noyau radioactif considéré dans l'état virtuel E_0 ,

$$\tau = 1/\lambda = \frac{h}{4\pi A}. \quad (7)$$

Le problème se trouve ramené maintenant au calcul de A et B . Pour cela, on utilise les solutions de (4) dans les diverses régions de r . A l'intérieur de la barrière de potentiel, on se sert de la solution approchée de Brillouin-Wentzel-Kramers; on trouve ici

$$\varphi_\beta(r) = [\beta(r)]^{-1/4} \left(a \exp \int_\rho^r dr \sqrt{\beta(r)} + b \exp - \int_\rho^r dr \sqrt{\beta(r)} \right) \quad (8)$$

a et b pouvant être regardés comme des constantes et

$$\beta(r) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(\frac{2Ze^2}{r} - E \right) > 0. \quad (8a)$$

Pour $r > b$, on prend la solution oscillante suivante

$$\varphi_\gamma(r) = \Omega \sin \left(\int_b^r dr \sqrt{\gamma(r)} + \eta \right) \quad (9)$$

$$\gamma(r) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E - \frac{2Ze^2}{r} \right) > 0. \quad (9a)$$

A l'intérieur du noyau, on prend

$$\varphi_\alpha(r) = \sin r \sqrt{\alpha}; \quad \alpha = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E + U). \quad (10)$$

Pour la détermination de a et b on dispose des deux points de raccord $r = \rho$ et $r = b$ entre les solutions dans les trois intervalles indiqués. D'après les formules de jonction de Kramers, la solution $\varphi_\beta(r)$ se raccorde pour $r > b$ à

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(r) = & [\gamma(r)]^{-1/4} \left[2a \left(\exp \int_\rho^b dr \sqrt{\beta(r)} \right) \cos \int_b^r dr \sqrt{\gamma(r)} \right. \\ & \left. + b \left(\exp - \int_\rho^b dr \sqrt{\beta(r)} \right) \sin \int_b^r dr \sqrt{\gamma(r)} \right] \quad (11) \end{aligned}$$

ce qui donne, après identification avec $\varphi_\gamma(r)$ donné par (9)

$$\begin{aligned} \Omega^2 = & [\gamma(r)]^{-1/2} \left(4a^2 \exp 2 \int_\rho^b dr \sqrt{\beta(r)} \right. \\ & \left. + b^2 \exp - 2 \int_\rho^b dr \sqrt{\beta(r)} \right) \quad (12) \end{aligned}$$

Pour raccorder les solutions au point $r = \rho$ on utilise une propriété hypothétique importante admise dans la théorie ponctuelle et en vertu de laquelle le passage du potentiel de Coulomb au potentiel nucléaire se fait dans un intervalle très petit comparé à la longueur d'onde de de Broglie de la particule. Ceci permet de raccorder φ_α et φ_β en exigeant la continuité de ces fonctions et de leur dérivée au point $r = \rho$ et de calculer a et b . On trouve ainsi, avec (8) et (10) :

$$\begin{aligned} a & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ [\beta(\rho)]^{1/4} \sin \rho \sqrt{\alpha} \pm [\beta(\rho)]^{-1/4} \sqrt{\alpha} \cos \rho \sqrt{\alpha} \right\} \end{aligned} \right. \quad (13) \\ b & \end{aligned}$$

Maintenant, pour que l'amplitude Ω de l'onde à l'extérieur du noyau soit très petite, pour un niveau virtuel E_0 , il faut que a s'annule. Alors, au voisinage d'un tel niveau, entre $(E_0 + \varepsilon)$ et $(E_0 + \varepsilon + d\varepsilon)$, on peut poser

$$a(E_0) = \left(\frac{da}{dE} \right)_{E=E_0} \cdot \varepsilon; \quad b = b(E_0) \quad (14)$$

ce qui justifie, d'après (12), la forme (4) prévue pour Ω . Il y a lieu de simplifier (13) pour donner à A et B une forme plus ramassée. On fait alors l'hypothèse que l'énergie cinétique de la particule à l'intérieur du noyau est plus petite qu'au voisinage de l'entrée de la barrière de potentiel, pour $r \sim \rho$; on admet donc que $\alpha \ll \beta(\rho)$. Il en résulte, annulant a , que l'argument $\rho \sqrt{\alpha}$ est très voisin d'un multiple entier de π . Il suffit alors de retenir en b le terme en cosinus, et de dériver en a le terme en sinus; on négligera la variation avec E du coefficient du terme oscillant devant la variation de ce terme. On trouve alors, identifiant (12) à (4) et tenant compte de (14),

