Sur une théorie unitaire non holonome des champs physiques

G. Vranceanu

SUR UNE THÉORIE UNITAIRE NON HOLONOME DES CHAMPS PHYSIQUES [1]

Par G. VRANCEANU.

Professeur à l'Université de Cernauti.

Sommaire. — On fait voir comment on peut construire une théorie unitaire des champs, gravitationnel et électromagnétique, en partant d'une hypersurface non holonome V_5^4, totalement géodésique. Cela revient à supposer que l'espace physique a localement quatre dimensions, comme l'espace de la théorie de la relativité, mais qu'en partant d'un point P, on ne peut revenir par un circuit infinitésimal, qu'en un point P′, où la direction PP′ est normale à l'espace local en P, le segment PP′ définissant ainsi la torsion de l'espace. A l'aide du tenseur du courbure des espaces locaux et du tenseur de torsion considéré comme tenseur électromagnétique, on écrit les équations d'Einstein et de Maxwell et l'on prend les équations des géodésiques de V_5^4, comme équations d'une particule chargée d'électricité, les trajectoires de la lumière étant en particulier des géodésiques auto-parallèles et de longueur nulle.

M. Einstein a donné dans sa célèbre théorie de la relativité généralisée, l'interprétation de la Gravitation comme une propriété caractéristique de l'espace physique, considéré comme un espace de Riemann à quatre dimensions, ayant comme métrique une forme quadratique indéfinie

$$\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

où x^1, x^2, x^3 sont à traiter comme coordonnées spatiales et x^4 comme coordonnée temporelle; depuis on a cherché à trouver une interprétation analogue pour les phénomènes électromagnétiques ou bien *une théorie unitaire,* qui soit capable de faire sortir, d'un même principe géométrique, les équations gravitationnelles d'Einstein et les équations de l'électromagnétisme de Maxwell.

C'est ainsi que M. Weyl [2], en partant de l'observation que le champ électromagnétique peut être défini dans l'espace temps V_4, en absence du magnétisme vrai, par le rotationnel

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \tag{1'}$$

d'un vecteur covariant $\varphi_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$, a proposé de considérer l'espace-temps V_4 comme un espace dont l'unité de mesure de la métrique, en passant d'un point à l'autre, possède un coefficient de dilatation donné par la forme de Pfaff

$$\mathrm{d}\varphi = \varphi_i\,\mathrm{d}x^i \tag{1''}$$

qu'on peut construire avec le vecteur d'univers potentiel électromagnétique.

Une autre théorie unitaire a été proposée par M. Kaluza [3], en considérant le continu physique comme un espace de Riemann V_5 à cinq dimensions, dont la métrique s'écrit :

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}s^2 + 2\,\varphi_i\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^5 + a_{55}\,(\mathrm{d}x^5)^2, \tag{2}$$

où $\mathrm{d}s^2$ est donné par la métrique (1) de l'espace-temps V_4 de la théorie de la relativité. On voit que dans la théorie de Kaluza, la métrique de l'espace V_5 est définie si l'on se donne la métrique de l'espace temps V_4, le vecteur quadridimensionnel potentiel électromagnétique φ_i et le coefficient a_{55}.

Cette hypothèse que le monde physique est à cinq dimensions, quoiqu'il nous apparaisse comme en ayant quatre et la difficulté d'avoir une interprétation naturelle du coefficient a_{55}, ont conduit MM. Einstein et Mayer à proposer une théorie unitaire [4], qui cherche à éviter ces inconvénients de la théorie de

[1] Cette théorie unitaire non holonome a fait l'objet d'une conférence *Les espaces non holonomes et leurs applications mécaniques*, à l'Institut H. Poincaré, le 3 juin 1935, invité par la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. Elle a été aussi résumée dans les Notes, *La théorie unitaire des champs et les hypersurfaces non holonomes*, Comptes rendus, 1935, **200**, p. 2056, et *Sur une théorie unitaire...*, C. R. Ac. Sc. Roumanie, tome I, 1936.

[2] Voir H. Weyl. *Raum, Zeit, Materie,* V Ed., Berlin, Springer, 1923, p. 121.

[3] Voir Th. Kaluza. *Zum Unitätsproblem der Physik*, *Sitzungsberichte der preuss. Ak. der Wiss.*, 1921, p. 966.

[4] Voir A. Einstein et W. Mayer. Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität, *Sitzungsberichte*, *Akademie*, Berlin, 1931, p. 541.

Kaluza, tout en conservant l'hypothèse principale de l'existence d'un espace métrique V_5, associé à l'espace temps V_4 de la théorie de la relativité, avec la différence que l'on suppose maintenant que l'espace V_5 est seulement un espace vectoriel, ce qui évite la considération directe du coefficient a_{55}. Quant à la méthode, qui joue un grand rôle dans cette théorie d'Einstein et Mayer, elle s'inspire beaucoup de la méthode des congruences (tétrapodes), considérée dans la théorie unitaire proposée quelque temps avant par Einstein et dont M. Levi-Civita (2) a donné une systématisation remarquable à l'aide de la notion de congruences pseudo-orthogonales de Ricci. Comme on sait, cette théorie unitaire de M. Einstein, dont nous avons aussi une profonde étude due à M. Cartan (3), consiste à considérer le monde physique comme un espace de Riemann à quatre dimensions doué aussi d'un parallélisme absolu, et c'est *la torsion* de ce parallélisme absolu qui doit mesurer le champ électromagnétique.

Dans cette nouvelle théorie unitaire MM. Einstein et Mayer supposent que le monde physique est à quatre dimensions, c'est l'espace temps V_4 de la théorie de la relativité, mais que cet espace se trouve plongé dans un espace métrique vectoriel V_5 à cinq dimensions. Cela est réalisé de manière que, en chaque point de V_4, nous avons aussi, en dehors des quatre directions indépendantes de ce V_4, qu'on peut appeler les directions intérieures ou tangentes, une direction extérieure ou normale à V_4. De plus, on suppose que nous avons une métrique non seulement pour les directions tangentes, qui est la métrique de V_4, mais aussi une métrique pour les directions non tangentes.

On peut dire aussi qu'on associe à l'espace temps V_4 un espace vectoriel V_5, de façon que l'espace linéaire tangent de V_4 soit défini en chaque point de V_4 par un hyperplan de V_5, *l'hyperplan remarquable*. De plus, on peut s'arranger de façon que les composantes g_{ab} ($a, b = 1, 2, \ldots, 5$) du tenseur métrique de ce V_5 vectoriel, soient données par les formules

$$g_{ij} = a_{ij}, \quad g_{i5} = 0, \quad g_{55} = 1 \; (i, j = 1, 2, 3, 4) \qquad (2')$$

où a_{ij} sont les composantes du tenseur métrique de V_4 [E. et M., formules (50), (51), (52)]. Cela dit, si l'on considère le transport parallèle de Levi-Civita des vecteurs de V_5 le long des chemins tangents à V_4, qui sont d'ailleurs les seuls chemins possibles dans cette théorie, et si l'on impose la condition *qu'un vecteur tangent à V_4, qui se déplace le long de sa propre direction, reste un vecteur tangent à V_4*, on trouve un tenseur symétrique gauche du second ordre F_{ij}, que MM. E. et M. considèrent comme tenseur générateur du champ électromagnétique.

Pour faire sortir, d'une manière naturelle, au moins du point de vue mathématique, cette association à l'espace temps V_4, de cet espace vectoriel V_5, MM. Veblen (1) Schouten (2), etc..., ont considéré aussi les propriétés projectives de l'espace temps V_4, en créant ainsi, en partant de cette théorie d'E. et M., une importante *théorie unitaire projective*.

Mais, tout en restant dans le domaine métrique, on peut remarquer que la métrique de l'espace V_5, peut s'écrire, tenant compte des formules (2'), sous la forme

$$d\sigma^2 = ds^2 + (ds^5)^2 \qquad (2'')$$

où ds^2 est la métrique de V_4 et ds^5 est une forme de Pfaff quelconque dans les variables x^1, x^2, x^3, x^4 et une nouvelle variable x^5. Cette nouvelle variable n'est déterminée, qu'abstraction faite d'une transformation

$$x^{5\prime} = f(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5), \qquad (2''')$$

ce qui nous sert à écrire la forme ds^5 sous la forme

$$ds^5 = dx^5 - \varphi_i \, dx^i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \qquad (3)$$

Cela étant, en supposant que φ_i ne dépende pas explicitement de x^5, on trouve que le tenseur électromagnétique F_{ij} est lié au rotationnel φ_{ij} du vecteur covariant φ_i, par la formule très simple suivante

$$\varphi_{ij} = 2 F_{ij} \qquad (3')$$

On voit ainsi que cette théorie unitaire d'Einstein et Mayer peut être liée à la forme de Pfaff (3) ou bien à l'équation de Pfaff

$$ds^5 = dx^5 - \varphi_i \, dx^i = 0, \qquad (3'')$$

qui représente d'ailleurs dans V_5, l'équation de l'hyperplan remarquable.

