SUR LA DÉFINITION DES SECTIONS EFFICACES

Par JACQUES WINTER.

Sommaire. — On étudie le sens physique qu'on peut donner aux sections efficaces, et notamment, ce que signifie le fait qu'elles peuvent devenir infinies, pour des ondes incidentes de plus en plus lentes. Ceci nous permet de donner une théorie simple de la diffraction des pinceaux, sans faire intervenir explicitement le principe d'Huygens, mais seulement les propriétés, données ailleurs, du développement de Rayleigh.

1. Définition des sections efficaces. — Nous ne reprenons pas ici la théorie de la diffusion élastique d'une onde plane électronique de de Broglie e^{-iKr} par une zone de potentiel sphérique ⁽¹⁾. Nous supposons connues les définitions des déphasages des divers ordres δ_n et les propriétés de ces déphasages. Nous rappellerons simplement la définition des sections efficaces des divers ordres Q_n .

On considère l'onde diffusée d'ordre n .

$$\Psi_n^{(d)} = c_n (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2Kr}} (2n+1) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(Kr) P_n(\cos\theta) \quad (1)$$

avec

$$|c_n| = \sin \delta_n.$$

Aux très grandes distances on a

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} e^{-i\left(Kr - \frac{n+1}{2}\pi\right)}. \quad (2)$$

Le flux diffusé normalement à travers une sphère de très grand rayon vaut : *Partie Imaginaire* de $\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r}$, et en intégrant sur toute la sphère :

$$4\pi \sin^2 \delta_n \frac{(2n+1)}{K}. \quad (3)$$

(Les phénomènes d'interférence de l'onde incidente et de l'onde diffusée ne modifient pas le résultat de ce calcul simple.)

Exprimons ce flux en prenant pour unité le flux envoyé par l'onde incidente à travers l'unité de surface, qui vaut $K^{(2)}$. On aura

$$4\pi \sin^2 \delta_n \frac{(2n+1)}{K^2}, \quad (4)$$

⁽¹⁾ FAXEN et HOLTMARCK. *Z. Physik*, 1927, **45**, p. 307.

ALLIS et MORSE. *Z. Physik*, 1934, t. **70**, p. 567.

L. DE BROGLIE. *Ann. Inst. Poincaré*, 1933, t. **3**, p. 349.

Nous conservons les notations usuelles, et adoptons les unités de Hartree : $e = m = 1$, $\hbar = 2\pi$.

⁽²⁾ Dans notre thèse (*Annales de Physique*, 1934, s. 11, t. 2, p. 453), nous avons oublié de reproduire cette définition, ce qui rend difficile à comprendre l'expression des sections efficaces, que nous appelons, à tort, flux. Cela n'entraîne pas de conséquences, car nous n'étudions que la répartition angulaire des flux diffusés et non l'effet Ramsauer, ou leur variation avec K .

expression qui a les dimensions d'une surface, et qui caractérise la perte par diffusion subie par le flux incident traversant l'unité de surface. C'est la section efficace d'indice n , Q_n .

2. Difficulté due aux sections efficaces infinies.

— Supposons que K tende vers zéro (électrons très lents) et supposons que $\sin \delta_n$ qui est une fonction de K , ne tende pas vers zéro, mais vers une limite α_0 ⁽¹⁾.

Dirigeons sur le corpuscule diffuseur un large faisceau cylindrique, de section S . Le rapport du flux diffusé au flux incident sera un nombre qui vaudra

$$4\pi \sin^2 \delta_n \frac{(2n+1)}{SK^2}$$

et lorsque K tendra vers zéro, il tendra vers l'infini. Autrement dit, il y aurait infiniment plus d'électrons diffusés que d'électrons incidents.

3. Propriétés du pinceau incident. — Pour élucider cette difficulté, il est nécessaire de partir du développement de Rayleigh.

$$e^{-iKx} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2Kr}} (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(Kr) P_n(\cos\theta) \quad (5)$$

et d'arrêter à l'indice N le développement du deuxième membre. Ce deuxième membre représente alors un pin-

⁽¹⁾ Cherchons à obtenir ce résultat; supposons le potentiel diffuseur représenté par une zone sphérique de rayon R , et de potentiel constant; on a alors (voir L. DE BROGLIE. *Loc. cit.*) en posant K_1 = quantité de mouvement de l'onde de de Broglie dans la sphère

$$c_0 = e^{iKR} \frac{K \sin K_1 R \cos KR - K_1 \sin KR \cos K_1 R}{iK_1 \cos K_1 R - K \sin K_1 R}.$$

Supposons que K tende vers zéro, K_1 tendra vers une limite fixe, qui ne dépend que du potentiel dans la sphère. Le numérateur de c_0 devient équivalent à

$$K [\sin K_1 R - K_1 R \cos K_1 R]$$

K étant très petit, mais fixé, nous pouvons déterminer K_1 arbitrairement grand, de façon que $\cos K_1 R = 0$. Le dénominateur prendra son plus petit module possible, soit $K \sin K_1 R$ et c_0 devient égal à 1.