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \alpha^{1/2} [\beta(\rho)]^{-1/4} \exp - \int_\rho^b dr \sqrt{\beta(r)} \\ B &= \frac{4\pi^2 m \rho}{h^2} \cdot \alpha^{-1/2} [\beta(\rho)]^{1/4} \gamma^{-1/4} \exp \int_\rho^b dr \sqrt{\beta(r)} \end{aligned} \quad (15)$$

et finalement avec (7), on obtient l'expression définitive suivante de la vie moyenne

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2\pi m \rho}{\alpha h} [\beta(\rho)]^{1/2} \exp 2 \int_\rho^b dr \sqrt{\beta(r)} \\ &= \frac{m \rho v}{2 E_i} \lg \varphi_0 \exp \frac{8\pi Ze^2}{hv} (2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0) \quad (16) \end{aligned}$$

avec

$$\cos^2 \varphi_0 = \rho/b; \quad b = \frac{2Ze^2}{E} = \frac{4Ze^2}{mv^2}; \quad E_i = (h^2/8\pi^2 m) \alpha \quad (16a)$$

v est la vitesse de la particule émise.

§ 3. — Comme nous l'avons indiqué plus haut, notre méthode suit de près celle de la théorie ponctuelle et l'on ne tient compte de la dimension finie de la particule alpha, en première approximation, qu'à l'aide d'une condition supplémentaire. Cette condition complémentaire est en quelque sorte une condition équivalent à exiger le passage de la description du mouvement du point représentatif fictif à la description du mouvement du corpuscule réel. Il est clair, en effet, que l'interprétation bien connue de la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$ de notre point représentatif en vertu de laquelle $|\psi(\vec{r})|^2 d\tau$ désigne la probabilité de présence dans un volume élémentaire $d\tau$ autour du sommet du vecteur $\vec{r}$ n'a aucun sens physique précis ici puisque notre point représentatif n'est pas observable. Ce que nous pouvons observer,

en vertu du modèle admis pour notre corpuscule, qui est une petite sphère de rayon fini, c'est qu'une portion de l'espace, autour d'un certain point, ayant même volume que notre corpuscule est occupé ou ne l'est pas et la généralisation de l'interprétation habituelle de la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$ pour tenir compte du volume fini du corpuscule dont elle décrit approximativement le mouvement, apparaît dans la relation

$$P(\vec{r}) = \int_V |\Psi(\vec{r})|^2 d\tau \quad (1)$$

qui exprime la probabilité de trouver le point représentatif à l'intérieur d'un volume égal à celui du corpuscule autour du sommet du vecteur $\vec{r}$. En d'autres termes nous essayons d'approcher la probabilité de présence du corpuscule réel de volume fini V , autour d'un point donné, par la probabilité de présence du point représentatif sans dimensions à l'intérieur d'un volume V autour du point considéré. Notre condition supplémentaire, la condition de dimension, se trouve précisée ainsi en connexion avec la probabilité de présence. Et le traitement approché adopté ici pour la description du mouvement des corpuscules rigides de dimensions finies dans les cadres de la mécanique des quanta correspond à utiliser la mécanique des quanta applicable aux points sans dimensions et de remplacer les expressions physiques finies et différentielles de cette théorie ponctuelle relatives à l'espace à une ou plusieurs dimensions par des expressions de moyenne ou intégrales étendues sur le volume ou à des dimensions linéaires de ces corpuscules.

Si nous appliquons maintenant ce procédé au problème de la désintégration il est d'abord clair, que la relation (6) donnant la probabilité de trouver la particule dans le noyau reste inchangée à condition de confondre ici le rayon ρ du noyau comme représentant, en quelque sorte, la position extrême du centre de la particule au bord du noyau. Le problème principal est ici aussi la détermination des constantes A et B qui fixent la vie moyenne nucléaire conformément à (7). En ce qui concerne la forme de l'onde à l'extérieur du noyau on peut la prendre sinusoïdale ici aussi au même degré d'approximation que dans la théorie ponctuelle et l'amplitude Ω pourra être représentée ici aussi comme dans la théorie ponctuelle à l'aide d'une relation analogue à (5).