Ce fait m'a conduit à chercher une interprétation de cette théorie unitaire à l'aide de l'hypersurface non holonome V_5^4 définie dans V_5 par cette équation de Pfaff. On arrive ainsi à une interprétation, qui nous donne la possibilité de construire toute cette théorie unitaire, en partant seulement de deux invariants, la métrique (1) et la forme de Pfaff (3) : c'est-à-dire de la seule connaissance de deux champs, gravitationnel et électromagnétique. La géométrie de l'hypersurface non holonome qu'on considère, possède dans notre cas deux tenseurs fondamentaux : *un tenseur de courbure*, le tenseur de courbure de V_4 et *un tenseur de torsion* défini par le tenseur électromagnétique F_{ij}. C'est à l'aide de ces deux tenseurs qu'on forme les équations gravitationnelles et les équations de Maxwell.

Notre interprétation non holonome (3) revient à dire que le monde physique est localement à quatre dimen-

(1) Voir T. Levi-Civita. Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen, *idem*, 1929, p. 137.

(2) Voir E. Cartan. Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité, *Bull. de la Soc. Math. de France*, 1931, **59**, p. 88.

(1) Voir O. Veblen. *Projektive Relativitätstheorie*, Springer, Berlin, 1933.

(2) Voir J. A. Schouten. *La théorie projective de la relativité*, Annales de l'Institut H. Poincaré, volume V, 1935, p. 49.

(3) En ce qui concerne la théorie des espaces non holonomes on peut voir G. Vranceanu. Les espaces non holonomes et leurs applications mécaniques, *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fascicule 76, 1936.

sions, comme il est naturel, mais que la totalité de ces espaces locaux, ne peut pas être considérée, comme l'ensemble des espaces locaux tangents à un même espace V_4. Ces espaces locaux sont les espaces tangents à une hypersurface non holonome V_5^4, de même que les plans d'un complexe linéaire sont les plans tangents à une surface non holonome, l'équation aux différentielles totales du complexe linéaire n'étant pas complètement intégrable. D'ailleurs, on peut remarquer que l'utilisation des espaces non holonomes, comme support d'une théorie unitaire de notre monde physique, peut être considérée comme très naturelle, si l'on pense que les espaces non holonomes sont obtenus par l'interprétation géométrique des systèmes non holonomes de la Mécanique.

Nous avons divisé ce Mémoire en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous faisons voir comment on peut étudier sur la base de notion de groupe de transformation de formes de Pfaff, les espaces de Riemann dont la métrique n'est pas une forme définie positive, par une méthode analogue à celle des congruences orthogonales de Ricci et Levi-Civita pour les espaces à métrique définie positive. La notion de groupe de transformations de formes de Pfaff est d'ailleurs à la base de toutes nos considérations.

Dans le second chapitre, nous allons rappeler un certain nombre de propriétés des espaces non holonomes et dans le troisième chapitre nous allons donner l'interprétation géométrique non holonome de la théorie unitaire d'Einstein et Mayer, en indiquant aussi comment on pourrait éventuellement modifier ou généraliser cette théorie unitaire.

1. Groupes des V_n à métrique indéfinie. — Supposons que nous ayons un espace de Riemann V_n à n dimensions dont la métrique soit donnée par la formule

$$\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4)$$

où $x^1, x^2, \ldots, x^n$ sont des variables réelles et a_{ij} sont des fonctions réelles de ces variables à déterminant $|a_{ij}|$ différent de zéro. Si la forme quadratique (4) est une forme définie positive on peut la réduire à une somme de carrés

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}s^1)^2 + (\mathrm{d}s^2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}s^n)^2. \qquad (4')$$

Si cette forme quadratique n'est pas définie positive, elle peut se réduire à la forme canonique

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}s^1)^2 + (\mathrm{d}s^2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}s^p)^2 - (\mathrm{d}s^{p+1})^2 - (\mathrm{d}s^{p+2})^2 - \ldots - (\mathrm{d}s^n)^2, \qquad (4'')$$

c'est-à-dire à la somme de p carrés positifs et de $n-p$ carrés négatifs. Dans les deux cas les quantités $\mathrm{d}s^1, \ldots, \mathrm{d}s^n$ sont des formes de Pfaff dans les différentielles $\mathrm{d}x^i$ convenablement choisies (1)

$$\mathrm{d}s^a = \lambda^a_i\,\mathrm{d}x^i \qquad (a = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5)$$

où λ^a_i sont des fonctions des n variables $x^i, \ldots, x^n$ à déterminant $\Delta = |\lambda^a_i|$ différent de zéro. Les formules (5) peuvent être ainsi résolues par rapport aux différentielles $\mathrm{d}x^i$

$$\mathrm{d}x^i = \lambda^i_a\,\mathrm{d}s^a \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5')$$

où λ^i_a sont les réciproques du déterminant Δ.

Si l'on considère le système de n congruences de courbes, définies dans l'espace X_n des variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$ par les équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\lambda^1_a} = \frac{\mathrm{d}x^2}{\lambda^2_a} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x^n}{\lambda^n_a} \qquad (a = 1, 2, \ldots, n),$$

on dit que les quantités λ^i_a sont les paramètres et λ^a_i sont les moments de ces congruences. On voit ainsi que chaque système de n formes de Pfaff indépendantes (5) détermine un système de n congruences indépendantes (λ) et inversement.

On sait qu'on appelle congruences orthogonales d'un espace de Riemann à métrique définie positive, les congruences (λ) dont les paramètres satisfont aux conditions

$$a_{ij}\,\lambda^i_a\,\lambda^j_b = \delta_{ab}\begin{cases} = 0, & a \neq b \\ = 1, & a = b \end{cases} \qquad (6)$$

ce qui revient à supposer que les formes $\mathrm{d}s^a$, qui sont les différentielles des arcs de ces congruences, réduisent la métrique de V_n à la forme canonique (4'). En ce cas, nous avons aussi les formules suivantes entre les paramètres λ^i_a, les moments λ^a_i des congruences orthogonales (λ) et les coefficients a_{ij} de la métrique de V_n

$$a_{ij} = \lambda^a_i\,\lambda^a_j\,, \qquad \lambda^a_i = a_{ij}\,\lambda^j_a\,.$$

Si la métrique de notre espace V_n n'est pas définie positive, les paramètres des congruences dont les différentielles $\mathrm{d}s^a$ réduisent cette métrique à la forme canonique (4''), satisfont évidemment aux conditions

$$a_{ij}\,\lambda^i_a\,\lambda^j_b = \varepsilon_{ab} \qquad (6')$$

où ε_{ab} est égal à zéro si a est différent de b, ε_{hh} égal à 1 ($h \leq p$) et $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ égal à -1 ($\alpha > p$). En ce cas, les coefficients a_{ij} s'expriment en fonction des moments λ^a_i par les formules

(1) On fait la convention bien connue que deux indices répétés indiquent la somme par rapport à ces indices. De même l'on emploie pour les variables (x) les indices i, j et pour les congruences (λ) les indices $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, r$.

$$a_{ij} = \lambda_i^h \lambda_i^h - \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha \ (h = 1, 2, \ldots, p, \alpha = p+1, \ldots, n).$$

Quant aux formules qui nous donnent les moments en fonction des paramètres, en tenant compte des équations (5″), elles s'écrivent

$$\lambda_i^a = \varepsilon_{ab}\, a_{ij}\, \lambda_{hb}^j \ \left[\lambda_i^h = a_{ij}\lambda_h^j,\ \lambda_i^\alpha = -\, a_{ij}\,\lambda_\alpha^j\right]. \quad (6'')$$

Nous allons appeler ces congruences (λ), *qui satisfont aux conditions* (5″) et (6′), *congruences pseudo-orthogonales de l'espace V_n.*

Il est à remarquer qu'on peut aussi introduire avec Eisenhart ([1]) des congruences pseudo-orthogonales dans V_n d'une autre manière, en supposant seulement que les paramètres λ_a^i satisfont aux conditions (6′) et en déterminant les moments par les formules

$$\lambda_i'^a = a_{ij}\,\lambda_a^j\,.$$

Ces moments $\lambda_i'^a$ sont, comme on voit, différents de nos moments λ_i^a si $a > p$, car par les formules (6″) nous avons $\lambda_i'^\alpha = -\lambda_i^\alpha (\alpha > p)$. Ce sont ces congruences pseudo-orthogonales d'Eisenhart qui ont été considérées dans la systématisation que Levi-Civita a donnée à la première théorie unitaire d'Einstein ([2]).

Si l'on considère maintenant une transformation des n formes de Pfaff ds^a dans n autres formes de Pfaff $d\bar{s}^a$, cette transformation peut s'écrire sous la forme

$$d\bar{s}^a = c_b^a\, ds^b \quad (7)$$

où c_b^a sont des fonctions quelconques des variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$, à déterminant $|c_b^a|$ différent de zéro. La totalité de ces transformations linéaires forment un groupe (le groupe linéaire général) dans ce sens qu'il contient la transformation identique, que chaque transformation a une inverse et que le produit de deux transformations (7) est aussi une transformation (7).