En s'écartant légèrement de la valeur précédente de K_1 , on aura pour c_0 telle valeur qu'on voudra (de module inférieur à 1), pour K arbitrairement petit.

Fig. 1.

ceau, dont nous avons étudié les propriétés. Rappelons les résultats essentiels obtenus ⁽¹⁾.

a) Le pinceau peut être grossièrement représenté par un cylindre, parallèle à la direction de propagation, mais qui s'ouvre aux extrémités comme l'indique la figure, avec une ouverture conique 2ε , qui ne dépend que de N . L'ordre de grandeur de ε vaut

$$\varepsilon \sim \frac{1}{N}. \quad (6)$$

b) Il transporte un flux qui vaut sensiblement $\gamma N^2/K$, γ étant un coefficient numérique indépendant de N et de K (N est très grand par hypothèse).

Appelons ρ le rayon de la section centrale σ du pinceau. Nous admettrons que l'on peut poser

$$\rho = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{N}{K} \quad (7)$$

ce qui se justifie ainsi :

1° Au centre du pinceau, le flux par unité de surface vaut K , puisqu'en cette région le pinceau est très exactement représenté par l'expression e^{-iKx} . Il est naturel d'étendre cette propriété à la totalité de la section du pinceau, puisque le pinceau représente sensiblement un flux plan homogène, en sa région centrale, et puisqu'on élimine les zones périphériques qui ne véhiculent qu'une fraction négligeable du flux, et qui sont les régions où le flux s'affaiblit. D'après la propriété b, l'expression (7) en découle nécessairement.

2° Par raison d'homogénéité, si on peut définir un rayon ρ il est certainement proportionnel à $1/K$, puisque le deuxième membre de (5) ne contient que l'argument Kr .

Nous voyons que si K croît, N étant fixe, le pinceau s'étrangle et devient plus intense. A l'infini sa structure n'est pas modifiée, mais les flux diffusés décroissent proportionnellement à $1/K$.

4. Macrostructure et microstructure des flux. — Nous pouvons à l'aide de ces hypothèses lever facilement la difficulté énoncée plus haut. Nous n'avons pas le droit de considérer un flux cylindrique de section S , mais bien un pinceau tel que ceux qu'on vient de définir. Un tel pinceau a une structure à l'infini ou macrostructure, ou une structure dans sa section σ ou micro-

structure. A l'infini le paramètre Kr est très grand dans σ il est très petit. Toute la différence est là.

La définition des sections efficaces compare le flux diffusé défini macroscopiquement, au flux incident e^{-iKx} expression valable dans σ seulement, par conséquent à un flux microscopique. On peut, pour éviter cela comparer le flux diffusé macroscopique, au flux incident macroscopique. Leur rapport est une grandeur numérique

$$\Phi_n^{(d)}/\Phi^{(i)} = \frac{4\pi \sin^2 \delta_n (2n+1)}{\gamma N^2}. \quad (8)$$

Elle ne dépend de K que par l'argument δ_n et ne peut pas devenir infinie.

5. Comparaison des diffusions pour des valeurs différentes de K . — La première des choses est de définir les pinceaux incidents qu'on désire comparer et qui sont caractérisés par les paramètres N , K et un coefficient d'amplitude a qui reste arbitraire et qu'on prendra égal à 1 pour un des 2 pinceaux. On aura donc à définir N' et a' , connaissant N , K , $a = 1$ et K' .

a) **On veut que les pinceaux aient mêmes macroflux.** — Il faut prendre alors $N = N'$, il en découlera $\varepsilon = \varepsilon'$. Comme les macroflux sont divisés par K , il faudra prendre

$$a' = \sqrt{\frac{K'}{K}}. \quad (9)$$

Les macroflux diffusés seront alors dans le rapport

$$\Phi_n^{(d)}(K')/\Phi_n^{(d)}(K) = \sin^2 \delta_n(K')/\sin^2 \delta_n(K) \quad (10)$$

Si K' tend vers zéro, ce rapport tend vers $\alpha_0^2/\sin^2 \delta_n(K)$.