Nous devons revenir maintenant à l'équation d'onde du corpuscule. Dans la théorie ponctuelle l'énergie potentielle est donnée par les relations (2). On admet ici implicitement, sans trop préciser, le passage brusque du potentiel de Coulomb au potentiel nucléaire approché caractérisé par l'énergie constante U . Indépendamment de la difficulté provenant des relations d'incertitude concernant la précision admise ici pour le rayon nucléaire ρ , notre méthode approchée adoptée dans ce travail exclut la possibilité du passage ponctuel d'une région d'énergie potentielle à l'autre. D'après cette

méthode une extension de cette région, ou couche de passage, doit être étendue sur une longueur de l'ordre de la dimension linéaire du corpuscule. En d'autres termes, les relations (2) se généralisent ici de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} V(r) &= -U = C^{te} & \text{pour } r < \rho + \rho_0 \\ V(r) &= \frac{2Z\rho^2}{r} & \text{— } r > \rho + \rho_0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ρ_0 désigne ici le rayon fini de la particule alpha. On se rend compte aisément de ce que (17) généralise les relations (2) conformément à notre condition de dimension. Avec (1) et (17) la fonction d'onde du point représentatif $r^{-1}\Phi(r)$ prendra les formes suivantes dans les diverses régions de potentiel :

$$\Phi_{\beta}(r) = [\beta(r)]^{-1/4} \left(a \exp \int_{\rho-\rho_0}^r dr \sqrt{\beta(r)} + b \exp - \int_{\rho-\rho_0}^r dr \sqrt{\beta(r)} \right) \quad (18)$$

$\beta(r)$ est défini par (8a). Pour $r > b$ on aura l'onde sinusoïdale :

$$\Phi_{\gamma}(r) = \Omega \sin \left(\int_b^r dr \sqrt{\gamma(r)} + \eta \right) \quad (19)$$

avec $\gamma(r)$ donné par (9a) et, pour $r < \rho + \rho_0$,

$$\Phi_{\alpha}(r) = \sin r \sqrt{\alpha}; \quad \alpha = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E + U); \quad (20)$$

comme dans la théorie ponctuelle. Si les relations (17) définissent la couche de passage noyau-barrière de potentiel, nous n'avons encore rien dit au sujet du point, ou région, où le corpuscule quitte la barrière de potentiel. On se rend compte ici sans peine que la condition de dimension ne joue pratiquement aucun rôle, vu que, d'une part, il n'y a aucun changement d'allure de potentiel et, d'autre part, dans cette région, la variation de l'énergie potentielle le long d'une distance de l'ordre du rayon ou diamètre du corpuscule est faible, comparée à la valeur de cette énergie potentielle; on est ici, en effet, au point b , à la distance d'approche minimum classique de la particule. Le fait important à propos de (17) est que ρ_0 n'est pas très petit devant ρ ; par contre, à la sortie de la barrière de potentiel et pour toute énergie de désintégration alpha naturelle, la distance b est beaucoup plus grande que le rayon nucléaire ρ et, à fortiori, le rayon ρ_0 de la particule alpha, de sorte qu'ici les formules de transition de Kramers utilisées dans la théorie ponctuelle restent applicables sans changements. Avec ces relations de passage, on obtient, tenant compte de (18),

$$\Phi_{\gamma}(r) = [\gamma(r)]^{-1/4} \left\{ 2a \left[\exp \int_{\rho-\rho_0}^b dr \sqrt{\beta(r)} \right] \cos \int_b^r dr \sqrt{\gamma(r)} + b \left[\exp - \int_{\rho-\rho_0}^b dr \sqrt{\beta(r)} \right] \sin \int_b^r dr \sqrt{\gamma(r)} \right\} \quad (21)$$

Identifiant maintenant (20) avec l'onde sinusoïdale (19) on trouve

$$\Omega^2 = [\gamma(r)]^{-1/2} \left[4a^2 \exp 2 \int_{\varphi-\varphi_0}^b dr \sqrt{\beta(r)} + b^2 \exp - 2 \int_{\varphi-\varphi_0}^b dr \sqrt{\beta(r)} \right] \quad (22)$$

relation semblable à celle trouvée dans la théorie ponctuelle. Pour raccorder les solutions dans la couche de passage, la condition de dimension indique la généralisation suivante des conditions de continuité ponctuelles :

$$\frac{1}{2\rho_0} \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \Phi_\alpha(r) dr = \frac{1}{2\rho_0} \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \Phi_\beta(r) dr \quad (II)$$

$$\frac{1}{2\rho_0} \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \Phi'_\alpha(r) dr = \frac{1}{2\rho_0} \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \Phi'_\beta(r) dr \quad (III)$$

les Φ' étant les dérivées $d\Phi/dr$. Il est clair que ces conditions de continuité en moyenne ou conditions intégrales se réduisent aux conditions de continuité de la théorie ponctuelle à la limite $\rho_0 \rightarrow 0$; elles se présentent comme des généralisations plausibles de ces dernières conformément à la méthode approchée discutée plus haut.