Cela dit, si la métrique de l'espace V_n est définie positive, les transformations de formes de Pfaff, ou bien de congruences (7), conservent la forme canonique (4′) seulement si les coefficients c_b^a de ces transformations satisfont aux conditions d'orthogonalité.

$$c_b^a\ c_c^a = \delta_{bc} \quad (7')$$

Ces transformations forment, elles aussi, un groupe, sous groupe du groupe linéaire général, qui est le groupe orthogonal et l'on sait qu'on peut étudier les propriétés géometriques de l'espace V_n, comme propriétés de ce groupe orthogonal de transformations de congruences (7), (7′). En particulier, on sait que les composantes de la connexion affine de Levi-Civita de cet espace, sur les congruences orthogonales (λ) sont données par les coefficients de rotation γ_{bc}^a de ces congruences. Cela signifie que, si l'on indique par $u^1, u^2, \ldots, u^n$ les composantes d'un vecteur $\mathbf{u}$ contrevariant, sur les n congruences (λ), le transport parallèle de ce vecteur le long d'un déplacement infinitésimal ds^c est donné par les formules

$$du^a = \gamma_{bc}^a\, u^b\, ds^c. \quad (8)$$

On sait, d'après Weyl, que ce transport parallèle est caractérisé par la propriété de conserver la longueur du vecteur, ce qui nous dit que les coefficients γ_{bc}^a doivent être symétriques gauches dans les indices a, b et la propriété de fermer les parallélogrammes infinitésimaux. Cette dernière condition revient à dire que les composantes t_{bc}^a de la torsion de notre connexion, sont nulles

$$t_{bc}^a = \gamma_{bc}^a - \gamma_{cb}^a - w_{bc}^a = 0,$$

où w_{bc}^a sont les coefficients des covariants bilinéaires Δs^a des formes ds^a

$$\Delta s^a = \delta\, ds^a - d\,\delta s^a = w_{bc}^a\, ds^b\, \delta s^c,$$

$$w_a^{bc} = \left(\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^i}\right) \lambda_b^i\ \lambda_c^j\,. \quad (9)$$

On trouve ainsi que les coefficients de rotation γ_{bc}^a sont liés aux coefficients w_{bc}^a des covariants bilinéaires Δs^a, par les formules

$$\gamma_{bc}^a = \frac{w_{bc}^a + w_{ca}^b + w_{ba}^c}{2}, \quad w_{bc}^a = \gamma_{bc}^a - \gamma_{cb}^a \quad (9')$$

Si la métrique de l'espace V_n n'est pas définie positive, la totalité des transformations (7) qui conservent la forme canonique de cette métrique, forment elles aussi un groupe pseudo-orthogonal, défini par les équations

$$c_a^h\, c_b^h - c_a^\alpha\, c_b^\alpha = \varepsilon_{ab} \quad (10)$$

où les ε_{ab} sont définis plus haut. Ce groupe peut être considéré comme une généralisation du groupe de Lorentz, groupe bien connu dans la théorie de la relativité restreinte. Il peut se réduire, en introduisant des quantités imaginaires, à un groupe orthogonal de transformations de congruences et par conséquent on peut déduire les propriétés de ce groupe de celles du groupe

([1]) Voir L. P. Eisenhart. *Riemanian Geometry*, Princeton University Press, 1926, chap. III.

([2]) Voir T Levi-Civita. *Vereinfachte Herstellung...*, déjà citée, p. 144.

orthogonal, mais nous allons montrer *qu'on peut étudier directement les propriétés géométriques de ce groupe*, sans faire appel aux quantités imaginaires.

En effet, supposons que $u^1, u^2, \ldots, u^p, u^{p+1}, \ldots, u^n$ soient les composantes sur les congruences pseudo-orthogonales (λ) de V_n, d'un vecteur contrevariant u, dont la longueur est donnée, en vertu de la forme canonique (4''), par la formule

$$u^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^p)^2 - (u^{p+1})^2 - (u^{p+2})^2 - \ldots - (u^n)^2. \quad (10')$$

Si l'on désigne par γ^{*a}_{bc} les composantes sur les congruences pseudo-orthogonales (λ) d'une connexion affine quelconque Γ^*, on obtient la variation de la longueur u dans le transport parallèle de cette connexion, en différentiant la formule (10')

$$u\,\mathrm{d}u = u^h\,\mathrm{d}u^h - u^\alpha\,\mathrm{d}u^\alpha$$

et en tenant compte du fait que les $\mathrm{d}u^a$ sont donnés par les formules du transport parallèle

$$\mathrm{d}u^a = \gamma^{*a}_{bc}\,u^b\,\mathrm{d}s^c, \quad (11)$$

on arrive à la formule

$$u\,\mathrm{d}u = \left(\gamma^{*h}_{kc} + \gamma^{*k}_{hc}\right) u^h u^k\,\mathrm{d}s^c + \left(\gamma^{*h}_{\alpha c} - \gamma^{*\alpha}_{hc}\right) u^h u^\alpha\,\mathrm{d}s^c + \left(\gamma^{*\alpha}_{\beta c} + \gamma^{*\beta}_{\alpha c}\right) u^\alpha u^\beta\,\mathrm{d}s$$

Il en résulte que notre connexion possède la propriété de conserver les longueurs des vecteurs transportés, seulement si les composantes γ^{*a}_{bc} satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^{*h}_{kc} + \gamma^{*k}_{hc} = 0, \quad \gamma^{*h}_{\alpha c} - \gamma^{*\alpha}_{hc} = 0, \\ &\gamma^{*\alpha}_{\beta c} + \gamma^{*\beta}_{\alpha c} = 0 \ (h, k \leqq p, \ \alpha, \beta > p). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Si l'on associe à ces conditions, les conditions qui expriment que la connexion ferme les parallélogrammes infinitésimaux

$$\gamma^{*a}_{bc} - \gamma^{*a}_{cb} = w^a_{bc}. \quad (13)$$

on peut sans difficulté tirer les valeurs des γ^* et énoncer le théorème suivant :

La connexion affine de Levi-Civita d'un espace de Riemann V_n à métrique indéfinie réduite à la forme canonique (4'') a comme composantes sur les congruences pseudo-orthogonales (λ) les quantités suivantes

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^{*h}_{kl} = \gamma^h_{kl}, \quad \gamma^{*h}_{k\alpha} = \gamma^h_{k\alpha} + w^\alpha_{hk}, \quad \gamma^{*\alpha}_{hk} = \gamma^{*h}_{\alpha k} = -\gamma^\alpha_{kh}, \\ &\gamma^{*h}_{\alpha\beta} = \gamma^{*\alpha}_{h\beta} = -\gamma^h_{\beta\alpha}, \quad \gamma^{*\alpha}_{\beta h} = \gamma^\alpha_{\beta h} + w^h_{\alpha\beta}, \quad \gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} = \gamma^\alpha_{\beta\gamma}, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

où w^a_{bc} sont les coefficients des covariants bilinéaires des différentielles des arcs de nos congruences pseudo-orthogonales et γ^a_{cb} sont les coefficients de rotation de ces congruences définies en fonction des w^a_{bc} par les formules (9).

Naturellement, on peut exprimer les valeurs de γ^{*a}_{bc} en fonction des quantités w^a_{bc} seulement et on obtient des formules à peu près analogues aux formules (9').

Une fois connue la connexion γ^{*a}_{bc} de l'espace V_n, on peut trouver le tenseur de courbure de V_n, en transportant par parallélisme le vecteur u^a le long d'un parallélogramme infinitésimal, construit sur deux déplacements infinitésimaux $\mathrm{d}s^h$, δs^c. On trouve, en effet, la formule

$$\Delta u^a = \delta\,\mathrm{d}u^a - \mathrm{d}\,\delta u^a = \gamma^{*a}_{bcd}\,u^b\,\mathrm{d}s^c\,\mathrm{d}s^d \quad (15)$$

où γ^{*a}_{bcd} sont précisément les composantes sur les congruences (λ) du tenseur de courbure de V_n et sont données en fonction des γ^{*a}_{bcd} par les formules

$$\gamma^{*a}_{bcd} = \frac{\partial\gamma^{*a}_{bc}}{\partial s^d} - \frac{\partial\gamma^{*a}_{bd}}{\partial s^c} + \gamma^{*a}_{fc}\gamma^{*f}_{bd} - \gamma^{*a}_{fd}\gamma^{*f}_{bc} + \gamma^{*a}_{bf} w^f_{cd}, \quad (16)$$

dont l'analogie avec les formules qui donnent les coefficients de Ricci γ^a_{bcd} à quatre indices est évidente. Par le fait que notre transport parallèle conserve les longueurs, les composantes γ^{*a}_{bcd} sont symétriques gauches par rapport aux premiers indices a et b. De même, des formules (15) il en résulte que ces composantes sont aussi symétriques gauches par rapport aux derniers indices c et d.

En contractant, par rapport aux indices a et c ce qui est possible parce que le premier indice est contrevariant et le troisième covariant, on obtient le tenseur de Ricci

$$R_{bd} = \lambda^{*i}_{bad} \quad (17)$$

et si l'on désigne par ε^{ab} les réciproques des coefficients ε_{ab} de la métrique $\left(\varepsilon^{ab} = \varepsilon_{ab}\right)$ on peut considérer les composantes mixtes R^a_d du tenseur R_{bd}, $R^a_d = \varepsilon^{ab} R_{bd}$ et enfin, par contraction, la valeur R du tenseur de Ricci $\left(R = R^a_a\right)$.