Il n'y a aucune difficulté pour l'interprétation de l'effet Ramsauer, et il ne surgit pas de difficulté particulière si K' tend vers zéro.

b) **On veut que les pinceaux aient mêmes microflux.** — Pour que les microflux aient même intensité, il faut prendre

$$a' = \sqrt{\frac{K}{K'}}. \quad (11)$$

Enfin pour qu'ils aient mêmes rayons, il faut prendre

$$N' = N \times \frac{K'}{K}. \quad (12)$$

De (6), (11) et (12) il résulte que les macroflux ont

⁽¹⁾ Thèse, chapitre II. Ces résultats sont justifiés mais non démontrés rigoureusement. Il faut y remplacer $1/K^2$ par $1/K$ pour la raison indiquée au paragraphe 4 de cet article.

même valeur totale, mais non plus même valeur en fonction des diverses valeurs de l'angle θ .

On a notamment

$$\varepsilon' = \varepsilon \cdot \frac{K}{K'} \quad (13)$$

On aura alors, en vertu de (3) et (11)

$$\Phi_n^{(d)}(K')/\Phi_n^{(d)}(K) = K^2 \sin^2 \hat{\alpha}_n(K')/K'^2 \sin^2 \hat{\alpha}_n(K). \quad (14)$$

Si K' tend vers zéro, et si $\sin^2 \hat{\alpha}_n$ tend vers α_0 ce rapport devient infini comme $1/K'^2$.

La diffusion augmente indéfiniment comme la section efficace.

Quel sens physique faut-il attacher à ce résultat ? Y a-t-il augmentation réelle de la diffusion ? A quoi tient-elle ? Il est facile de répondre à ces questions grâce aux formules (6), (12) et (13). Lorsque K' tend vers zéro, sans qu'il y ait modification des microflux, le pinceau s'ouvre de plus en plus et aux grandes distances, perd la forme d'un pinceau cylindrique, pour prendre, dans le cas extrême, celle d'une onde sphérique convergente. Bien entendu, lorsque K' est suffisamment petit, N sera de l'ordre de quelques unités et l'on n'a un pinceau que si N est très grand. Les formules posées au paragraphe 3 perdent toute signification. Néanmoins, la discussion précédente donne le sens physique des sections efficaces qui sont liées à des pinceaux d'ouvertures variables, (mais qu'on suppose négligeables) et lorsque K' tend vers zéro, la diffusion augmente (si $\alpha_0 = 0$) parce qu'on vise, en quelque sorte, la zone de diffusion à l'aide des flux incidents.

6. Conclusion. — Il n'existe pas, à notre connaissance de définition satisfaisante des coefficients de diffusion théoriques. Une telle définition devrait tenir compte de la forme du pinceau expérimental, c'est-à-dire des diaphragmes, du nombre des atomes diffuseurs traversés par le pinceau et de leur position. Une fois un pinceau formé, il n'y a pas de raisons de supposer que son ouverture angulaire varie avec K . Ceci suppose N fixe et nous amène à la conclusion suivante : Les sections efficaces théoriques n'ont pas de sens physique précis, dans le cas limite des énergies faibles.

En effet, aux énergies suffisamment fortes et pour des diaphragmes suffisamment larges, ε reste toujours très petit et négligeable, et l'emploi des sections efficaces ne soulève pas d'objection sérieuse. Il est évident qu'alors, il n'y a pas de différence réelle entre une définition des flux à l'infini, ou sur la section centrale. Ceci est clair ; mais il n'en existe pas moins un phénomène de diffraction ou de variation d'ouverture, même lorsque ε est négligeable, auquel est liée la présence des dénominateurs K . Si l'on peut n'en pas tenir compte dans la plupart des expériences de diffusion, c'est qu'on prend toujours K assez grand. C'est cette théorie simple de la diffraction que nous voulions donner ; elle ne fait pas intervenir le principe d'Huygens. Elle ne repose que sur les propriétés intrinsèques de certains types de pinceaux, définis dans un espace sans obstacle. La définition de la diffusion peut donc se présenter de deux manières différentes, selon qu'on a à faire à des pinceaux avec ou sans ouverture angulaire sensible : Ceci rappelle les formules élémentaires de la clarté de la lunette astronomique.

Manuscrit reçu le 19 février 1935.