Le premier membre de (II) donne avec (19)

$$\sin \rho \sqrt{\alpha} \cdot \sin \varphi_0 \sqrt{\alpha} / \rho_0 \sqrt{\alpha}.$$

Le second membre sera, avec (18),

$$\frac{1}{2\rho_0} \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \Phi_\beta(r) dr = \frac{1}{2\rho_0} \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} dr [\beta(r)]^{-1/4} \left\{ a \exp \int_{\varphi-\varphi_0}^r dr \sqrt{\beta(r)} + b \exp - \int_{\varphi-\varphi_0}^r dr \sqrt{\beta(r)} \right\} \sim [\beta(\varphi)]^{-1/4} (aU + bV) \quad (23)$$

avec

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2\rho_0} \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} dr \left[\exp \pm \int_{\varphi-\varphi_0}^r dr \sqrt{\beta(r)} \right] \quad (23a)$$

négligeant la variation de $[\beta(r)]^{-1/4}$ devant la variation des exponentiels en (23), ce qui se justifie facilement. Pour calculer U et V rappelons que

$$\exp \pm \int_{\varphi-\varphi_0}^r dr \sqrt{\beta(r)} = \exp \pm \frac{4\pi Ze^2}{hv} (2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0) \cdot \exp \mp \frac{4\pi Ze^2}{hv} (2\varphi - \sin 2\varphi) \quad (23b)$$

tenant compte de ce que

$$\sqrt{\beta(r)} = \frac{2\pi mv}{h} \sqrt{\frac{b}{r} - 1}; \quad b = \frac{2Ze^2}{E}; \quad E = \frac{1}{2}mv^2; \quad (23c)$$

E étant l'énergie de la particule émise qui se confond avec son énergie cinétique; on a posé en (23 b),

$$\cos^2 \varphi_0 = (\rho - \rho_0)/b; \quad \cos^2 \varphi = r/b. \quad (23d)$$

On a maintenant

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2\rho_0} \left(\exp. \pm \frac{4\pi Ze^2}{hv} (2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0) \right)$$

$$\times \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \left[\exp \mp \frac{4\pi Ze^2}{hv} (2\varphi - \sin 2\varphi) \right] dr \quad (23e)$$

Développant maintenant $(2\varphi - \sin 2\varphi)$ suivant r/b , qui reste petit dans tout l'intervalle d'intégration, et retenant les deux premiers termes seulement, on obtient

$$\frac{U}{V} = A \cdot \left(\exp \mp \frac{4\pi^2 Ze^2}{hv} \right) \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \left(\exp \pm \frac{8\pi e}{h} m^{1/2} Z^{1/2} r^{1/2} \right) dr \quad (23f)$$

en désignant un instant par A le facteur constant devant l'intégrale en (23e). On trouve finalement tous calculs faits :

$$U = \frac{1}{k\rho_0} \left\{ (\sqrt{k(\varphi+\varphi_0)} - 1) [\exp \sqrt{k}(\sqrt{\varphi+\varphi_0} - \sqrt{\varphi-\varphi_0})] - (\sqrt{k(\varphi-\varphi_0)} - 1) \right\} \quad (23g)$$

$$V = \frac{1}{k\rho_0} \left\{ (\sqrt{k(\varphi-\varphi_0)} + 1) - (\sqrt{k(\varphi+\varphi_0)} + 1) \exp \sqrt{k}(\sqrt{\varphi-\varphi_0} - \sqrt{\varphi+\varphi_0}) \right\} \quad (23h)$$

avec

$$k^{1/2} = \frac{8\pi e}{h} Z^{1/2} m^{1/2}$$

et après avoir développé $(2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)$ suivant $\varphi - \varphi_0/b$ et gardé les deux premiers termes. Comme dans la pratique on a toujours $\sqrt{k(\varphi \pm \varphi_0)} \gg 1$ on peut écrire approximativement pour U et V

$$\frac{U}{V} = \frac{\sqrt{k(\varphi+\varphi_0)}}{k\rho_0} \exp \sqrt{k}(\sqrt{\varphi+\varphi_0} - \sqrt{\varphi-\varphi_0}) \left\{ \begin{array}{l} (23i) \\ V = \frac{\sqrt{k(\varphi-\varphi_0)}}{k\rho_0} \end{array} \right.$$