La connexion et la courbure de V_n sont définies ainsi par leurs composantes γ^{*a}_{bc} et γ^{*a}_{bcd} sur les congruences pseudo-orthogonales. Si l'on considère une transformation de congruences ou de formes de Pfaff (λ), les nouvelles composantes $\bar{\gamma}^{*a}_{bc}$, $\bar{\gamma}^{*a}_{bcd}$ de notre connexion et courbure sont liées aux γ^{*a}_{bc} et γ^{*a}_{bcd} par les formules connues de transformation des connexions affines et des tenseurs [1]

[1] En ce qui concerne le calcul différentiel absolu des congruences voir G. Vranceanu. *Les espaces non holonomes et leurs applications mécaniques,* déjà cité, chap. I.

2. **Espaces non holonomes à métrique indéfinie.** — Supposons maintenant que dans l'espace de Riemann V_n ayant la métrique (4), nous ayons un certain nombre $n - m$ d'équations de Pfaff

$$d s^{h'} = \lambda_i^{h'} \, d x^i = 0 \quad (h' = m + 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Si les covariants $\Delta s^{h'}$ (mod. $ds^{h'}$) de ces équations (où mod. $ds^{h'}$ indique que l'on tient compte dans $\Delta s^{h'}$ des équations $ds^{h'} = 0$),

$$\Delta s^{h'} \left(\text{mod. } d s^{h'}\right) = w_{kl}^{h'} d s^k d s^l \tag{18'}$$

sont nuls, ce qui arrive seulement lorsque tous les coefficients $w_{kl}^{h'}$ sont nuls, le système de Pfaff (18) sera complètement intégrable. Dans ce cas, les équations (18) peuvent s'écrire en choisissant convenablement les variables

$$d s^{h'} = d x^{h'} = 0 \qquad (x^{h'} = \text{constantes}) \tag{18''}$$

et notre système (18'') détermine dans l'espace V_n une famille de ∞^{n-m} V_m.

Si le système (18) n'est pas complètement intégrable, on dira par analogie avec les systèmes mécaniques non holonomes, que ce système définit dans l'espace de Riemann V_n, *un espace non holonome* V_n^m. Pour étudier les propriétés de ces espaces non holonomes, on peut commencer par associer aux $n - m$ formes de Pfaff $ds^{h'}$ d'autres m formes

$$d s^h = \lambda_i^h d x^i \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

de façon que les n formes ds^h, $ds^{h'}$ constituent un système de n formes indépendantes. Si l'on exprime les n différentielles dx^i à l'aide de ces n formes ds^a, la métrique (4) de l'espace V_n peut s'écrire

$$d s^2 = g_{ab} d s^a d s^b \qquad \left(g_{ab} = a_{ij} \lambda_a^i \lambda_b^j\right)$$

et si l'on tient compte dans cette métrique des équations du système (18), on obtient la métrique de l'espace non holonome V_n^m

$$d s^2 (\text{mod. } d s^{h'}) = g_{hk} d s^h d s^k \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{19}$$

On voit que cette métrique s'applique seulement aux directions satisfaisant au système (18), ou bien aux directions tangentes à V_n^m.

Nous avons ainsi deux invariants fondamentaux de l'espace non holomone V_n^m, la métrique (19) et le système de Pfaff (18). On appelle propriétés intrinsèques de l'espace V_n^m, les propriétés qui dépendent seulement de ces deux invariants et cela à cause du fait que si le système (18) est complètement intégrable, ces propriétés coïncident avec les propriétés intrinsèques dans le sens de Riemann des ∞^{n-m} $V_{m'}$ dans lesquels se décompose en ce cas notre espace non holonome V_n^m.

On peut relier l'étude des propriétés intrinsèques de V_n^m à celle des propriétés d'un groupe de transformations de formes de Pfaff. En effet, les transformations des formes de Pfaff les plus générales, qui conservent le système (18), sont données par les formules

$$\left.\begin{aligned} d\bar{s}^h &= c_k^h d s^k + c_{k'}^h d s^{k'} \\ d\bar{s}^{h'} &= c_{k'}^{h'} d s^{k'} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &(h, k = 1, 2, \ldots, m), \\ &(h', k' = m + 1, \ldots, n) \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

où c_k^h, $c_{k'}^{h'}$, $c_{k'}^h$ sont des fonctions réelles des n variables x^1. $x^2, \ldots, x^n$, les déterminants $\left|c_k^h\right|$ et $\left|c_{k'}^{h'}\right|$ étant différents de zéro. Ces transformations forment le groupe du système de Pfaff (18) et les propriétés intrinsèques de V_n^m sont les propriétés de ce groupe, auquel on associe la métrique (19) de V_n^m. Si l'on réduit maintenant cette métrique à la forme canonique :

$$\begin{aligned} d s^2 (\text{mod. } d s^{h'}) = (d s^1)^2 + \ldots \\ + (d s^p)^2 - (d s^{p+1})^2 - \ldots - (d s^m)^2 \end{aligned} \tag{19'}$$

le nombre p étant égal à m si la métrique est définie positive, les transformations (20), qui conservent cette forme canonique, s'obtiennent en imposant aux m^2 coefficients c_k^h les conditions

$$c_k^h c_l^h - c_k^\alpha c_l^\alpha = \varepsilon_{kl} \qquad (h \leqq p, \alpha > p) \tag{20'}$$

où ε_{kl} sont nuls si $k \neq l$, $\varepsilon_{hh} = 1$ et $\varepsilon_{\alpha\alpha} = -1$.

Il en résulte qu'on peut définir les propriétés intrinsèques de V_n^m comme les propriétés du groupe de transformation de formes de Pfaff (20), (20'), le groupe qu'on appelle *groupe intrinsèque de l'espace non holonome* V_n^m.

On démontre que dans le cas où le système de Pfaff n'est pas complètement intégrable, ce groupe intrinsèque n'est pas en général géométrisable : c'est-à-dire que la connaissance des deux invariants fondamentaux de V_n^m, n'est pas en général suffisante pour donner à l'espace des propriétés géométriques importantes.

Associons à ces deux invariants la condition que les coefficients $c_{k'}^h$ aient des valeurs déterminées, qu'on peut supposer nulles, après une transformation convenable des ds^h, ce qui revient géométriquement à fixer l'espace normal à V_n^m, espace défini alors par le système

$$d s^h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m);$$

avec cette condition le sous-groupe de notre groupe intrinsèque, qui conserve aussi ce système de Pfaff

($c_{k'}^{h} = 0$), constitue un des groupes semi-intrinsèques de l'espace V_n^m et ce sont des *groupes géométrisables*.

Dans certaines conditions on peut réduire d'une manière invariante l'étude du groupe intrinsèque de V_n^m à celle de l'un de ses sous-groupes semi-intrinsèques, et même à un des sous-groupes rigides de ce groupe intrinsèque [1], sous-groupes qui s'obtiennent en supposant que les $c_{x'}^{h'}$ satisfont eux-mêmes à des conditions analogues aux (20′). Ces groupes rigides possèdent ainsi une métrique dans toutes les directions et non seulement pour les directions tangentes.

La réduction du groupe intrinsèque au groupe rigide est toujours possible si le système de Pfaff (18) se compose d'une seule équation de Pfaff non complètement intégrable

$$d s^n = \lambda_i^n d x^i = 0, \tag{21}$$

c'est-à-dire si notre espace non holonome est une hypersurface non holonome.

En effet, le groupe intrinsèque de cette hypersurface peut évidemment s'écrire

$$\left.\begin{aligned} d\bar{s}^h &= c_k^h d s^k + c^h d s^n \\ d\bar{s}^n &= \lambda d s^n \end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

où c_k^h satisfont aux conditions de pseudo-orthogonalité ou d'orthogonalité (20′) et où l'on a posé pour simplifier $c_n^h = c^h$, $c_n^n = \lambda$. Par rapport à ce groupe les coefficients w_{kl}^n du covariant de l'équation (21) de l'hypersurface

$$\Delta s^n \left(\text{mod. } d s^n\right) = w_{kl}^n d s^k d s^l, \tag{22}$$

forment un tenseur du troisième ordre, dont la loi de transformation est donnée par les formules

$$\bar{w}_{\alpha\beta}^n c_k^\alpha c_l^\beta = \lambda w_{kl}^n. \tag{22'}$$

Cela dit, si le rang du covariant Δs^n (mod. ds^n), qui est toujours un nombre pair $2q \leqq n - 1$ est égal à $n - 1$, ce qui arrive seulement si n est impair, nous aurons la formule

$$\delta^2 \bar{\Delta} = \lambda^{2q} \Delta \tag{21''}$$

où Δ est le déterminant du covariant Δs^n (mod. ds^n) et δ le déterminant $| c_k^h |$ qui est égal à $+1$. Cette formule nous montre que si l'on réduit une fois à l'aide du coefficient λ du groupe (21′), le déterminant Δ à l'unité, il restera égal à l'unité seulement pour les transformations (21′), avec $\lambda = 1$. Pour ces transformations la forme ds^n est un invariant et par conséquent le covariant

$$\Delta s^n = w_{kl}^n d s^k \delta s^l + w_{nk}^n \left(d s^n \delta s^k - d s^k \delta s^n\right) \tag{22''}$$

est aussi un invariant. Or, on peut choisir les coefficients c^h, d'une manière et une seule, de façon à annuler dans ce covariant tous les coefficients w_{nk}^n et par conséquent réduire l'étude du groupe intrinsèque (21′) à l'étude d'un groupe rigide. Ce résultat peut être considéré comme un cas particulier d'un théorème de M. Schouten sur les hypersurfaces non holonomes affines [1].

Si le rang $2q$ du covariant Δs^n est plus petit que $n-1$, ce qui arrive toujours si n est pair, on peut s'arranger de façon que dans ce covariant interviennent seulement les premières $2q$ formes ds^h. Cela fait, le groupe qui conserve cette situation, est un sous-groupe de notre groupe intrinsèque, qui transforme séparément les premières $2q$ formes ds^h et les dernières $n - 2q - 1$ formes ds^k et cela à cause de la propriété des sous-groupes d'un groupe orthogonal ou pseudo-orthogonal, d'être complètement séparables. En désignant maintenant par ν le déterminant de la transformation des $2q$ premières formes ds^h et par Δ le déterminant du covariant Δs^n ainsi réduit, nous avons une formule analogue à (1″), de façon qu'en réduisant Δ à l'unité, on peut choisir les coefficients $c^h (h \geqq 29)$ d'une manière et une seule de façon à annuler les coefficients w_{nh}^n $(h \leqq 2q)$. Le groupe qui conserve le covariant ainsi normé, conserve évidemment les deux systèmes de Pfaff

$$\left.\begin{aligned} d s^1 = d s^2 = \ldots = d s^{2q} = 0, \\ d s^{2q+1} = d s^{2q+2} = \ldots = d s^{n-1} = d s^n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22'''}$$

Or, dans le dernier de ces systèmes, le covariant Δs^n (mod. $ds^{2q+1}, \ldots, ds^n$) conserve aussi son rang $2q$, qui est le rang maximum de ce système. Par conséquent, si l'on considère dans ce système le covariant d'une des équations de la forme

$$d s^k + c^k d s^n, \qquad (k = 2p + 1, \ldots, n - 1)$$

on peut choisir les quantités c^k, comme racines de l'équation caractéristique de ce covariant, de façon que le rang de ce covariant soit inférieur à $2q$ à l'intérieur de notre système. Il en résulte qu'on peut choisir les c^k en général de plusieurs manières différentes. Si le rang du covariant Δs^n est égal à deux, cette manière de choisir les c^k est évidemment unique et les $ds^k = 0$ constituent alors les équations du système dérivé de notre second système (22‴). Cela arrive en particulier dans le cas où l'hypersurface est une V_5^4, et le covariant n'est pas du rang maximum, $n - 1 = 4$. Nous pouvons énoncer ainsi le théorème suivant :

Etant donnée une hypersurface non holonome V_n^{n-1}, on peut toujours réduire, en général de plusieurs manières différentes, l'étude de son groupe intrinsèque à l'étude d'un groupe rigide, ou en d'autres termes, on peut toujours fixer la direction de la normale ($c^h = 0$)

[1] Voir mon travail : *Sur quelques points...*, déjà cité, p. 184 191.

[1] Voir J. A. Schouten. On nonholonomic connexions, *Koninklijke Ak. Wetenschappen. Amsterdam*, 1928, **31**, n° 3, p. 299.

et la métrique sur cette normale ($\lambda = 1$). *Si l'hypersurface est une* V_3^4, *cette réduction est toujours unique.*

L'importance de ce théorème consiste dans le fait qu'il réduit l'étude des invariants du groupe intrinsèque de V_n^{n-1} à l'étude d'un groupe rigide, groupe dont on connaît *un système complet d'invariants.* Evidemment on arrive aux mêmes résultats si l'on considère dès le commencement *la forme* $\mathrm{d}s^n$ *comme un invariant* ($\lambda = 1$), ou bien si Δ est un invariant, cas qui semble avoir aussi un intérêt physique, comme nous verrons dans la troisième partie.

Considérons maintenant un groupe rigide d'une hypersurface non holonome V_n^{n-1}

$$\mathrm{d}\bar{s}^h = c_k^h \,\mathrm{d}s^k, \qquad \mathrm{d}\bar{s}^n = \mathrm{d}s^n \tag{23}$$

ou bien le groupe d'une hypersurface non holonome possédant une direction normale et une métrique sur cette normale.

Ce groupe rigide possède deux connexions affines, chacune d'elles conservant le caractère de vecteur tangent et de vecteur normal, et précisément une connexion affine dont le caractère principal est de conserver les longueurs et une connexion affine dont le caractère principal est de fermer autant que possible les parallélogrammes infinitésimaux. Cette dernière connexion a comme composantes sur les congruences (^) les quantités suivantes

$$\left.\begin{array}{r}\Gamma_{kl}^h = \overset{*}{\gamma}{}_{kl}^h, \quad \Gamma_{kn}^h = w_{kn}^h, \quad \Gamma_{nk}^n = w_{nk}^n, \quad \Gamma_{nn}^n = 0, \\ \Gamma_{na}^h = \Gamma_{ha}^n = 0.\end{array}\right\} \tag{24}$$

On voit que le transport parallèle d'un vecteur tangent v^h le long d'un chemin tangent $\mathrm{d}s^l$, est donné par les formules

$$\mathrm{d}v^h = \overset{*}{\gamma}{}_{kl}^h v^k \,\mathrm{d}s^l \tag{25}$$

et coïncide formellement avec le transport parallèle de Levi-Civita de la métrique de l'hypersurface. Je dis formellement parce que notre transport conserve les longueurs, mais il ne ferme le parallélogramme, qu'abstraction faite d'un cinquième côté dirigé suivant la normale, ayant comme composantes

$$w_{kl}^n \,\mathrm{d}s^k \,\delta s^l$$

où ds^k, δs^l sont les composantes des deux déplacements sur lesquels on construit le parallélogramme. Il en résulte ainsi que le tenseur d'intégrabilité w_{kl}^n est en même temps *le tenseur de torsion de l'hypersurface non holonome* V_n^{n-1}.

Si l'on considère maintenant le transport parallèle d'un vecteur tangent v^h le long de la normale, nous avons

$$\mathrm{d}v^h = w_{kn}^h v^k \,\mathrm{d}s^n \tag{26}$$

de façon que la variation du carré de la longueur de ce vecteur

$$v\,\mathrm{d}v = v^h \,\mathrm{d}v^h - v^\alpha \,\mathrm{d}v^\alpha$$

est donnée par la formule

$$2v\,\mathrm{d}v = (v_{hk,n} v^h v^k + 2v_{h\alpha,n} v^h v^\alpha + v_{\alpha\beta,n} v^\alpha v^\beta) \,\mathrm{d}s^n$$

où les quantités $v_{k,l,n}$ sont les composantes du tenseur de la seconde forme fondamentale de l'hypersurface. On peut exprimer les composantes de ce tenseur à l'aide des pseudo-coefficients de rotation γ^* par les formules

$$v_{k,ln} = \overset{*}{\gamma}_{kl} + \overset{*}{\gamma}{}_{lk}^n \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{27}$$

Si l'on transporte un vecteur tangent le long du pentagone infinitésimal construit sur deux déplacements tangents $\mathrm{d}s^l$, δs^r, les variations des composantes de ce vecteur, sont données par les formules.

$$Dv^h = \lambda_{klr}^h v^k \,\mathrm{d}s^l \,\delta s^r$$

où les quantités λ_{krl}^h représentent les composantes du tenseur de courbure (intérieure ou tangente) de l'hypersurface. Ces composantes sont données par les formules

$$\lambda_{klr}^h = \overset{*}{\gamma}{}_{klr}^h + w_{kn}^h w_{lr}^n \tag{25'}$$

où $\overset{*}{\gamma}{}_{klr}^h$ sont les quantités (15) et où l'on fait varier l'indice f seulement de 1 à $n-1$; par conséquent dans le cas intégrable, ces quantités définissent le tenseur de courbure de Riemann des V^{n-1} dans lesquelles se décompose notre V_n^{n-1}. On voit ainsi que notre tenseur de courbure λ_{klr}^h coïncide avec le tenseur de courbure de Riemann γ_{klr}^{*h} dans le cas intégrable ($w_{lr}^n = 0$), ou dans le cas où le parallélisme (26) le long de la normale conserve les valeurs des composantes v^h ($w_{kn}^h = 0$).

De même si l'on transporte un vecteur tangent v^h le long du parallélogramme construit sur un déplacement tangent et un déplacement normal, on obtient un second tenseur de courbure (courbure extérieure) λ_{kln}^h, dont nous n'écrirons pas ici les composantes.

Enfin, si l'on transporte un vecteur normal v^n le long de deux circuits, pentagone et parallélogramme considérés, on obtient comme tenseurs de courbure le tenseur w_{kln}^n dérivé le long de la normale du tenseur de torsion w_{kl}^n et le tenseur $\dfrac{\partial w_{nk}^n}{\partial s^n}$, mais ces tenseurs sont seulement des tenseurs rigides, tandis que les tenseurs w_{kl}^n, $v_{kl,n}$, λ_{klr}^h, λ_{kln}^h sont aussi des tenseurs semi-intrinsèques.

Nous allons maintenant montrer qu'on peut choisir les variables de façon que la métrique et l'équation de l'hypersurface, se réduisent à des formes simples.