puisque aussi bien en U comme en V en (23g) et (23h), le premier terme à l'intérieur du crochet est beaucoup plus grand que le second. La deuxième relation de continuité (III) donne pour le premier membre $\sqrt{\alpha} \cos \varphi \sqrt{\alpha} \sin \varphi_0 \sqrt{\alpha}/\rho_0 \sqrt{\alpha}$ et, pour le second membre, il est préférable de passer par la dérivée $\Phi'_\beta(r)$ et de se contenter de l'égalité approchée,

$$\frac{1}{2\rho_0} \int_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \Phi'_\beta(r) dr \sim [\beta(\varphi)]^{1/4} (aU - bV) \quad (24)$$

en négligeant ici aussi la variation de $[\beta(r)]^{-1/4}$ devant la variation des exponentiels. On trouve ainsi les relations approchées suivantes pour a et b ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \rho \sqrt{\alpha} \cdot \sin \varphi_0 \sqrt{\alpha}/\rho_0 \sqrt{\alpha} = (aU + bV) [\beta(\varphi)]^{-1/4} \\ \sqrt{\alpha} \cos \varphi \sqrt{\alpha} \sin \varphi_0 \sqrt{\alpha}/\rho_0 \sqrt{\alpha} = (aU - bV) [\beta(\varphi)]^{1/4} \end{array} \right\} \quad (25)$$

donnant,

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2U} \left(\frac{\sin \rho_0 \sqrt{\alpha}}{\rho_0 \sqrt{\alpha}} \right) \left([\beta(\rho)]^{1/4} \sin \rho \sqrt{\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\alpha}}{[\beta(\rho)]^{1/4}} \cos \rho \sqrt{\alpha} \right) \\ b &= \frac{1}{2V} \left(\frac{\sin \rho_0 \sqrt{\alpha}}{\rho_0 \sqrt{\alpha}} \right) \left([\beta(\rho)]^{1/4} \sin \rho \sqrt{\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\alpha}}{[\beta(\rho)]^{1/4}} \cos \rho \sqrt{\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Au voisinage d'un niveau virtuel d'énergie E_0 , par exemple, entre $(E_0 + \varepsilon)$ et $(E_0 + \varepsilon + d\varepsilon)$, ε étant très petit, on pourra écrire ici aussi, comme dans la théorie ponctuelle,

$$a(E_0) = \left(\frac{da}{dE} \right)_{E=E_0} \cdot \varepsilon; \quad b = b(E_0) \quad (14)$$

ce qui redonne ici aussi la forme (4) prévue pour l'amplitude Ω de l'onde à l'extérieur du noyau. Avant de calculer les constantes A et B entrant dans l'expression de la vie moyenne, une simplification de (26) s'impose. Il est visible sur a que dans cette théorie généralisée aussi au voisinage des niveaux virtuels, l'argument $\rho \sqrt{\alpha}$ est voisin d'un multiple entier de π , à condition d'admettre ici aussi que $\alpha \ll \beta(\rho)$, comme dans la théorie ponctuelle. Il est à noter que le facteur supplémentaire $(\sin \rho_0 \sqrt{\alpha} / \rho_0 \sqrt{\alpha})$ permet également d'annuler a , mais b s'annule alors aussi, ce qui est à exclure vu que la fonction $\Phi_\beta(r)$ ou encore l'onde extérieure, si elles sont très faibles pour un niveau d'énergie virtuel quantique, néanmoins elles ne peuvent être rigoureusement nulles. Nous croyons donc que le facteur supplémentaire ne doit pas s'annuler, ce qui fournit la condition $\rho_0 \sqrt{\alpha} < \pi$ et comme $\sqrt{\alpha}$ n'est autre chose, d'après (20), que $2\pi/\lambda_i$, λ_i désignant la longueur d'onde hypothétique de la particule alpha à l'intérieur du noyau, cette condition fixe une limite supérieure au rayon ρ_0 de la particule alpha; on doit avoir $\rho_0 < \lambda_i/2$. Il est clair que l'on ne doit pas attacher une grande importance à cette condition, vu qu'elle relève de diverses hypothèses touchant de près la constitution des noyaux radioactifs; néanmoins, on vérifie qu'elle fournit un rayon de la particule alpha en accord avec les estimations actuelles conformément aux hypothèses courantes sur la valeur éventuelle de la longueur d'onde λ_i .