En effet, on peut toujours supposer que les $n-1$ formes ds^h ($h \leqq n-1$) soient exprimées en fonction des $n-1$ différentielles $dx^1, dx^2, \ldots, dx^{n-1}$ seulement. En ce cas la métrique de l'hypersurface sera elle-même une forme quadratique de ces $n-1$ différentielles

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad (i, j = 1, \ldots, n-1) \quad (26')$$

les coefficiens a_{ij} étant en général fonctions aussi de la variable x^n. Quant à l'équation de l'hypersurface, puisqu'elle doit contenir la différentielle dx^n, elle peut, par un changement convenable, s'écrire sous la forme

$$ds^n = dx^n - \varphi_i\, dx^i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1) \quad (26'')$$

les quantités φ_i étant en général fonctions de toutes les variables $x^r, \ldots, x^n$.

Cela étant, on trouve que dans le cas où le tenseur de la métrique (26′) ne dépend pas de la variable x^n, le tenseur v_{kl} de la seconde forme fondamentale et le second tenseur de courbure $\lambda^h_{k,ln}$, sont tous les deux nuls. Quant au tenseur de courbure λ^h_{klr} de l'hypersurface, il se réduit au tenseur de courbure de la métrique (26′). On dit, en ce cas, que notre hypersurface est *totalement géodésique*. Si les fonctions φ_i ne dépendent pas elles aussi de la variable x^n, les tenseurs de courbure $w^n_{kl,n}$, $\dfrac{\partial w^n_{nk}}{\partial s_l}$ sont aussi nuls, de façon que les seuls tenseurs, qui peuvent être en ce cas différents de zéro sont le tenseur de torsion et le tenseur de courbure intérieure, dont les composantes sont évidemment fonctions des variables $x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ seulement.

Ce cas où a_{ij} et φ_i ne dépendent pas de la variable x^n est caractérisé par le fait que l'hypersurface admet un groupe continu à un paramètre

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x^n} \quad (x^n = x^n + t)$$

qui représente une translation le long de la normale. En effet, si une hypersurface non holonome, *définie intrinsèquement par sa métrique et son équation*, admet un groupe à un paramètre non tangent (on ne peut pas dire normal, la direction de la normale n'étant pas encore fixée), on peut la réduire à ce cas, en choisissant, comme normale, la direction des trajectoires du groupe. Cette direction de la normale ainsi déterminée peut ne pas coïncider avec celle déterminée en réduisant le déterminant Δ du covariant de l'équation (26″) à l'unité.

3. **Théorie unitaire non holonome**. — Supposons que nous soyons maintenant dans le cas de la Physique : c'est-à-dire que nous ayons d'une part l'espace temps V_4 de la théorie de la relativité, qui est un espace de Riemann à quatre dimensions dont la métrique est une forme quadratique indéfinie ayant trois carrés négatifs et un carré positif

$$ds^2 = -(ds^1)^2 - (ds^2)^2 - (ds^3)^2 + (ds^4)^2 \quad (26''')$$

les formes ds^1, ds^2, ds^3, ds^4 étant fonctions des trois variables x^1, x^2, x^3, et le temps t ou bien des quatre variables $x^1, x^2, x^3, x^4 = ct$, c étant la vitesse de la lumière, et d'autre part le champ électromagnétique, qui peut être déterminé dans l'espace de ces quatre variables par le rotationnel d'un vecteur covariant φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$). En effet, si l'espace V_4 se réduit à l'espace de la relativité restreinte, où nous avons

$$ds^1 = dx^1,\ ds^2 = dx^2,\ ds^3 = dx^3,\ ds^4 = dx^4 = c\,dt,$$

x^1, x^2, x^3, étant des coordonnées cartésiennes orthogonales, les composantes du vecteur électrique $\mathbf{e}$ (e_x, e_y, e_z) et les composantes du vecteur magnétique $\mathbf{m}$ (m_x, m_y, m_z) sont données à l'aide des composantes de ce rotationnel par les formules

$$\begin{matrix} e_x = \varphi_{14}, & e_y = \varphi_{24}, & e_z = \varphi_{34} \\ m_x = \varphi_{23}, & m_y = \varphi_{31}, & m_z = \varphi_{12} \end{matrix} \quad \left(\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}\right).$$

Par le fait que φ_{ij} sont les composantes d'un rotationnel, elles satisfont aux formules

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi_{jl}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial x^j} = 0, \quad (i, j, l = 1, 2, 4) \quad (27')$$

qui constituent pour les vecteurs $\mathbf{e}$ et $\mathbf{m}$ les premières équations de Maxwell, dans le cas où il n'existe pas du magnétisme vrai.

Il en résulte que, tant que le champ électromagnétique n'est pas identiquement nul, la forme

$$dx^5 = \varphi_i\, dx^i$$

n'est pas une différentielle totale exacte, ou bien que l'équation de Pfaff

$$ds^5 = dx^5 - \varphi_i\, dx^i = 0 \quad (28)$$

n'est pas complètement intégrable. On peut d'ailleurs bien observer que si la connaissance du vecteur φ_i détermine univoquement les vecteurs $\mathbf{e}$ et $\mathbf{m}$ la réciproque n'est pas vraie. Les composantes φ_i sont déterminées par $\mathbf{e}, \mathbf{m}$ seulement, abstraction faite de termes $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ où f est une fonction quelconque des quatre variables x^1, x^2, x^3, x^4. Cela revient à dire que la variable x_5 qui intervient dans l'équation (28) seulement par sa différentielle, est déterminée abstraction faite d'une tranformation

$$x^{5'} = x^5 + f(x_1, x^2, x^3, x^4).$$

Cette transformation joue un grand rôle dans la théorie unitaire projective. Dans notre cas, par la manière même dont on pose le problème, tous nos résultats sont invariants par cette transformation. On peut même observer que le déterminant Δ du covariant

$$\Delta s^5 = -\Delta x^5 = \varphi_{ij}\, dx^i \delta x^j$$

est égal au carré du produit scalaire des vecteurs **e** et **m**

$$\Delta = (e_x m_x + e_y m_y + e_z m_z)^2$$

et par conséquent le rang de ce covariant est deux ou quatre suivant que ces vecteurs sont orthogonaux ou non.

Dans le cas général où V_4 ne se réduit pas à l'espace euclidien de la relativité restreinte, on convient aussi de considérer le champ électromagnétique comme défini par le rotationnel d'un vecteur covariant ou bien par un tenseur symétrique gauche F_{ij} du second ordre, qui satisfait aux premières équations de Maxwell (27′), car ces équations représentent la condition nécessaire et suffisante pour que les F_{ij} puissent être considérés comme les composantes d'un rotationnel.

Toute la question est de voir maintenant de quelle manière on doit mettre en relation ces deux invariants pour arriver à une théorie unitaire satisfaisant aux diverses conditions imposées par la Physique.

Dans la théorie de Weyl la forme $\varphi_i\,\mathrm{d}x^i$ intervient comme un coefficient de dilatation de la métrique de l'espace-temps V_4, c'est-à-dire comme quelque chose superposé à l'espace V_4 et déterminé de la manière même dont est définie ou connue la métrique de V_4.

Dans la théorie de Kaluza (¹) on fait jouer à la forme $\varphi_i\mathrm{d}x^i$ un rôle extérieur et précisément l'on suppose qu'elle sert à déterminer la métrique (2) du continu physique supposé à cinq dimensions, mais cette forme n'est pas suffisante pour déterminer complètement à côté de la métrique de V_4, celle de V_5.

Dans la théorie d'Einstein et Mayer la forme $\varphi_i\,\mathrm{d}x^i$ n'intervient pas explicitement. Ce qui intervient pour la détermination du champ électromagnétique, c'est un tenseur symétrique gauche du second ordre F_{ij}. On arrive à ce tenseur en considérant le transport parallèle dans le sens Levi-Civita dans l'espace vectoriel V_5 associé à notre espace V_4, dont la métrique peut s'écrire sous la forme (2″), ou bien réduite à la forme canonique

$$\mathrm{d}\sigma^2 = -(\mathrm{d}s^1)^2 - (\mathrm{d}s^2)^2 - (\mathrm{d}s^3)^2 + (\mathrm{d}s^4)^2 + (\mathrm{d}s^5)^2,$$

qui fait rapporter cette métrique à un système de cinq congruences pseudo-ortogonales de V_5, précisément quatre congruences pseudo-orthogonales de V_4 et une cinquième congruence normale à V_4. En effet, si l'on désigne par $v^1, v^2, \ldots, v^5$ les composantes d'un vecteur contrevariant (v) sur les cinq congruences pseudo-orthogonales de V_5, le transport parallèle de ce vecteur le long d'un chemin infinitésimal tangent à $V_4\,(\mathrm{d}s^5 = 0)$, qui sont les seuls chemins possibles au point de vue physique, est défini par les équations

$$\mathrm{d}v^a = \overset{*}{\gamma}{}^a_{bl}\, v^b \mathrm{d}s^l \quad (a, b = 1, 2, \ldots, 5, \quad l = 1, 2, 3, 4) \quad (29)$$

où les cofficients de rotation $\overset{*}{\gamma}{}^a_{kl}$ de nos cinq congruences pseudo-orthogonales sont déterminées par les formules (14).

Parmi ces coefficients de rotation $\overset{*}{\gamma}{}^a_{kl}$, les cofficients $\overset{*}{\gamma}{}^h_{kl}$ $(h, k, l, \leqq 4)$ sont bien déterminées par la métrique de V_4, tandis que les autres cofficients de rotation $\overset{*}{\gamma}{}^5_{kl}$, $\overset{*}{\gamma}{}^k_{5l}$ qui interviennent aussi dans le transport parallèle (29), *ne sont pas déterminés si la forme* $\mathrm{d}s^5$ *définie par la formule* (3) *n'est pas donnée*. En tout cas, on peut remarquer que si l'on applique le transport (29) à un vecteur tangent v^b $(v_5 = 0)$, ce vecteur resterait un vecteur tangent le long du transport si l'on avait les formules

$$\mathrm{d}v^5 = \overset{*}{\gamma}{}^5_{kl}\, v^k \mathrm{d}s^l = 0.$$

Nous supposons que cela ne soit pas en général le cas, mais qu'un vecteur tangent, qu'on peut supposer unitaire, reste tangent à V_4, s'il est transporté le long de sa propre direction; nous supposons donc qu'on a

$$\mathrm{d}v^5 = \left(\overset{*}{\gamma}{}^5_{kl} + \overset{*}{\gamma}{}^5_{lk}\right) u^k u^l \mathrm{d}s = 0 \quad (\mathrm{d}s^l = u^l \mathrm{d}s) \quad (29')$$

où u^1, u^2, u^3, u^4 sont les cosinus que le vecteur fait avec les congruences pseudo-orthogonales de V_4 et $\mathrm{d}s$ la longueur du déplacement $\mathrm{d}s_l$, ce qui constitue la condition III d'E. et M. Dans ce cas ces formules (29′) nous montrent que les composantes $\overset{*}{\gamma}{}^5_{kl}$ doivent satisfaire aux conditions de symétrie gauche

$$\overset{*}{\gamma}{}^5_{kl} + \overset{*}{\gamma}{}^5_{lk} = 0 \quad (30)$$

et il suffit de considérer les projections du tenseur $\overset{*}{\gamma}{}^5_{kl}$ sur les directions du système de variables (x) de l'espace temps V_4, pour arriver au tenseur

$$F_{ij} = \overset{*}{\gamma}{}^5_{kl}\, \lambda^k_i \lambda^l_j \qquad \left(\overset{*}{\gamma}{}^5_{kl} = F_{ij} \lambda^i_k \lambda^j_l\right)$$

pris par définition comme tenseur du champ électromagnétique.

Cela étant, si l'on considère l'hypersurface non holonôme V^4_5, définie dans V_5 par l'équation de Pfaff (28), ayant comme métrique la métrique de l'espace temps V_4 et comme normale la direction orthogonale à V_4 dans V_5, cette hypersurface non holonôme possède, comme nous avons vu dans le chapitre précédent, deux tenseurs du troisième ordre, le tenseur de la seconde forme fondamentale, qui en vertu des conditions (30) *est en ce cas nul*, et le tenseur d'intégrabilité w^5_{kl}, qui en vertu de cette même condition, s'écrit

$$w^5_{kl} = \overset{*}{\gamma}{}^5_{kl} - \overset{*}{\gamma}{}^5_{lk} = 2\overset{*}{\gamma}{}^5_{kl}; \quad (30')$$

il suffit de projeter ces formules dans le système de variables (x) pour arriver à l'importante formule (3′)

$$\varphi_{ij} = 2F_{ij},$$

(¹) Voir aussi O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, *Z. für Physik*, 1926, **37**, p. 895.

ce qui nous conduit à relier la théorie unitaire d'Einstein et Mayer aux propriétés de l'hypersurface non holonôme V_5^4.

De plus, par le fait que le transport parallèle (29) ne conserve pas en général le caractère vecteur tangent à V_4, il nous semble préférable de considérer au lieu de ce transport parallèle, un des deux transports rigides de notre hypersurface non holonôme, qui ont la propriété de conserver le caractère de vecteur tangent, et en particulier le transport (25) qui est plus intrinsèquement lié à V_5^4. Nous allons voir maintenant qu'en considérant ce transport (25) et en général cette interprétation non holonome, on peut arriver du point de vue physique aux mêmes conséquences que dans la théorie initiale d'Einstein et Mayer. Plus précisément, nous allons montrer comment on peut arriver, en partant de l'hypersurface non holonôme V_5^4, d'une part aux équations des trajectoires d'une particule chargée d'électricité et d'autre part aux équations de la gravitation et de l'électromagnétisme.

MM. Einstein et Mayer arrivent aux équations des trajectoires d'une particule chargée d'électricité, en considérant les courbes de l'espace temps V_4 qui sont des courbes auto-parallèles du transport (29) et par conséquent si l'on désigne par u^1, u^2, u^3, u_4, les cosinus que la tangente à une de ces courbes fait avec les quatre congruences pseudo-orthogonales de V_4, nous avons aussi $\mathrm{d}s^l = u^l \mathrm{d}s$ de façon que ces cosinus doivent satisfaire aux équations suivantes

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}s} - \gamma^{*h}_{kl}\, u^k\, u^l = \gamma^{*5}_{hl}\, u^l\, v^5, \\ &(h = 1, 2, 3)\ \left(\gamma^{*h}_{5l} = \gamma^{*5}_{hl},\ (h \leq 3)\right) \\ &\frac{\mathrm{d}u^4}{\mathrm{d}s} - \gamma^{*4}_{kl}\, u^k\, u^l = -\,\gamma^{*5}_{4l}\, u^l\, v^5 \\ &\qquad\qquad \left(\gamma^{*4}_{5l} = -\,\gamma^{*5}_{4l}\right). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

La quantité v^5, qui est une constante en vertu de la condition (29') est assimilée par définition au rapport

$$v^5 = \rho = \frac{e}{m_0}$$

e étant la charge électrique et m_0 la masse au repos de la particule.

Si l'on considère notre interprétation non holonome, on sait que nous avons pour un espace non honolome, deux sortes de géodésiques tangentes, géodésiques définies comme courbes auto-parallèles et géodésiques définies comme courbes de la plus courte distance [1]. Ces dernières courbes, dans notre cas où l'hypersurface non holonome $V_5{}^4$ est totalement géodésique et où les composantes du vecteur électromagnétique φ_i sont indépendantes de la variable x^5 ($w^5_{5k} = 0$), ont comme équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}s} - \gamma^{*h}_{kl}\, u^k\, u^l = w^5_{hl}\, u^l\, v_5, \qquad \frac{\mathrm{d}v_5}{\mathrm{d}s} = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}u^4}{\mathrm{d}s} - \gamma^{*4}_{kl}\, u^k\, u^l = -\, w^5_{4l}\, u^l\, v_5 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

où v_5 est maintenant la composante normale d'un vecteur covariant. On voit qu'en tenant compte des formules (30'), il suffit de poser

$$v^5 = 2 v_5 = \rho$$

pour identifier les équations (31) avec les équations (32).

Cela étant, on peut remarquer que les équations (31) où v^5 est la composante normale d'un vecteur contrevariant, ne sont pas invariantes vis-à-vis des modifications de la métrique sur la normale à V_4, c'est-à-dire des changements de la forme $\mathrm{d}s^5$ dans $\lambda \mathrm{d}s^5$, λ étant une fonction quelconque des variables x^1, x^2, x^3, x^4, propriété qui appartient aux équations (32). Il semble ainsi préférable de prendre comme équations d'une particule chargée d'électricité les équations (32) des géodésiques de la plus courte distance de l'hypersurface non holonome $V_5{}^4$ et d'assimiler le coefficient ρ à la composante v_5 d'un vecteur normal covariant. Cela revient à dire que la forme $\rho\, \mathrm{d}s^5$ est indépendante des changements de métrique sur la normale.

On peut remarquer que si l'on suppose que ce coefficient ρ est nul, les équations (32) de la particule chargée d'électricité deviennent

$$\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}s} - \gamma^{*h}_{kl}\, u^k\, u^l = 0. \tag{30''}$$

Or, ces équations sont précisément les équations des géodésiques auto-parallèles de l'hypersurface $V_5{}^4$ et coïncident aussi avec les géodésiques de l'espace temps V_4, de façon que si l'on tient compte du fait que la vitesse de la lumière est telle que

$$\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j = -(\mathrm{d}s^1)^2 - (\mathrm{d}s^2)^2 - (\mathrm{d}s^3)^2 + (\mathrm{d}s^4)^2 = 0,$$

il en résulte qu'on trouve les trajectoires de la lumière données par la théorie de la relativité, c'est-à-dire *les géodésiques de longueur nulle* [1] de l'espace temps V_4, trajectoires qui sont comme on voit *indépendantes du champ électromagnétique*, en supposant que le facteur ρ soit nul. Cela revient à supposer que pour la lumière, ou bien pour le photon, la charge électrique soit nulle et que la masse pondérable m_0 soit différente de zéro, fait qui serait d'accord avec l'hypothèse de M. Louis de Broglie [2].

Si l'on veut maintenant intégrer les équations du

(1) Voir G. VRANCEANU. *Sur quelques points de la théorie des espaces non holonomes*, déjà cité, p. 192.

(1) Voir T. LEVI-CIVITA. *The absolute differential Calculus*, Blackie, London, 1927, p. 330.