On trouve maintenant avec (14) et (22) comme dans la théorie ponctuelle, tenant compte de (4),

$$A^2 = \frac{1}{4V^2} \left(\frac{\sin \rho_0 \sqrt{\alpha}}{\rho_0 \sqrt{\alpha}} \right)^2 \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\beta(\rho)} \cdot \gamma} \cdot \exp -2 \int_{\rho-\rho_0}^b dr \sqrt{\beta(r)} \quad (27)$$

Dans la dérivation de a par rapport à E , contenu en α et β il est justifié de regarder le facteur $\sin \rho_0 \sqrt{\alpha} / \rho_0 \sqrt{\alpha}$ ainsi que $\beta(\rho)$, comme variant lentement comparé à $\sin \rho \sqrt{\alpha}$. On trouve alors, tous calculs faits,

$$B^2 = \frac{16\pi^4 m^2 \rho^2}{h^4 U^2} \cdot \left(\frac{\sin \rho_0 \sqrt{\alpha}}{\rho_0 \sqrt{\alpha}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{\beta(\rho)}}{\alpha \sqrt{\gamma}} \exp 2 \int_{\rho-\rho_0}^b dr \sqrt{\beta(r)} \quad (27a)$$

Connaissant A et B on trouve avec (7), tenant compte de (23 i),

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2\pi m \rho}{h \alpha} \cdot \sqrt{\beta(\rho)} \cdot \left(\frac{V}{U} \right) \cdot \exp 2 \int_{\rho-\rho_0}^b dr \sqrt{\beta(r)} \\ &= \frac{m \rho v}{2E_i} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0} \right)^{1/2} \cdot \lg \varphi_0 \cdot \exp \frac{8\pi Ze^2}{hv} (2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0) \\ &\quad \times \exp \frac{8\pi e}{h} Z^{1/2} m^{1/2} (\sqrt{\rho - \rho_0} - \sqrt{\rho + \rho_0}) \end{aligned} \quad (28)$$

avec $\cos^2 \varphi_0 = \rho - \rho_0/b$; $b = 2Ze^2/E$

et E_i désigne l'énergie cinétique hypothétique de la particule alpha à l'intérieur du noyau, E la même grandeur à l'extérieur du noyau. Si l'on développe ici aussi $(2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)$ suivant $\rho - \rho_0/b$, on trouve finalement, gardant les deux premiers termes de ce développement,

$$\tau = \frac{m \rho v}{2E_i} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0} \right)^{1/2} \cdot \lg \varphi_0 \cdot \exp \left\{ \frac{8\pi^2 Ze^2}{hv} - \frac{8\pi e Z^{1/2} m^{1/2}}{h} (\sqrt{\rho + \rho_0} + \sqrt{\rho - \rho_0}) \right\} \quad (29)$$

On voit donc comparant (29) à (16) qu'à part la signification légèrement différente de ρ et φ_0 dans ces deux formules la relation obtenue pour la vie moyenne nucléaire radioactive, tenant compte du rayon fini de la particule alpha ne diffère que peu de celle fournie par la théorie ponctuelle. Si l'on désigne par r_0 le rayon nucléaire des atomes radioactifs obtenu par Gamow (*) à partir de (16) et les données expérimentales sur la vie moyenne, ou constante radioactive, et sur l'énergie des particules émises, on voit que ce procédé donnerait ici, posant conformément à (16)

$$\sqrt{\rho + \rho_0} + \sqrt{\rho - \rho_0} = 2\sqrt{r_0} \quad (30)$$

$$\rho = r_0 + \rho_0^2/4r_0 \quad (30a)$$

et, par conséquent, les rayons nucléaires que l'on peut tirer de (29) par la méthode de Gamow ne sont que peu supérieurs aux rayons nucléaires de la théorie ponctuelle, si l'on fait l'hypothèse plausible que le rayon ρ_0 de la particule n'est pas une fraction très élevée du rayon nucléaire des corps radioactifs. On vérifie sur (29) qu'il se réduit à la forme ponctuelle (16) de la vie moyenne à la limite $\rho_0 \rightarrow 0$, tenant compte du développement légitime de l'exposant de l'exponentiel suivant le petit nombre ρ/b . Ces conclusions restent inchangées lorsque au lieu de considérer des particules alpha s , on considère des particules alpha de moment cinétique non nul; le passage au cas de ces particules se fait de la même manière que dans la théorie ponctuelle.

(*) Cf. Constitution of atomic nuclei, Oxford, 1931.