(2) Voir LOUIS DE BROGLIE. *Une nouvelle conception de la lumière*, Hermann, Paris, 1934, p. 47-48.

mouvement (31) ou (32) d'une particule chargée d'électricité, on doit leur associer les équations

$$\frac{dx^i}{ds} = \lambda^i_h u^h \qquad (31')$$

et l'on obtient ainsi un système de 8 équations avec 8 inconnues x^i, u^h, système qui possède l'intégrale première quadratique particulière

$$-(u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 + (u^4)^2 = 1. \qquad (32')$$

Passons maintenant aux équatfons de la Gravitatlon et de l'Electromagnétisme, auxquelles MM. Einstein et Mayer arrivent par une méthode assez compliquée, en considérant le tenseur de courbure de la connexion affine (29) de l'espace V_5 et en suivant une voie à peu près analogue à celle qui conduit au tenseur d'Einstein (15'). Dans le cas de notre interprétation non holonome, on peut arriver à ces équations d'une manière plus simple et à notre avis beaucoup plus naturelle.

En effet, étant donné d'une part l'espace temps V_4, ayant la métrique (26) et d'autre part la forme de Pfaff (3), ou bien les deux champs, gravitationnel et électromagnétique, on détermine comme nous avons vu dans la seconde partie de ce Mémoire, une hypersurface $V_5{}^4$, dont on peut fixer d'une manière invariante la direction de la normale, comme étant définie par les quatre équations

$$ds^1 = ds^2 = ds^3 = ds^4 = 0.$$

On arrive à cette détermination invariante de la normale, soit en se servant du fait que la forme ds^5 est un invariant, soit en se servant du fait que $V_5{}^4$ doit posséder un groupe continu à un paramètre non tangent. Cette hypersurface non holonome qui est dans ces conditions *totalement géodésique*, possède seulement deux tenseurs différents de zéro, le tenseur de courbure λ^h_{klr} de $V_5{}^4$ qui coïncide avec le tenseur de courbure de V_4 et le tenseur de torsion $\overset{5}{w}_{kl}$ de $V_5{}^4$, que, pour simplifier, on peut écrire w_{kl} et qui détermine le champ électromagnétique. Il est à remarquer que E. et M. considèrent ce tenseur w_{kl} comme faisant partie du tenseur de courbure de l'espace V_5, ce qui n'arrive pas dans notre cas, au moins si l'on considère, comme d'habitude, la courbure comme le tenseur du quatrième ordre, qu'on obtient, en transportant par parallélisme un vecteur le long d'un circuit infinitésimal.

Cela étant, à l'aide du tenseur de courbure, on peut construire par la méthode bien connue de la théorie de la relativité généralisée le tenseur d'Einstein

$$R_{kl} - \frac{1}{2}\varepsilon_{kl} R \qquad \left(R_{kl} = \lambda^h_{khl}\right) \qquad (32'')$$

où ε_{kl} sont égaux aux coefficients de la métrique (26) et l'on peut écrire les équations de la Gravitation sous la forme

$$R_{kl} - \frac{1}{2}\varepsilon_{kl} R = \mu T_{kl} \qquad (33)$$

où μ est une constante et où T_{kl} sont les composantes du tenseur d'énergie. De même, à l'aide des dérivées covariantes

$$w^k_{h,l} = \frac{\partial w^k_h}{\partial s^l} + w^k_\alpha \gamma^{*\alpha}_{hl} + w^\alpha_h \gamma^{*k}_{\alpha l}$$

des composantes mixtes de la torsion

$$w^k_h = \varepsilon_{k\alpha} w_{h\alpha}$$

on peut former, par contraction, par rapport aux indices k et l, la divergence de ce tenseur, et écrire les secondes équations de Maxwell sous la forme

$$w^k_{h,k} = \frac{\partial w^k_h}{\partial s^k} + w^k_\alpha \gamma^{*\alpha}_{hl} + w^\alpha_h \gamma^{*k}_{\alpha l} = 0. \qquad (34)$$

Quant aux premières équations de Maxwell (27'), elles peuvent encore s'écrire

$$\frac{\partial w_{hk}}{\partial s^l} + \frac{\partial w_{kl}}{\partial s^h} + \frac{\partial w_{lh}}{\partial s^k} + w_{h\alpha} w^\alpha_{kl} + w_{k\alpha} w^\alpha_{lh} + w_{l\alpha} w^\alpha_{hk} = 0 \qquad (34')$$

où w^{kl}_h sont les coefficients des covariants bilinéaires des quatre formes ds^1, ds^2, ds^3, ds^4 et il est facile de voir que les équations (34) et (34') coïncident avec les équations bien connues de Maxwell pour l'espace vide, si l'on suppose que la métrique (26''') est celle de la relativité restreinte.

Dans le cas où l'on suppose que l'espace n'est pas vide, mais qu'il n'existe pas de magnétisme vrai, on doit modifier les équations (34) en considérant dans les seconds membres le vecteur du courant électrique [1]. On peut aussi supposer que le tenseur d'énergie T_{kl} soit la somme de deux tenseurs dont un dû au champ électromagnétique, ayant comme composantes les quantités

$$t_{kl} = w_{hk} w^h_l - \frac{1}{4}\varepsilon_{kl} w, \qquad \left(w = \varepsilon^{hl} w_{hk} w^k_l\right)$$

qui s'obtiennent du tenseur w_{kl} d'une manière à peu près analogue à celle par laquelle on obtient le tenseur d'Einstein du tenseur de courbure.

Conclusion. — On peut maintenant résumer les résultats auxquels nous sommes conduits par notre interprétation non holonome. Nous avons assimilé les équations de mouvement d'une particule chargée d'électricité, avec les géodésiques de la plus courte distance de l'hypersurface non holonome $V_5{}^4$, de façon que l'on peut arriver aux équations de mouvement des rayons lumineux, définies comme géodésiques de longueur nulle de l'espace temps V_4, en annulant, dans ces équations, le facteur constant ($\rho = 2v_5$). De même nous avons cons-

[1] Voir T. Levi-Civita. *Vereinfachte*, déjà cité, p. 149-150.

truit à l'aide du tenseur d'Einstein, tiré du tenseur de courbure, les équations gravitationnelles et à l'aide de la divergence du tenseur de torsion, les équations de Maxwell, les premières équations de Maxwell étant satisfaites par définition.

Or, on peut remarquer que, autant les équations des particules chargées d'électricité, que les équations de la Gravitation et de Maxwell, sont indépendantes de la variation de la métrique de V_5 sur la normale à V_4, ce qui est évidemment préférable. D'ailleurs notre espace physique non holonome est localement à quatre dimensions, c'est-à-dire que les points de cet espace sont déterminés par les valeurs des quatre variables x^1, x^2, x^3, x^4 et la distance de deux de ces points est donnée par la métrique (26'''), mais la totalité de ces espaces locaux ne peut pas être considérée, comme la totalité des espaces locaux tangents d'un même espace V_4 et cela à cause du fait que l'on suppose que le parallélogramme construit sur deux déplacemente infinitésimaux, ne se ferme qu'abstraction faite d'un cinquième côté dirigé sur une direction extérieure à notre espace temps V_4, ce cinquième côté étant mesuré effectivement par le tenseur électromagnétique. Il en résulte que seulement si le champ électromagnétique est nul, notre espace physique coïncide aussi globalement avec l'espace V_4 de la théorie de la relativité. On peut dire ainsi que le fait que l'espace physique nous semble n'avoir que quatre dimensions vient de ce que nous le percevons seulement localement.

Mais si les équations considérées jusqu'ici sont invariantes par rapport aux changements de métrique sur la normale, elles ne sont pas invariantes par rapport aux changements de direction de la normale, exception faite pour les équations de mouvement d'une particule électrisée. Cette question nous conduit à penser au cas où l'on supposerait la normale déviée de cette position invariante ; déviation qu'on peut supposer due à certains phénomènes physiques. Cette déviation serait évidemment mesurée par les valeurs des quatre fonctions c^h dans le groupe intrinsèque (20) de l'hypersurface V_5^4. En ce cas le tenseur de courbure de V_5^4 ne coïncide plus avec le tenseur de courbure de V_4, car dans la formule (25') les w^h_{kn} ne sont plus nuls, de façon que le tenseur électromagnétique intervient aussi dans les premiers membres des équations (33) de la Gravitation et par conséquent l'interaction des deux champs, est beaucoup plus complexe, ce qui pourrait être plus conforme à la nature des choses.

D'ailleurs, dans ce cas de la déviation de la normale nous avons des tenseurs nouveaux, par exemple, le tenseur de la seconde forme fondamentale, qui n'est plus nul en général, et le second tenseur de courbure

$$\lambda^h_{kl5} = \frac{\partial \gamma^{*h}_{kl}}{ds^5} - \frac{\partial w^h_{k5}}{\partial s^l} + \gamma^{*h}_{k\alpha} w^\alpha_{l5} + \gamma^{*h}_{\alpha l} w^\alpha_{k5} - w^h_{\alpha 5} \gamma^{*\alpha}_{kl} + w^h_{k5} w^5_{l5}, \tag{35}$$

qui par rapport aux indices h, k, l est un tenseur du troisième ordre ; peut-être pourra-t-on se servir de ces nouveaux tenseurs, pour rendre compte d'autres phénomènes physiques.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1936.